*Advances in Applied Mathematics* 应用数学进展, 2013, 2, 10-14
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2013.21002 Published Online February 2013 (http://www.hanspub.org/journal/aam.html)

# Stability and Optimal Tax for a Kind of Leslie-Gower Model with Prey Refuge*

**Fengying Wei, Yuting Guo**

College of Mathematics and Computer Science, Fuzhou University, Fuzhou
Email: weifengying@fzu.edu.cn, guoyutingstill@163.com

Received: Nov. 24th, 2012; revised: Nov. 30th, 2012; accepted: Dec. 19th, 2012

**Abstract:** Stability and the optimal tax of Leslie-Gower model with prey refuge is considered in this paper. By constructing Lyapunov function, sufficient conditions of the globally asymptotical stability of the positive equilibrium point for the model are obtained. Moreover, the optimal taxation policy of the model is derived by means of Pontryagin maximum principle.

**Keywords:** Leslie-Gower Model; Equilibrium Point; Globally Asymptotic Stability; Optimal Taxation

# 一类食饵具有避难所的 Leslie-Gower 模型的稳定性及最优税收*

**魏凤英，郭瑜婷**

福州大学数学与计算机科学学院，福州
Email: weifengying@fzu.edu.cn, guoyutingstill@163.com

收稿日期：2012 年 11 月 24 日；修回日期：2012 年 11 月 30 日；录用日期：2012 年 12 月 19 日

**摘　要：**研究了一类食饵具有避难所的 Leslie-Gower 模型。通过构造合适的 Lyapunov 函数，得到了正平衡点全局渐近稳定的充分性条件；根据 Pontryagin 最大值原理，得到了模型的最优税收策略。

**关键词：**Leslie-Gower 模型；平衡点；全局渐近稳定；最优税收

## 1. 引言

Leslie-Gower 捕食者－食饵模型是数学生态模型研究中一类重要的模型[1-9]。众所周知，生物资源并非取之不尽的，因此，对其进行最优收获策略方面的研究也就十分必要。目前，通过控制 Leslie-Gower 模型的税收，进而控制其收获的模型还不多。最近，在陈凤德[1]的工作基础上，李有文[2]考虑了一类具有食饵避难的 Leslie-Gower 最优税收模型：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=(r_1-b_1x)x-a_1(1-m)xy,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left[r_2-\frac{a_2y}{(1-m)x}\right]y-Eqy,\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\alpha E\left[(p-\tau)qy-c\right],\tag{1}$$

并得到了系统(1)的正平衡点的全局渐近稳定的充分条件和其最优税收策略。由于文[2]的收获方式 $h(t)=Eqy$ 是线性的，对于实际的生态系统而言，非线性收获方式更贴近现实，故本文借鉴文[3]的收获函数 $h(t)=\dfrac{Eqy}{aE+by}$，建立如下模型：

*资助信息：国家自然科学基金(No：11201075)和福建省自然科学基金(No：2010J01005)共同资助。

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\left(r_1-b_1x\right)x-a_1\left(1-m\right)xy,\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\left[r_2-\frac{a_2y}{\left(1-m\right)x}\right]y-\frac{Eqy}{aE+by},\quad \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\alpha E\left[\frac{\left(p-\tau\right)qy}{aE+by}-c\right], \tag{2}$$

初值条件：$x(0)=x_0, y(0)=y_0, E(0)=E_0$，$x(t), y(t)$ 为食饵种群和捕食者种群的密度，$r_1, r_2$ 分别为食饵种群和捕食者种群的内禀增长率，$m(0\le m<1)$ 为食饵的避难率，$a_1, b_1, a_2, a, b$ 为正常数，$q$ 表示捕食者种群收获系数，$\alpha$ 表示总投入的刚性伸缩参数，$E$ 表示对 $y$ 的收获努力量，$p$ 为单位资源 $y$ 的价格，$\tau$ 表示单位资源 $y$ 的税收，$c$ 为收获单位资源 $y$ 的成本，则 $\alpha E\left[\frac{\left(p-\tau\right)qy}{aE+by}-c\right]$ 为收获者的纯经济收入(见[4])。

## 2. 平衡点的分析

系统(2)有三个平衡点，分别是 $P_1\left(\frac{r_1}{b_1},0,0\right)$，$P_2\left(x_1,y_1,0\right)$，$P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$。

1) $P_2\left(x_1,y_1,0\right)$ 满足：$r_1-b_1x-a_1\left(1-m\right)y=0, r_2-\frac{a_2y}{\left(1-m\right)x}=0$，解得：

$$x_1=\frac{a_2r_1}{a_1r_2\left(1-m\right)^2+a_2b_1}>0, y_1=\frac{r_1r_2\left(1-m\right)}{a_1r_2\left(1-m\right)^2+a_2b_1}>0。$$

2) $P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 满足：

$$r_1-b_1x-a_1\left(1-m\right)y=0, r_2-\frac{a_2y}{\left(1-m\right)x}-\frac{Eq}{aE+by}=0, \frac{\left(p-\tau\right)qy}{aE+by}-c=0, \tag{3}$$

解得：

$$x^*=\frac{1}{b_1}\left[r_1-\frac{a_1\left(1-m\right)^2r_1D_1}{a_2b_1+D_1a_1\left(1-m\right)^2}\right],\quad y^*=\frac{r_1D_1\left(1-m\right)}{a_2b_1+D_1a_1\left(1-m\right)^2},\quad E^*=\frac{\left[\left(p-\tau\right)q-bc\right]r_1D_1\left(1-m\right)}{ac\left[a_2b_1+D_1a_1\left(1-m\right)^2\right]}。$$

(H1)：$q-ar_2>0$，$p-\frac{bc}{q-ar_2}<\tau<p-\frac{bc}{q}$；(H2)：$q-ar_2<0$，$\tau<p-\frac{bc}{q}$。

当条件(H1)或者(H2)成立时，有 $x^*>0, y^*>0$，$E^*>0$，则 $P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 是系统(2)的唯一正平衡点，其中 $D_1=r_2-\frac{\left(p-\tau\right)q-bc}{a\left(p-\tau\right)}$。

## 3. 稳定性分析

系统(2)的 Jacobi 矩阵为：

$$J=\begin{pmatrix} r_1-2b_1x-a_1\left(1-m\right)y & -a_1\left(1-m\right)x & 0 \\ \frac{a_2y^2}{\left(1-m\right)x^2} & r_2-2\frac{a_2y}{\left(1-m\right)x}-\frac{aqE^2}{\left(aE+by\right)^2} & -\frac{bqy^2}{\left(aE+by\right)^2} \\ 0 & \alpha\frac{aq(p-\tau)E^2}{\left(aE+by\right)^2} & \alpha\left[\frac{bq\left(p-\tau\right)y^2}{\left(aE+by\right)^2}-c\right] \end{pmatrix}。$$

1) 平衡点 $P_1\left(\frac{r_1}{b_1},0,0\right)$ 的特征方程为：$\left(\lambda+r_1\right)\left(\lambda-r_2\right)\left(\lambda+\alpha c\right)=0$，于是 $P_1\left(\frac{r_1}{b_1},0,0\right)$ 是鞍点。

2) 平衡点 $P_2\left(x_1,y_1,0\right)$ 点的特征方程为：$\lambda^3+\omega_1\lambda^2+\omega_2\lambda+\omega_3=0$，其中

$$\omega_1=b_1x_1+r_2-K,\omega_2=b_1x_1r_2-\left(b_1x_1+r_2\right)K+\frac{a_1a_2y_1^2}{x_1},\omega_3=-\left[b_1x_1r_2K+\frac{a_1a_2y_1^2}{x_1}K\right],$$

其中 $K=\alpha\left[\frac{\left(p-\tau\right)q}{b}-c\right]$，当 $K<0$ 时，有 $\omega_1>0,\omega_2>0,\omega_3>0$，由 Routh-Hurwitz 判别法[6]知：当 $K<0$ 时，$P_2\left(x_1,y_1,0\right)$ 是局部渐近稳定的。

3) 平衡点 $P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 点的特征方程为：$\lambda^3+\omega_1\lambda^2+\omega_2\lambda+\omega_3$=0，其中

$$\omega_1=b_1x^*-A^*-D^*,\omega_2=-A^*b_1x^*-\left(b_1x^*-A^*\right)D^*+\frac{a_1a_2\left(y^*\right)^2}{x^*}-B^*C^*,$$

$$\omega_3=b_1x^*A^*D^*-\frac{a_1a_2\left(y^*\right)^2}{x^*}D^*-b_1x^*B^*C^*,\quad A^*=-\frac{a_2y^*}{\left(1-m\right)x^*}+\frac{bqy^*E^*}{\left(aE^*+by^*\right)^2},$$

$$B^*=-\frac{bq\left(y^*\right)^2}{\left(aE^*+by^*\right)^2},C^*=\alpha\frac{aq\left(p-\tau\right)\left(E^*\right)^2}{\left(aE^*+by^*\right)^2},D^*=\alpha\left[\frac{bc^2}{q\left(p-\tau\right)}-c\right],$$

当 $A^*<0$，(H1)或者(H2)成立时，有 $\omega_1>0,\omega_2>0,\omega_3>0$，由 Routh-Hurwitz 判别法[6]知，$P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 是局部渐近稳定的。

**定理 1** 若正平衡点 $P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 存在，则 $P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 在第一象限 $Ay+x=P$ 的上半平面内是全局渐近稳定的，其中 $P=\frac{bqE^*\left(1-m\right)}{a_2\left(aE^*+by^*\right)}$。

**证明**：取正定函数 $V\left(x,y,E\right)=\ln\frac{x}{x^*}+\frac{x}{x^*}+d_1\left[\left(y-y^*\right)-y^*\ln\frac{y}{y^*}\right]+d_2\left[\left(E-E^*\right)-E^*\ln\frac{E}{E^*}\right]$，$d_1,d_2$ 为任意正常数，由(3)式得到 $r_1=b_1x^*+a_1\left(1-m\right)y^*$，$r_2=\frac{E^*q}{\left(aE^*+by^*\right)}+\frac{a_2y^*}{\left(1-m\right)x^*}$，$c=\frac{\left(p-\tau\right)qy^*}{\left(aE^*+by^*\right)}$，于是，

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=\frac{1}{x}\left(1-\frac{x^*}{x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+d_1\left(1-\frac{y^*}{y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+d_2\left(1-\frac{E^*}{E}\right)\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\\
&=-\frac{b_1\left(x-x^*\right)^2}{x}-\frac{a_1\left(1-m\right)}{x}\left(x-x^*\right)\left(y-y^*\right)+\frac{d_1bq\left(y-y^*\right)\left(E^*y-Ey^*\right)}{\left(aE^*+by^*\right)\left(aE+by\right)}\\
&\quad+\frac{d_1a_2\left(y-y^*\right)}{1-m}\left(\frac{y^*}{x^*}-\frac{y}{x}\right)+d_2\left(p-\tau\right)aq\left(E-E^*\right)\frac{\left(E^*y-Ey^*\right)}{\left(aE^*+by^*\right)\left(aE+by\right)}\\
&=-\frac{b_1\left(x-x^*\right)^2}{x}-\frac{a_1\left(1-m\right)}{x}\left(x-x^*\right)\left(y-y^*\right)+\frac{d_1bqE^*\left(y-y^*\right)^2}{\left(aE^*+by^*\right)\left(aE+by\right)}\\
&\quad-d_1bqy^*\frac{\left(y-y^*\right)\left(E-E^*\right)}{\left(aE^*+by^*\right)\left(aE+by\right)}+\frac{d_1a_2y^*}{\left(1-m\right)xx^*}\left(x-x^*\right)\left(y-y^*\right)-\frac{d_1a_2\left(y-y^*\right)^2}{\left(1-m\right)x}\\
&\quad-\frac{d_2\left(p-\tau\right)aqy^*\left(E-E^*\right)^2}{\left(aE^*+by^*\right)\left(aE+by\right)}+d_2\left(p-\tau\right)aqE^*\frac{\left(y-y^*\right)\left(E-E^*\right)}{\left(aE^*+by^*\right)\left(aE+by\right)}
\end{aligned}$$

选取正数 $d_1=\dfrac{a_1(1-m)^2x^*}{a_2y^*},d_2=\dfrac{bd_1y^*}{a(p-\tau)E^*}$，则

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{b_1(x-x^*)^2}{x}+\frac{d_1bqE^*(y-y^*)^2}{(aE^*+by^*)(aE+by)}-\frac{d_1a_2(y-y^*)^2}{(1-m)x}-\frac{d_2(p-\tau)aqy^*(E-E^*)^2}{(aE^*+by^*)(aE+by)},$$

当 $aE+by>\dfrac{bqE^*(1-m)x}{a_2(aE^*+by^*)}$ 时，则有 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}<0$。因此，正平衡点 $P_3(x^*,y^*,E^*)$ 在第一象限 $Ay+x=P$ 的上半平面内是全局渐近稳定的。证毕。

## 4. 最优税收政策

本节的目的是通过控制税收使得系统的社会总收入最大，社会收入的贴现值为：

$$J=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\frac{pqy}{aE+by}-c\right)E\mathrm{d}t,$$

其中 $\delta$ 为资本贴现率，$\mathrm{e}^{-\delta t}$ 为贴现因子，我们的目的是利用 Pontrjagin 最大值原理找到最优税收政策 $\tau=\tau(t)$，使得 $J$ 同时满足系统(2)和控制约束条件 $\tau_{\min}\le\tau\le\tau_{\max}$ 时的值最大。该控制问题的 Hamilton 函数是：

$$\begin{aligned}H=&\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\frac{pqy}{aE+by}-c\right)E+\lambda_1(t)\left[(r_1-b_1x)x-a_1(1-m)xy\right]\\&+\lambda_2(t)\left[\left(r_2-\frac{a_2y}{(1-m)x}\right)y-\frac{Eqy}{aE+by}\right]+\lambda_3(t)\alpha E\left[\frac{(p-\tau)qy}{aE+by}-c\right],\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\lambda_3(t)$ 是伴随变量[9]。假设 Hamilton 函数的最优解不发生在 $\tau=\tau_{\min}$ 和 $\tau=\tau_{\max}$ 时，我们有 $\dfrac{\partial H}{\partial\tau}=-\dfrac{\lambda_3(t)\alpha qyE}{aE+by}=0$，从而 $\lambda_3(t)=0$。构造辅助方程：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial E}=-\left\{\lambda_1(t)\left[r_1-2b_1x-a_1(1-m)y\right]+\lambda_2(t)\frac{a_2y^2}{(1-m)x^2}\right\},\tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial y}=-\left\{\mathrm{e}^{-\delta t}\frac{apqE^2}{(aE+by)^2}-\lambda_1(t)a_1(1-m)x+\lambda_2(t)\left[r_2-\frac{2a_2y}{(1-m)x}-\frac{aqE^2}{(aE+by)^2}\right]\right\},\tag{5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_3(t)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H}{\partial E}=-\left\{\mathrm{e}^{-\delta t}\left[\frac{bpqy^2}{(aE+by)^2}-c\right]-\lambda_2(t)\frac{bqy^2}{(aE+by)^2}\right\},\tag{6}$$

由 $\lambda_3(t)=0$ 及(6)得到：

$$\lambda_2(t)=\mathrm{e}^{-\delta t}\left[p-\frac{c}{bq}\left(\frac{aE+by}{y}\right)^2\right],\tag{7}$$

为了得到最优解，在正平衡点 $P_3(x^*,y^*,E^*)$ 处整理方程(4)得到

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_1(t)}{\mathrm{d}t}-P_1\lambda_1(t)=-P_2\mathrm{e}^{-\delta t},$$

其中 $P_1=b_1x^*$，$P_2=\dfrac{a_2\left[bpq(y^*)^2-c(aE^*+by^*)^2\right]}{bq(1-m)(x^*)^2}$，解得 $\lambda_1(t)=\dfrac{P_2\mathrm{e}^{-\delta t}}{P_1+\delta}$。

同理得到：

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_2(t)}{\mathrm{d}t}-Q_1\lambda_2(t)=-Q_2\mathrm{e}^{-\delta t},$$

其中 $Q_1=-\left[r_2-\frac{2a_2y^*}{(1-m)x^*}-\frac{aqE^*}{\left(aE^*+by^*\right)^2}\right]$，$Q_2=\frac{apqE^*}{\left(aE^*+by^*\right)^2}-\frac{P_2a_1(1-m)x^*}{P_1+\delta}$，解得

$$\lambda_2(t)=\frac{Q_2\mathrm{e}^{-\delta t}}{Q_1+\delta}, \tag{8}$$

将(7)代入(8)得到：

$$\lambda_2(t)=\mathrm{e}^{-\delta t}\left[p-\frac{c}{bq}\left(\frac{aE+by}{y}\right)^2\right]=\frac{Q_2\mathrm{e}^{-\delta t}}{Q_1+\delta}, \tag{9}$$

将 $P_3\left(x^*,y^*,E^*\right)$ 的值 $x^*,y^*,E^*$ 代入(9)得到关于 $\tau$ 的方程，令 $\tau_\delta$ 为(9)的解。再将 $\tau=\tau_\delta$ 代入 $x^*,y^*,E^*$ 则得到最优平衡解 $x=x_\delta,y=y_\delta,E=E_\delta$。

## 5. 结论

通过对一类具有避难所的 Leslie-Gower 模型的最优税收研究，本文得到了该系统的平衡点及其局部渐近稳定的充分性条件。利用构造合适的 Lyapunov 函数，进一步得到正平衡点的全局渐近稳定的充分条件。进而由 Pontryagin 最大值原理得到最优平衡解 $x=x_\delta,y=y_\delta,E=E_\delta$。我们的研究结果说明：通过控制税收来控制收获能达到可持续发展和经济效益最大化的双赢结果，有利于资源的合理开发。

## 参考文献 (References)


[1] F. D. Chen. On a Leslie—Gower predator—Prey model incorporating a prey refuge. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10: 2905-2908.

[2] 李有文, 杨洪娴, 田广立, 张运丽. 具有食饵避难的 Leslie-Gower 最优税收模型分析[J]. 数学实践与认识, 2011, 41: 167-171.

[3] 贾春莹, 高建国. 改进了的捕食者－食饵系统的征税模型分析[J]. 数学的实践与认识, 2010, 40: 237-242.

[4] T. K. Kar. Conservation of a fishery through optimal taxation: A dynamic reaction model. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2005, 10: 121-131.

[5] 张睿. 具有比率依赖型功能反应函数的食饵－捕食者征税模型分析[J]. 生物数学学报, 2008, 23: 484-488.

[6] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[7] 陈兰荪, 宋新宇, 陆征一. 数学生态学模型与研究方法[M]. 成都: 四川科学技术出版社, 2006.

[8] 马知恩. 种群生态学的数学建模与研究 [M]. 合肥: 安徽教育出版社，1996.

[9] C. W. Clark. Mathematical bioeconomics: The optimal management of renewable resources. New York: John Wiley, 1976: 88-120.