

Epidemic Model with Vertical Transmission and Pulse Vaccination and Non-Monotonic Incidence Rate

Fengling Hong, Xia Wang, Weiping Yan

School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan
Email: hongfl666@163.com

Received Apr. 8th, 2013; revised Apr. 20th, 2013; accepted Apr. 30th, 2013

Copyright © 2013 Fengling Hong et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: In this paper, we investigate an SIRS epidemic model with vertical transmission and pulse vaccination and non-monotonic incidence rate. First, we obtain the condition for which the disease-free periodic solution of the epidemic model is globally asymptotically stable when $R_0 < 1$ and $b(1-p) - \gamma < 0$ by Floquet theorem, impulsive comparison theorem and iteration method. Second, permanence of this system is presented by comparison theorem.

Keywords: SIRS Epidemic Model; Non-Monotone Incidence Rate; Impulsive Vaccination; Vertical Transmission; Globally Asymptotically Stable

垂直传染脉冲免疫以及非单调发病率的传染病模型

洪凤玲, 王霞, 闫卫平

山西大学数学科学学院, 太原
Email: hongfl666@163.com

收稿日期: 2013年4月8日; 修回日期: 2013年4月20日; 录用日期: 2013年4月30日

摘要: 本文介绍了一类垂直传染带脉冲免疫以及非单调发病率的 SIRS 传染病模型, 首先利用 Floquet 定理, 脉冲比较定理以及迭代法给出了无病周期解的全局渐近稳定的条件, 得出当 $R_0 < 1$ 且

$b(1-p) - \gamma < 0$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的结论。其次通过使用比较定理, 证明了系统持续的充分条件。

关键词: SIRS 型传染病模型; 非单调发病率; 脉冲免疫; 垂直传染; 全局渐近稳定

1. 引言

传染病动力系统的研究已经有很长的历史, 许多数学模型在疾病防预和控制方面起着重要作用。几年前, 大部分学者在发病率上考虑传染病对人类的影响^[1-4]。近来, 许多学者开始在脉冲免疫传染病方面给出多个模型^[5-10]。例如[10]研究了一类带脉冲免疫以及非单调发病率的 SIRS 传染病模型, 给出了无病周期解全局吸引以及系统持续的充分条件。本文在前人的基础上, 综合全局渐近稳定性以及系统的持续性的证明方法, 给出了如下带垂直传染、脉冲免疫以及非单调发病率的传染病模型:

$$\left. \begin{cases} \dot{S}(t) = b - \frac{\beta e^{-d\tau} S(t) I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} - dS(t) + b(1-p)I(t) + \gamma R(t) \\ \dot{I}(t) = \frac{\beta e^{-d\tau} S(t) I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} - (d + \mu)I(t) + bpI(t) \\ \dot{R}(t) = \mu I(t) - (d + \gamma)R(t) \end{cases} \right\} t \neq nT$$

$$\left. \begin{cases} S(t^+) = (1 - \theta)S(t) \\ I(t^+) = I(t) \\ R(t^+) = R(t) + \theta S(t) \end{cases} \right\} t = nT$$
(1)

其中 $S(t), I(t), R(t)$ 分别为易感人群数, 已感人群数和恢复人群数, b, d 分别为出生率和自然死亡率, β 为比例常量, μ 为已感人群的自然恢复率, γ 是恢复人群失去免疫力又重新变成易感人群的比例, α 是衡量传染效果的参数, τ 为疾病的时滞周期, p 为垂直传染率, θ 为疫苗免疫率。为简化模型, 引入 $S(t) + I(t) + R(t) = A$, 则 $R(t) = A - S(t) - I(t)$ 。故(1)可简化为

$$\left. \begin{cases} \dot{S}(t) = b + A\gamma - \frac{\beta e^{-d\tau} S(t) I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} - (d + \gamma)S(t) + [b(1-p) - \gamma]I(t) \\ \dot{I}(t) = \frac{\beta e^{-d\tau} S(t) I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} - (d + \mu - bp)I(t) \end{cases} \right\} t \neq nT$$

$$\left. \begin{cases} S(t^+) = (1 - \theta)S(t) \\ I(t^+) = I(t) \end{cases} \right\} t = nT$$
(2)

考虑生态因素, 设初值 $\phi = (\varphi(\theta), \psi(\theta)) \in C([-\tau, 0], R_+^2)$, $\varphi(0) > 0, \psi(0) > 0, \varphi(0) + \psi(0) \leq A$, 其中

$$R_+^2 = \{(u_1, u_2) | u_1 \geq 0, u_2 \geq 0, u_1 + u_2 \leq A\},$$

则模型(2)在集合 $\Omega = \{(S, I) | 0 \leq S, I \leq A, S + I \leq A\}$ 中是正向不变集。

本文组织如下: 第二节中利用 Floquet 定理, 脉冲比较定理以及迭代法给出了无病周期解的全局渐近稳定的条件, 得出当 $R_0 < 1$ 且 $b(1-p) - \gamma < 0$ 时, 无病平衡点是全局渐近稳定的结论。第三节中通过使用比较定理, 证明了系统持续的充分条件。

2. 无病解的渐近行为

引理 2.1^[9] 假设 $x(t) = (S(t), I(t))$ 是(2)的带正初值的一个解, $S(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0$, 则有 $x(t) \geq 0, \forall t > 0$ 。进一步, 若 $S(0^+) > 0, I(0^+) > 0$, 则 $x(t) > 0, \forall t > 0$ 。

下面研究(2)的无病子系统, 此时 $I(t) = 0$, 则有

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = b + A\gamma - (d + \gamma)S(t), t \neq nT, \\ S(t^+) = (1 - \theta)S(t), t = nT. \end{cases}$$
(3)

对此子系统, 有如下引理:

引理 2.2 系统(3)存在一个正 T -周期解

$$\tilde{S}(t) = \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \left[1 - \frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1} e^{-(d+\gamma)(t-nT)} \right], nT < t \leq (n+1)T$$

证明: 由(3)的第一个方程 $\dot{S}(t) + (d + \gamma)S(t) = b + A\gamma$, 从 $nT \rightarrow t$ 积分得

$$S(t) = \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} + \left(S_{nT} - \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \right) e^{-(d+\gamma)(t-nT)}, \quad nT < t \leq (n+1)T$$

其中 S_{nT} 表示 n -th 脉冲之后的易感人群的数目。

由(3)的第二个方程可得:

$$S_{(n+1)T} = (1 - \theta) \left[\frac{b + A\gamma}{d + \gamma} + \left(S_{nT} - \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \right) e^{-(d+\gamma)T} \right]$$

记不动点为 S^* , 则

$$S^* = (1 - \theta) \left[\frac{b + A\gamma}{d + \gamma} + \left(S^* - \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \right) e^{-(d+\gamma)T} \right]$$

$$\text{解得 } S^* = \frac{(1 - \theta) \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} (e^{(d+\gamma)T} - 1)}{e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1}.$$

将 S^* 代回到前面 $S(t)$ 中, 替代 S_{nT} , 有

$$\tilde{s}(t) = \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \left[1 - \frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1} e^{-(d+\gamma)(t-nT)} \right], \quad nT < t \leq (n+1)T$$

故系统(3)存在一个正 T -周期解。证毕。

引理 2.3^[7] 考虑方程 $\dot{x}(t) = a_1 x(t - \omega) - a_2 x(t)$, 其中 $a_1, a_2, \omega > 0$, 当 $-\omega \leq t \leq 0$ 时, $x(t) > 0$, 则有: 1) 若 $a_1 < a_2$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$; 2) 若 $a_1 > a_2$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty$ 。

对于给定初值 $S(0^+) \geq 0, I(0^+) \geq 0$ 的解, 定义

$$R_0 = \frac{\beta e^{-d\tau} (b + A\gamma)}{(d + \mu - bp)(d + \gamma)} \left[1 - \frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{(e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1)(b + A\gamma)T} (1 - e^{-(d+\gamma)T}) \right]$$

定理 1 若 $R_0 < 1$, 则系统(2)的无病周期解 $(\tilde{S}(t), 0)$ 是局部渐近稳定的。若 $R_0 > 1$, 则 $(\tilde{S}(t), 0)$ 是不稳定的。 $R_0 = 1$ 是临界值。

证明: 令 $x(t) = S(t) - \tilde{S}(t), y(t) = I(t)$ 则系统(2)可变为如下等价系统:

$$\left. \begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{\beta e^{-d\tau} x(t) y(t - \tau) + \beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) y(t - \tau)}{1 + \alpha y^2(t - \tau)} - (d + \gamma)x(t) + [b(1 - p) - \gamma]y(t) \\ \dot{y}(t) = \frac{\beta e^{-d\tau} x(t) y(t - \tau) + \beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) y(t - \tau)}{1 + \alpha y^2(t - \tau)} - (d + \mu - bp)y(t) \\ x(t^+) = (1 - \theta)x(t) \\ y(t^+) = y(t) \end{cases} \right\} \begin{matrix} t \neq nT \\ \\ t = nT \end{matrix} \quad (4)$$

系统(2)的无病周期解 $(\tilde{S}(t), 0)$ 等价于(4)的零解, (4)在零点处的线性系统为

$$\left. \begin{cases} \dot{x}(t) = -(d + \gamma)x(t) + [\beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} + b(1 - p) - \gamma]y(t) \\ \dot{y}(t) = [\beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} - (d + \mu - bp)]y(t) \\ x(t^+) = (1 - \theta)x(t) \\ y(t^+) = y(t) \end{cases} \right\} \begin{matrix} t \neq nT \\ \\ t = nT \end{matrix} \quad (5)$$

定义 $A(t) = \begin{pmatrix} -(d+\gamma) & \beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} + b(1-p) - \gamma \\ 0 & \beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} - (d+\mu-bp) \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则(5)的单值矩阵为

$$M(T) = B(T) e^{\int_0^T A(t) dt} = \begin{pmatrix} 1-\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-(d+\gamma)T} & * \\ 0 & e^{\int_0^T [\beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} - (d+\mu-bp)] dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\theta) e^{-(d+\gamma)T} & * \\ 0 & e^{\int_0^T [\beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} - (d+\mu-bp)] dt} \end{pmatrix}$$

因为不需要后面的分析, 故无需计算项 * 的精确值。 $M(T)$ 有两个实特征值 $\lambda_1 = (1-\theta) e^{-(d+\gamma)T} < 1$, $\lambda_2 = e^{\int_0^T [\beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} - (d+\mu-bp)] dt}$ 。故由 Floquet 定理, 若 $\lambda_2 < 1$, 则系统(2)的无病周期解 $(\tilde{S}(t), 0)$ 是局部渐近稳定的, 即 $\int_0^T [\beta e^{-d\tau} \tilde{S}(t) e^{-\lambda\tau} - (d+\mu-bp)] dt < 0$, 等价于 $R_0 < 1$ 。若 $R_0 > 1$, 则 $(\tilde{S}(t), 0)$ 是不稳定的。

定理 2 若 $R_0 < 1$, 且 $b(1-p) - \gamma < 0$, 则系统(2)的无病周期解 $(\tilde{S}(t), 0)$ 是全局渐近稳定的, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = \tilde{S}(t), \lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。

证明: 由条件 $R_0 < 1$ 可知, 存在足够小的 $\varepsilon_1 > 0$, 使得 $\frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{S}(t) + \varepsilon_1) dt < \frac{d+\mu-bp}{\beta e^{-(d+\lambda)\tau}}$, 则由(2)的第一个方程有 $\dot{S}(t) \leq (b+A\gamma) - (d+\gamma)S(t)$ 。

考虑脉冲比较系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (b+A\gamma) - (d+\gamma)x(t), t \neq nT \\ x(t^+) = (1-\theta)x(t), t = nT \end{cases} \quad (6)$$

对脉冲比较系统(6)的第一个方程从 $nT \rightarrow t$ 积分, 得解 $x(t) = \frac{b+A\gamma}{d+\gamma} + \left[x(nT) - \frac{b+A\gamma}{d+\gamma} \right] e^{-(d+\gamma)(t-nT)}$ 。

由(6)的第二个方程, 有

$$x((n+1)T) = (1-\theta) \left[\frac{b+A\gamma}{d+\gamma} + \left(x(nT) - \frac{b+A\gamma}{d+\gamma} \right) e^{-(d+\gamma)T} \right] \quad (7)$$

方程(7)有唯一的正不动点 $\bar{x} = \frac{(b+A\gamma)(1-\theta)(e^{(d+\gamma)T} - 1)}{(d+\gamma)(e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1)}$ 。

方程(7)可改写为如下形式: $x_{(n+1)T} = g + \bar{g}x_{nT}$, 其中 $g = (1-\theta) \frac{b+A\gamma}{d+\gamma} (1 - e^{-(d+\gamma)T})$, $\bar{g} = (1-\theta) e^{-(d+\gamma)T}$ 。

由迭代法, 可得:

$$\begin{aligned} x_{(n+1)T} &= g + \bar{g}x_{nT} = g + \bar{g}(g + \bar{g}x_{(n-1)T}) = g(1 + \bar{g}) + \bar{g}^2 x_{(n-1)T} \\ &= \dots = g(1 + \bar{g} + \bar{g}^2 + \dots + \bar{g}^n) + \bar{g}^{n+1} x_0 \\ &= g \frac{1 - \bar{g}^{n+1}}{1 - \bar{g}} + \bar{g}^{n+1} x_0, x_0 = x(0^+) > 0 \end{aligned}$$

由 $0 < \bar{g} < 1$ 可知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{(n+1)T} = \frac{g}{1 - \bar{g}} = \frac{(1-\theta) \frac{b+A\gamma}{d+\gamma} (1 - e^{-(d+\gamma)T})}{1 - (1-\theta) e^{-(d+\gamma)T}} = \frac{(b+A\gamma)(1-\theta)(e^{(d+\gamma)T} - 1)}{(d+\gamma)(e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1)} = \bar{x}$$

即 \bar{x} 是全局渐近稳定的。因此, 系统(7)的周期解

$$\tilde{x}(t) = \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} - \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \cdot \frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1} e^{-(d+\gamma)(t-nT)} = \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \left[1 - \frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1} e^{-(d+\gamma)(t-nT)} \right], nT < T \leq (n+1)T$$

是全局渐近稳定的。

假设 $x(t)$ 是满足初值条件 $x_0 = x(0^+) > 0$ 系统(6)的任意解, 由脉冲微分方程比较定理可知, 对(2)的满足初值条件 $S_0 = S(0^+) = x_0, I_0 = I(0^+) > 0$ 的一个解 $(S(t), I(t))$ 一定存在一个非负整数 m_1 , 使得 $S(t) < \tilde{x}(t) + \varepsilon_1, nT < t \leq (n+1)T, nT > m_1T$, 即 $S(t) < \tilde{S}(t) + \varepsilon_1, nT < t \leq (n+1)T, nT > m_1T$ 。

由(2)的第二个方程可得:

$$\dot{I}(t) \leq \beta e^{-d\tau} (\tilde{S}(t) + \varepsilon_1) I(t - \tau) - (d + \mu - bp) I(t), t > nT > m_1T$$

考虑脉冲比较系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \beta e^{-d\tau} (\tilde{S}(t) + \varepsilon_1) y(t - \tau) - (d + \mu - bp) y(t), t \neq nT, \\ y(t^+) = y(t), t = nT. \end{cases} \quad (8)$$

由 $R_0 < 1$ 易知 $\beta e^{-d\tau} (\tilde{S}(t) + \varepsilon_1) < d + \mu - bp$, 故由引理 2.3 可知 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。假设 $(S(t), I(t))$ 是(2)的一个解, 满足初值 $S_0 = S(0^+) > 0, I_0 = I(0^+) = y_0 > 0$, 由脉冲微分方程比较定理, 有 $\limsup_{t \rightarrow \infty} I(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。又 $I(t) > 0$, 因此 $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0$ 。

故对 $\forall \varepsilon_2 > 0$, 必存在一个非负整数 $m_2 > m_1$, 使得 $I(t) < \varepsilon_2, t > m_2T > m_1T$ 。

由(2)的第一个方程有

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &\geq b + A\gamma - \beta e^{-d\tau} S(t) \varepsilon_2 - (d + \gamma) S(t) + [b(1-p) - \gamma] \varepsilon_2 > b + A\gamma - \beta e^{-d\tau} A \varepsilon_2 - (d + \gamma) S(t) + [b(1-p) - \gamma] \varepsilon_2 \\ &= (b + A\gamma) - [A\beta e^{-d\tau} + \gamma - b(1-p)] \varepsilon_2 - (d + \gamma) S(t) \end{aligned}$$

当 $t > m_2T$, 考虑如下比较系统

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = (b + A\gamma) - [A\beta e^{-d\tau} + \gamma - b(1-p)] \varepsilon_2 - (d + \gamma) z(t), t \neq nT \\ z(t^+) = (1 - m) z(t), t = nT \end{cases} \quad (9)$$

方法同系统(6), 易知系统(9)有一个全局渐近稳定的周期解

$$\tilde{z}(t) = \frac{b + A\gamma - [A\beta e^{-d\tau} + \gamma - b(1-p)] \varepsilon_2}{d + \gamma} \left[1 - \frac{m e^{(d+\gamma)T} \cdot e^{-(d+\gamma)(t-nT)}}{e^{(d+\gamma)T} + m - 1} \right]$$

假设 $z(t)$ 是(9)的一个解满足初值 $z_0 = z(0^+) > 0$, 则对(2)的任意解 $(S(t), I(t))$, 满足初值 $S_0 = S(0^+) = z_0 > 0, I_0 = I(0^+) > 0$, 必存在一个非负整数 $m_3 > m_2 > m_1$, 使得

$$S(t) > \tilde{z}(t) - \varepsilon_2, nT < t \leq (n+1)T, nT > m_3T$$

故对任意的 ε_1 和 ε_2 ,

$$\tilde{S}(t) = \frac{b + A\gamma}{d + \gamma} \left[1 - \frac{\theta e^{(d+\gamma)T}}{e^{(d+\gamma)T} + \theta - 1} e^{-(d+\gamma)(t-nT)} \right], nT < t \leq (n+1)T$$

是全局吸引的, 因此系统(2)的无病周期解 $(\tilde{S}(t), 0)$ 是全局渐近稳定的。

3. 持续性

在本节中, 我们将证明系统(2)的持续性。

定义 3.1 若存在正常数 m, M 以及 t_0 , 使得当 $t > t_0$ 时, 在初值条件下, 系统(2)的每一个正解 $(S(t), I(t))$ 满足 $m \leq S(t) \leq M, m \leq I(t) \leq M$, 则称系统(2)是持续的。

$$\text{定义 } S_0^* = \frac{(1 + \alpha A^2)(d + \mu - bp)}{\beta e^{-d\tau}}, \quad R_* = \frac{A\beta e^{-d\tau}(1 - \theta)}{(d + \mu - bp)(1 + \alpha A^2)} \frac{1 - e^{-(d+\gamma)T}}{1 - (1 - \theta)e^{-(d+\gamma)T}} = R_0^* \frac{1 - \theta}{1 + \alpha A^2}$$

其中

$$R_0^* = \frac{A\beta e^{-d\tau}}{d + \mu - bp} \frac{1 - e^{-(d+\gamma)T}}{1 - (1 - \theta)e^{-(d+\gamma)T}}, \quad \tilde{\eta} = \frac{A(d + \gamma)(R_* - 1)}{R_* (\beta e^{-d\tau} A + \gamma)}$$

引理 3.1^[10] 考虑如下脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{u} = a - bu(t), t \neq nT, \\ u(t^+) = (1 - \xi)u(t), t = nT \end{cases}$$

其中 $a, b > 0, 0 < \xi < 1$, 则该系统有唯一的全局渐近稳定正周期解

$$\tilde{u}(t) = \frac{a}{b} + \left(u^* - \frac{a}{b} \right) e^{-b(t-nT)} = \frac{a}{b} \left(1 - \frac{\xi e^{-b(t-nT)}}{1 - (1 - \xi)e^{-bT}} \right), \quad nT < t \leq (n+1)T$$

其中 $u^* = \frac{a(1 - \xi)(1 - e^{-bT})}{b(1 - (1 - \xi)e^{-bT})}$ 。

引理 3.2 若 $R_* > 1$, 则存在一个常数 $\rho: 0 < \rho < 1$, 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} I(t) \geq \min \left\{ \frac{\beta \tilde{\eta}}{2}, \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau} \right\} \equiv m_I$ 。

证明: 令 $(S(t), I(t))$ 是系统(2)在初值条件下的任意一个解, 对 $t \geq 0$, 定义微分函数 $V(t)$ 如下:

$$V(t) = I(t) + \beta e^{-d\tau} S_0^* \int_{t-\tau}^t \frac{I(\theta)}{1 + \alpha I^2(\theta)} d\theta$$

则 $V(t)$ 的导数满足

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \dot{I}(t) + \beta e^{-d\tau} S_0^* \frac{I(t)}{1 + \alpha I^2(t)} - \beta e^{-d\tau} S_0^* \frac{I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} \\ &= \beta e^{-d\tau} (S(t) - S_0^*) \frac{I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} + \left[\beta e^{-d\tau} S_0^* \frac{1}{1 + \alpha I^2(t)} - (d + \mu - bp) \right] I(t) \\ &\geq \beta e^{-d\tau} (S(t) - S_0^*) \frac{I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} + \left[\beta e^{-d\tau} S_0^* \frac{1}{1 + \alpha A^2} - (d + \mu - bp) \right] I(t) \\ &\geq \beta e^{-d\tau} (S(t) - S_0^*) \frac{I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)}, t \geq 0 \end{aligned}$$

由于 $R_* > 1$, 则 $\tilde{\eta} > 0$, 对任意的 $\rho: 0 < \rho < 1$, 有

$$S_0^* < \frac{b + A\gamma - (\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1 - \rho)) \rho \tilde{\eta} (1 - \theta) (1 - e^{-(d+\gamma)T})}{d + \gamma} \frac{1 - (1 - \theta)e^{-(d+\gamma)T}}{1 - (1 - \theta)e^{-(d+\gamma)T}}$$

则存在一个充分小的正常数 ε , 使得

$$S_0^* \leq \frac{b + A\gamma - (\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)) \rho \tilde{\eta} (1-\theta) (1 - e^{-(d+\gamma)\tau})}{d + \gamma} \frac{1}{1 - (1-\theta)e^{-(d+\gamma)\tau}} - \varepsilon \equiv S_\Delta$$

下面证明存在 $m_I > 0$ 和一个充分大的 t_0 , 使得对任意的 $t > t_0$, 有 $I(t) \geq m_I$ 。

首先, 对所有的 $t > t_0, I(t) < \rho \tilde{\eta}$ 是不可能的。否则, 对所有的 $t > t_0, I(t) < \rho \tilde{\eta}$ 。

由(2)的第一个方程, 有 $\dot{S}(t) \geq b + A\gamma - [\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)] \rho \tilde{\eta} - (d + \gamma)S(t)$, 对 $t > t_0$, 考虑如下脉冲比较系统, 有

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = b + A\gamma - [\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)] \rho \tilde{\eta} - (d + \gamma)v(t), t \neq nT \\ v(t^+) = (1-\theta)v(t), t = nT \end{cases} \quad (10)$$

由引理 3.1 可得, (10)存在一个全局渐近稳定的正周期解

$$\tilde{v}(t) = \frac{b + A\gamma - [\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)] \rho \tilde{\eta}}{d + \gamma} + \left(v^* - \frac{b + A\gamma - [\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)] \rho \tilde{\eta}}{d + \gamma} \right) e^{-(d+\gamma)(t-nT)}$$

其中

$$v^* = \frac{b + A\gamma - [\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)] \rho \tilde{\eta} (1-\theta) (1 - e^{-(d+\gamma)\tau})}{d + \gamma} \frac{1}{1 - (1-\theta)e^{-(d+\gamma)\tau}}$$

由比较定理, 存在 $t_1 > t_0$ 以及 ε , 使得当 $t > t_1$ 时有如下不等式成立:

$$S(t) \geq v > \tilde{v}(t) - \varepsilon > v^* - \varepsilon = \frac{b + A\gamma - [\beta e^{-d\tau} A + \gamma - b(1-p)] \rho \tilde{\eta} (1-\theta) (1 - e^{-(d+\gamma)\tau})}{d + \gamma} \frac{1}{1 - (1-\theta)e^{-(d+\gamma)\tau}} - \varepsilon \triangleq S_\Delta > S_0^*. \quad (11)$$

则由(11), 对 $t > t_1$, 有

$$\dot{V}(t) \geq \beta e^{-d\tau} (S(t) - S_0^*) \frac{I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)} > \beta e^{-d\tau} (S_\Delta - S_0^*) \frac{I(t-\tau)}{1 + \alpha I^2(t-\tau)}。$$

定义 $h = \min_{t \in [t_1, t_1 + \tau]} I(t)$, 则对所有 $t \geq t_1$, 有 $I(t) \geq h$ 。否则, 存在 $t_2 \geq t_1 + \tau$, 使得 $I(t_2) = h, \dot{I}(t_2) \leq 0$, 且 $I(t) \geq I(t_2), t_1 \leq t \leq t_2$ 。此时

$$\dot{I}(t_2) = \frac{\beta e^{-d\tau} S(t_2) I(t_2 - \tau)}{1 + \alpha I^2(t_2 - \tau)} - (d + \mu - bp) I(t_2) > \frac{\beta e^{-d\tau} S_\Delta h}{1 + \alpha A^2} - (d + \mu - bp) h = (d + \mu - bp) h \left[\frac{S_\Delta}{S_0^*} - 1 \right] > 0$$

与 $\dot{I}(t_2) \leq 0$ 矛盾。因此, 当 $t \geq t_1$, 有 $I(t) \geq h > 0$ 。故对所有的 $t \geq t_1 + \tau$, 有 $\dot{V}(t) > \beta e^{-d\tau} (S_\Delta - S_0^*) \frac{h}{1 + \alpha A^2} > 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $V(t) \rightarrow \infty$, 与 $V(t) < A + \beta e^{-d\tau} S_0^* A \tau$ 矛盾!

由以上可知, 对所有的 $t > t_0, I(t) < \rho \tilde{\eta}$ 是不可能的, 即 $I(t) \geq \rho \tilde{\eta}, t > t_0$ 。

因此, 对于系统(2)的正解 $(S(t), I(t))$ 有两种情形可被考虑:

首先, 当 t 足够大时, $I(t) \geq \rho \tilde{\eta}$; 第二, 当 t 足够大时, 关于 $\rho \tilde{\eta}$, $I(t)$ 振动。

在第一种情形, $I(t) \geq \tilde{\eta}$, 这是我们想要的, 此处 $m_I = \rho \tilde{\eta}$ 。

对于第二种情形, 假设 $I(t^*) = I(t^* + \lambda) = \rho \tilde{\eta}$ 且 $I(t) \leq \rho \tilde{\eta}, t^* \leq t \leq t^* + \lambda$, 因为(2)的正解是一致有界的且 $I(t)$

不被脉冲影响, $I(t)$ 是一致连续的, 因此, 存在一个 $0 < t_c < \tau$ (与 t^* 的选择独立), 使得 $I(t) \geq \frac{\tilde{\eta}}{2}, t^* \leq t \leq t^* + t_c$ 。

若 $\lambda \leq t_c$ 则证明完成。若 $t_c < \lambda \leq \tau$, 由(2)的第二个方程, 有 $\dot{I}(t) \geq -(d + \mu - bp)I(t), t^* \leq t \leq t^* + \lambda$, 则有

$$I(t) \geq \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau}, t^* \leq t \leq t^* + \lambda \leq t^* + \tau.$$

若 $\lambda > \tau$, 则 $I(t) \geq \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau}, t^* \leq t \leq t^* + \tau$ 。

综上可知, $I(t) \geq \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau}, t^* + \tau \leq t \leq t^* + \lambda$ 。

若上述结论不成立, 则存在一个 $t_3 > t^* + \tau$, 使得 $I(t) \geq \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau}, t^* \leq t \leq t_3, I(t_3) = \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau}$, 且 $\dot{I}(t_3) \leq 0$ 。当 t^* 足够大时, 不等式 $S(t) > S_\Delta, t^* \leq t \leq t^* + \lambda$ 成立。

另一方面, 由(2)的第二个方程, 有

$$\dot{I}(t_3) \geq (d + \mu - bp) \left[\frac{\beta e^{-d\tau} S_\Delta}{(1 + \alpha A^2)(d + \mu - bp)} - 1 \right] \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau} = (d + \mu - bp) \left[\frac{S_\Delta}{S_0^*} - 1 \right] \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau} > 0$$

与 $\dot{I}(t_3) \leq 0$ 矛盾。因此, $I(t) \geq \rho \tilde{\eta} e^{-(d+\mu-bp)\tau}, t^* + \tau \leq t \leq t^* + \lambda$ 。

因为 m_l 的选择是独立的, 当 t 充分大时, 有 $I(t) \geq m_l$ 。引理 3.2 得证。

定理 3 当 $R_* > 1$ 且 $b(1-p) - \gamma < 0$ 时, 系统(2)是持续的。

证明: 记 $(S(t), I(t))$ 是系统(2)的带初值的任意一个解, 由系统(2)的第一个方程可知,

$$\dot{S}(t) \geq b + A\gamma - (\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)S(t) + [b(1-p) - \gamma]A = b[1 + (1-p)A] - (\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)S(t)$$

考虑如下比较方程

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = b[1 + (1-p)A] - (\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)z(t), t \neq nT \\ z(t^+) = (1-\theta)z(t), t = nT \end{cases}$$

与系统(6)的证明相似, 对任意充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 t_0 (t_0 充分大), 使得

$$\begin{aligned} S(t) \geq z(t) > \tilde{z}(t) - \varepsilon &\geq \frac{b[1 + (1-p)A]}{\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma} \left(1 - \frac{\theta e^{-(\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)(t-nT)}}{1 - (1-\theta)e^{-(\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)T}} \right) - \varepsilon \\ &\geq \frac{b[1 + (1-p)A]}{\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma} \frac{(1-\theta) \left(1 - e^{-(\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)T} \right)}{1 - (1-\theta)e^{-(\beta e^{-d\tau} A + d + \gamma)T}} - \varepsilon \triangleq m_s > 0 \end{aligned}$$

令 $D = \{(S, I) \in R^2 \mid m_s \leq S(t) \leq A, m_l \leq I(t) \leq A\}$, 由引理 3.2 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) \geq m_s$, 可知集合 D 在 R_+^2 是全局吸引的。

4. 致谢

本论文是在闫卫平老师悉心指导和王霞同学的批评指正下完成的, 在此论文发表之际向我的导师和朋友致以深深地敬意和衷心的感谢, 同时也感谢《应用数学进展》各位老师对本文提出的宝贵建议, 祝愿《应用数学进展》越办越好。

参考文献 (References)

- [1] H.-F. Huo, Z.-P. Ma. Dynamics of a delayed epidemic model with non-monotonic incidence rate. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010, 15(2): 459-486.
- [2] Y. Muroya, Y. Enatsu and Y. Nakata. Global stability of a delayed SIRS epidemic model with a non-monotonic incidence rate. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2011, 377(1): 1-14.
- [3] R. Xu, Z. E. Ma. Global stability of a SIR epidemic model with nonlinear incidence rate and time delay. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009, 10(5): 3175-3189.

- [4] D. M. Xiao, S. G. Ruan. Global analysis of an epidemic model with nonmonotone incidence rate. *Mathematical Biosciences*, 2007, 208(2): 419-429.
- [5] B. Shulgin, L. Stone and Z. Agur. Pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model. *Bulletin of Mathematical Biology*, 1998, 60(6): 1123-1148.
- [6] L. Stone, B. Shulgin and Z. Agur. Theoretical examination of the pulse vaccination policy in the SIR epidemic model. *Mathematical and Computer Modelling*, 2000, 31(4-5): 207-215.
- [7] S. J. Gao, L. S. Chen, J. J. Nieto and A. Torres. Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence. *Vaccine*, 2006, 24(35-36): 6037-6045.
- [8] Y. C. Zhou, H. W. Lin. Stability of periodic solutions for an SIR model with pulse vaccination. *Mathematical and Computer Modelling*, 2003, 38: 299-308.
- [9] Y. Song. Asymptotical behavior of SIR epidemic models with vertical transmission and Impulsive Vaccination. *International Conference on Computer Application and System Modeling (ICCASM2010)*, Taiyuan, 22-24 October 2010: V1-92-V1-95.
- [10] X. B. Zhang, H. F. Huo, H. Xiang and X. Y. Meng. An SIRS epidemic model with pulse vaccination and non-monotonic incidence rate. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 2013, 8: 13-21.