

# The Improvement of Similar Structure Algorithm in Solving Boundary Value Problem of Two Region Composite Thomson Equation

Congyin Fan, Shunchu Li, Xiaoxu Dong, Lixia Bai

Institute of Applied Mathematics, Xihua University, Chengdu  
Email: fcy8843@163.com

Received: Sep. 26<sup>th</sup>, 2013; revised: Oct. 23<sup>rd</sup>, 2013; accepted: Nov. 2<sup>nd</sup>, 2013

Copyright © 2013 Congyin Fan et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** In this paper, we study the boundary value problem of two areas composite Thomson equation based on the similar structure algorithm. Firstly, we make a lot of improvements on the similar structure algorithm. Then we use the algorithm, which is improved, to solve the boundary value problem of two areas complex Thomson equation. Finally, we do simulation experiment by using the MATLAB software in order to examine the feasibility of the improved algorithm. And we also observe and analyze the change law of the laboratory result by changing the coefficient of the boundary condition.

**Keywords:** Two Areas Complex; Similar Structure Algorithm; Thomson Equation; Simulation Experiment

## 相似结构算法在求两区复合 Thomson 方程边值问题中的改进

范聪银, 李顺初, 董晓旭, 白丽霞

西华大学应用数学研究所, 成都  
Email: fcy8843@163.com

收稿日期: 2013 年 9 月 26 日; 修回日期: 2013 年 10 月 23 日; 录用日期: 2013 年 11 月 2 日

**摘要:** 相似结构算法的基础上, 本文针对两区复合 Thomson 方程边值问题的求解进行研究。先对相似结构算法进行改进; 然后再利用改进后的算法来求两区复合 Thomson 微分方程边值问题的解; 最后为检验改进后算法的可行性, 本文利用 MATLAB 软件来编写程序做仿真实验, 并且通过改变边界条件的系数来观察和分析实验结果的变化。

**关键词:** 两区复合; 相似结构算法; Thomson 方程; 仿真实验

### 1. 引言

本世纪初, 微分方程边值问题解的相似结构理论开始形成<sup>[1]</sup>。在此之后, 迟颖在 2010 年提出了含有参变量的 Bessel 方程边值问题解的相似结构<sup>[2]</sup>。2012 年许东旭等欧拉超几何微分方程的一类边值问题解的相似结构<sup>[3]</sup>。2012 年肖绪霞等证明了欧拉超几何方程边值问题的解具有相似结构<sup>[4]</sup>。2012~2013 年, 黄荣军、王芙蓉分别提出了求解第一种 Weber 方程和 Airy 方程边值问题的相似构造法<sup>[5,6]</sup>。2013 年石俊华证明了二阶非其次微分方程

组边值问题的解也具有相似结构<sup>[7]</sup>。

在以上的基础上，二阶微分方程边值问题的解的相似结构算法被提出<sup>[8]</sup>。通过实例的验证二阶微分方程边值问题解的算法能够面向计算，具有可靠的理论分析，具有良好的复杂程度，且由算法所求出的解具有稳定性。

在文献[8]研究的基础上，本文提出了较为复杂的边值问题，即两区复合型 Thomson 方程边值问题

$$\begin{cases} x^2 y_1'' + xy_1' - (ix^2 + v_1^2)y_1 = 0, & a \leq x \leq c \\ x^2 y_2'' + xy_2' - (ix^2 + v_2^2)y_2 = 0, & c \leq x \leq b \\ [Ey_1 + (1 + EF)y_1']_{x=a} = D \\ y_1|_{x=c} = \lambda y_2|_{x=c} \\ y_1'|_{x=c} = \mu y_2'|_{x=c} \\ [My_2 + Ny_2']_{x=b} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $v_1, v_2, D, E, F, M, N, a, b, c$  为已知实常数，且

$D \neq 0, \lambda \neq 0, \mu \neq 0, M^2 + N^2 \neq 0, 0 < a < c < b, i^2 = -1$ 。当  $x \in (a, c)$  表示左区； $x \in (c, b)$  表示右区。

## 2. 回顾形如(2)的算法设计过程<sup>[8]</sup>

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \\ [Ey + (1 + EF)y']_{x=a} = D; \\ [Gy + Hy']_{x=b} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

第一步：利用目标方程的两个线性无关的解  $y_1(x), y_2(x)$  作引解函数。

第二步：由引解函数及右边界条件  $[Gy + Hy']_{x=b} = 0$  的系数  $G, H$  生成核函数  $\Phi(x)$  并计算  $\Phi(a)$ 。

第三步：由左边界条件  $[Ey + (1 + EF)y']_{x=a} = D$  的系数  $D, E, F$  进行组装而获得边值问题(1)的解。

## 3. 算法改进

对比边值问题(1)和(2)，对形如边值问(2)的算法进行改进后可得如下求解边值问题(1)解的算法步骤(详细数学推导过程见附录 A)：

第一步：由复合型 Thomson 方程组边值问题左、右区定解方程的两个线性无关解  $I_{v_j}(\sqrt{ix})$ 、 $K_{v_j}(\sqrt{ix})$  ( $j=1,2$ ) 分别作两个引解函数。其他引解函数通过对  $\varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i})$  ( $j=1,2$ ) 关于  $x, \xi$  求偏导得到。

第二步：由右区引解函数  $\varphi_{s,t}^2(x, \xi)$  ( $s, t=0,1$ ) 和齐次右边界条件  $[My_2 + Ny_2']_{x=b} = 0$  的系数  $M, N$  构造出复合型 Thomson 方程组边值问题(1)的右区相似核函数  $\Phi_2(x)$ ；由左区引解函数  $\varphi_{s,t}^1(x, \xi)$  ( $s, t=0,1$ )，交界面条件  $y_1|_{x=c} = \lambda y_2|_{x=c}$ 、 $y_1'|_{x=c} = \mu y_2'|_{x=c}$  的系数  $\lambda, \mu$  和右区相似核函数  $\Phi_2(x)$  造出复合型 Thomson 方程组边值问题(1)的左区相似核函数  $\Phi_1(x)$ 。

第三步：对复合型 Thomson 方程组边值问题(1)，利用非齐次左边界条件  $[Ey_1 + (1 + EF)y_1']_{x=a} = D$  的系数  $D, E, F$  和左区相似核函数  $\Phi_1(x)$  进行组装，得到边值问题(1)的左区间解；再利用非齐次左边界条件的系数  $D, E, F$ ，左区引解函数  $\varphi_{s,t}^1(x, \xi)$  ( $s, t=0,1$ )，交界面条件的系数  $\lambda, \mu$  和右区相似核函数  $\Phi_2(x)$  进行组装，得到边值问题(1)的右区间解。

根据上述步骤可得如下算法流程图，如图 1 所示：

其中  $y_j^1(x) = I_{v_j}(\sqrt{ix}), y_j^2(x) = K_{v_j}(\sqrt{ix})$  ( $j=1,2$ ) 1 表示左区，2 表示右区。

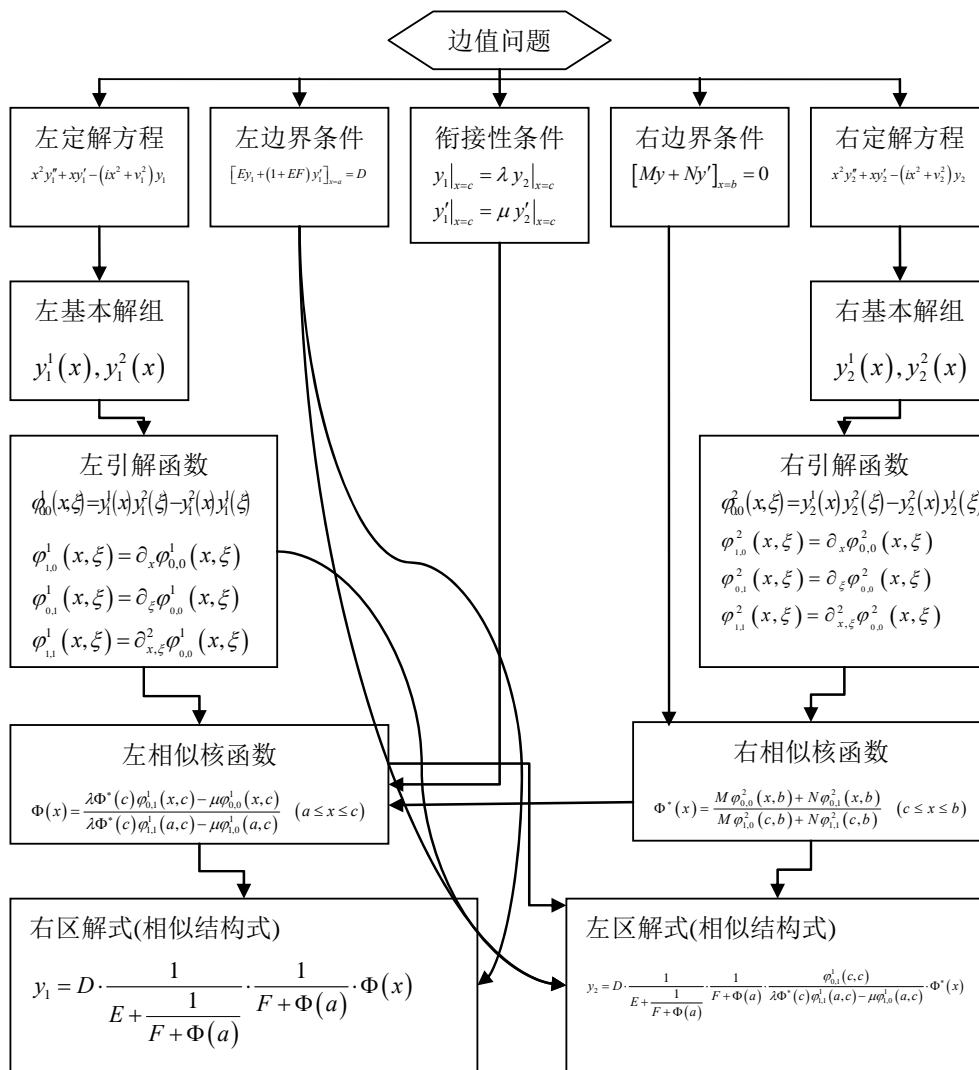


Figure 1. Algorithm flow chart  
图 1. 算法流程图

#### 4. 仿真实验

分别令边值问题(1)中的参数  $M = 2, N = 5, E = 6, F = 10, \lambda = 1, \mu = 2, a = 1, c = 4, b = 10, D = 3$ 。那么根据算法流程图利用 MATLAB<sup>[9,10]</sup>可得边值问题(1)解的函数图象, 如图 2 所示:

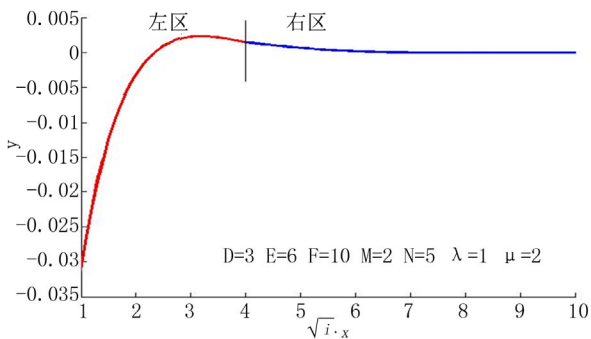


Figure 2. Curve of solution to boundary value problem (1)  
图 2. 边值问题(1)解的曲线

现通过改变参数 D、E、F 来观察函数图象的变化，如图 3~5 所示。

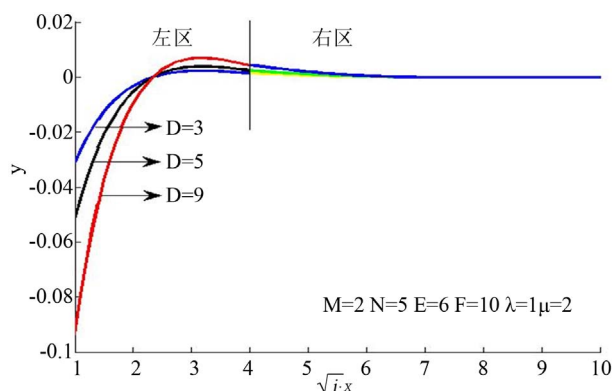


Figure 3. The influence of parameter D on curve  
图 3. 参数 D 对曲线的影响

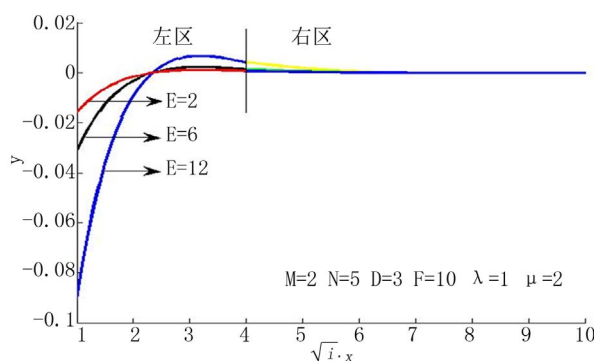


Figure 4. The influence of parameter E on curve  
图 4. 参数 E 对曲线的影响

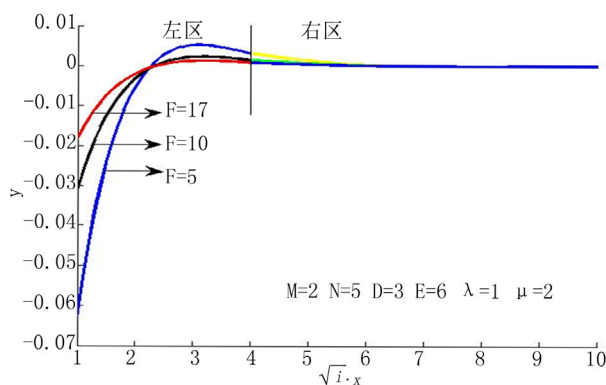


Figure 5. The influence of parameter F on curve  
图 5. 参数 F 对曲线的影响

## 5. 结论

1) 改进后的算法只包括了加、减、乘、除运算和逻辑运算，而这些运算计算机能直接处理运行，所以该算法能面向计算。

2) 观察图 2~5 可以，无论参数如何改变，边值问题(1)的解最终都趋近与 0。由此说明该算法具有很好的稳定性。

3) 从图 3~5 中很容易观察到参数 D、E、F 是如何影响边值问题(1)的解。这对于两区复合型 Thomson 方程边值问题在实际工程中的应用提供了实用的价值。

4) 本文所提出来的算法流程能为编写计算机程序语言提供清晰的流程。

## 参考文献 (References)

- [1] 李顺初 (2010) 微分方程解的相似结构的初探与展望. *西华大学学报(自然科学版)*, **2**, 223-238.
- [2] 迟颖, 李顺初, 严娟 (2010) 含参数  $\lambda$  的 Bessel 方程边值问题的相似结构. *大连交通大学学报*, **5**, 109-111.
- [3] 许东旭, 李顺初, 许丽 (2012) 欧拉超几何微分方程的一类边值问题解的相似结构. *西华大学学报(自然科学版)*, **2**, 91-93.
- [4] 肖绪霞, 李顺初 (2012) 欧拉超几何方程边值问题的解的相似结构. *内蒙古师范大学学报(自然科学汉文版)*, **6**, 597-603.
- [5] 黄荣军, 李顺初, 许东旭 (2012) 求解第一种 Weber 方程边值问题的相似构造法. *绵阳师范学院学报*, **11**, 1-15.
- [6] 王芙蓉, 李顺初, 许东旭 (2013) Airy 方程的一类边值问题的解的相似构造法. *湖北师范学院学报(自然科学版)*, **1**, 79-85.
- [7] Shi, J.-H., Li, S.-C., Wang, X.-L. and Gui, D.-D. (2013) A new method for solving boundary value problem of composite Hermit Equations. *Advanced Materials Research*, **753-755**, 2851-2854.
- [8] 范聪银, 李顺初, 董晓旭, 白丽霞 (2013) 基于相似结构的算法设计. *应用数学进展*, **3**, 107-113.
- [9] 龚纯, 王正林 (2008) MATLAB 语言常用算法程序集. 电子工业出版社, 北京.
- [10] 胡良剑, 孙晓君 (2006) MATLAB 数学实验. 高等教育出版社, 北京.
- [11] 刘式适, 刘式达 (2002) 特殊函数. 气象出版社, 北京.

## 附录 A

### A.1. 预备知识

**引理 1:** Thomson 方程  $x^2 y_j'' + xy_j' - (ix^2 + v_j^2) y_j = 0 (j=1,2)$  可经过变量替换  $\zeta = \sqrt{ix}$ , 化为<sup>[11]</sup>:

$$\zeta^2 \frac{d^2 y_j}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dy_j}{d\zeta} - (\zeta^2 + v_j^2) y_j = 0 (j=1,2) \quad (\text{A2})$$

证明: 对 Thomson 方程的自变量  $x$  作替换  $\zeta = \sqrt{ix}$ , 因

$$y_j' \equiv \frac{dy_j}{dx} = \sqrt{i} \frac{dy_j}{d\zeta}, y_j'' \equiv \frac{d^2 y_j}{dx^2} = i \frac{d^2 y_j}{d\zeta^2}$$

则 Thomson 方程可化为

$$\zeta^2 \frac{d^2 y_j}{d\zeta^2} + \zeta \frac{dy_j}{d\zeta} - (\zeta^2 + v_j^2) y_j = 0 (j=1,2)$$

(A2)式是自变量为  $\zeta$  的变型 Bessel 方程。

**引理 2:** Thomson 方程  $x^2 y_j'' + xy_j' - (ix^2 + v_j^2) y_j = 0 (j=1,2)$  的通解可以写为:

$$y_j = A_j I_{v_j}(\sqrt{ix}) + B_j K_{v_j}(\sqrt{ix}) (j=1,2) \quad (\text{A3})$$

其中,  $A_j, B_j$  是任意实常数,  $I_{v_j}(\cdot), K_{v_j}(\cdot)$  分别称为  $v_j$  阶的第一类、第二类变型的 Bessel 函数。

证明: 因为变型的 Bessel 方程(A2)的通解可以表示为:

$$y_j = A_j I_{v_j}(\zeta) + B_j K_{v_j}(\zeta) (j=1,2)$$

则由引理 1 知, 令  $\zeta = \sqrt{ix}$ , 得到 Thomson 方程的通解为:

$$y_j = A_j I_{v_j}(\sqrt{ix}) + B_j K_{v_j}(\sqrt{ix}) (j=1,2)$$

若记:

$$\varphi_{m_j, n_j}(x, \xi, \sqrt{i}) = K_{m_j}(\sqrt{ix}) I_{n_j}(\sqrt{i}\xi) + (-1)^{m_j - n_j + 1} I_{m_j}(\sqrt{ix}) K_{n_j}(\sqrt{i}\xi) (j=1,2) \quad (\text{A4})$$

**引理 3:** 设  $I_{v_j}(\sqrt{ix}), K_{v_j}(\sqrt{ix})$  是 Thomson 方程  $x^2 y_j'' + xy_j' - (ix^2 + v_j^2) y_j = 0$  的两个线性无关解 ( $j=1,2$ ), 作引解函数:

$$\varphi_{0,0}^j(x, \xi) = \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) (j=1,2) \quad (\text{A5})$$

则有

$$\varphi_{1,0}^j(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) = \frac{v_j}{x} \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) - \sqrt{i} \varphi_{v_j+1, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) (j=1,2) \quad (\text{A6})$$

$$\varphi_{0,1}^j(x, \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) = \frac{v_j}{\xi} \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) + \sqrt{i} \varphi_{v_j, v_j+1}(x, \xi, \sqrt{i}) (j=1,2) \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,1}^j(x, \xi) &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial \xi} \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) = \frac{v_j^2}{x \xi} \varphi_{v_j, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) - \frac{\sqrt{i} v_j}{\xi} \varphi_{v_j+1, v_j}(x, \xi, \sqrt{i}) \\ &\quad + \frac{\sqrt{i} v_j}{x} \varphi_{v_j, v_j+1}(x, \xi, \sqrt{i}) - i \varphi_{v_j+1, v_j+1}(x, \xi, \sqrt{i}) (j=1,2) \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

其中  $j=1$  表示左区 ( $a \leq x \leq c$ ),  $j=2$  表示右区 ( $c \leq x \leq b$ )。

### A.2. 主要定理及其证明

**定理 1:** 若边值问题(1)有唯一解, 则左区间解为:

$$y_1 = D \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{F + \Phi_1(a)}} \cdot \frac{1}{F + \Phi_1(a)} \cdot \Phi_1(x) (a \leq x \leq c) \quad (A9)$$

右区间解为:

$$y_2 = D \cdot \frac{1}{E + \frac{1}{F + \Phi_1(a)}} \cdot \frac{1}{F + \Phi_1(a)} \cdot \frac{\varphi_{0,1}^1(c, c)}{\lambda \Phi_2(c) \varphi_{1,1}^1(a, c) - \mu \varphi_{1,0}^1(a, c)} \cdot \Phi_2(x) (c \leq x \leq b) \quad (A10)$$

其中  $\Phi_2(x)$  称为右区相似核函数, 且为:

$$\Phi_2(x) = \frac{M \varphi_{0,0}^2(x, b) + N \varphi_{0,1}^2(x, b)}{M \varphi_{1,0}^2(c, b) + N \varphi_{1,1}^2(c, b)} (c \leq x \leq b) \quad (A11)$$

$\Phi_1(x)$  称为左区相似核函数, 且为:

$$\Phi_1(x) = \frac{\lambda \Phi_2(c) \varphi_{0,1}^1(x, c) - \mu \varphi_{0,0}^1(x, c)}{\lambda \Phi_2(c) \varphi_{1,1}^1(a, c) - \mu \varphi_{1,0}^1(a, c)} (c \leq x \leq b) \quad (A12)$$

证明: 由引理 2 知, 边值问题(1)中左、右区定解方程的通解为

$$y_j(x) = A_j I_{\nu_j}(\sqrt{i}x) + B_j K_{\nu_j}(\sqrt{i}x) (j=1, 2) \quad (A13)$$

故有

$$\begin{aligned} y_j'(x) &= \frac{d}{dx} [A_j I_{\nu_j}(\sqrt{i}x) + B_j K_{\nu_j}(\sqrt{i}x)] \\ &= A_j \left[ \frac{\nu_j}{x} I_{\nu_j}(\sqrt{i}x) + \sqrt{i} I_{\nu_j+1}(\sqrt{i}x) \right] + B_j \left[ \frac{\nu_j}{x} K_{\nu_j}(\sqrt{i}x) - \sqrt{i} K_{\nu_j+1}(\sqrt{i}x) \right] \end{aligned} \quad (A14)$$

把(A13)、(A14)式分别代入由边值问题(1)的左边界条件  $[E y_1 + (1 + EF) y_1']_{x=a} = D$ , 交界点  $x=c$  处的两个衔接条件  $y_1|_{x=c} = \lambda y_2|_{x=c}$ 、 $y_1'|_{x=c} = \mu y_2'|_{x=c}$ , 齐次右边界条件  $[M y_2 + N y_2']_{x=b} = 0$  得:

$$\begin{aligned} &A_1 \left\{ E I_{\nu_1}(\sqrt{i}a) + (1 + EF) \left[ \frac{\nu_1}{a} I_{\nu_1}(\sqrt{i}a) + \sqrt{i} I_{\nu_1+1}(\sqrt{i}a) \right] \right\} \\ &+ B_1 \left\{ E K_{\nu_1}(\sqrt{i}a) + (1 + EF) \left[ \frac{\nu_1}{a} K_{\nu_1}(\sqrt{i}a) - \sqrt{i} K_{\nu_1+1}(\sqrt{i}a) \right] \right\} = D \end{aligned} \quad (A15)$$

$$A_1 I_{\nu_1}(\sqrt{i}c) + B_1 K_{\nu_1}(\sqrt{i}c) - A_2 \lambda I_{\nu_2}(\sqrt{i}c) - B_2 \lambda K_{\nu_2}(\sqrt{i}c) = 0 \quad (A16)$$

$$\begin{aligned} &A_1 \left[ \frac{\nu_1}{c} I_{\nu_1}(\sqrt{i}c) + \sqrt{i} I_{\nu_1+1}(\sqrt{i}c) \right] + B_1 \left[ \frac{\nu_1}{c} K_{\nu_1}(\sqrt{i}c) - \sqrt{i} K_{\nu_1+1}(\sqrt{i}c) \right] \\ &- A_2 \mu \left[ \frac{\nu_2}{c} I_{\nu_2}(\sqrt{i}c) + \sqrt{i} I_{\nu_2+1}(\sqrt{i}c) \right] - B_2 \mu \left[ \frac{\nu_2}{c} K_{\nu_2}(\sqrt{i}c) - \sqrt{i} K_{\nu_2+1}(\sqrt{i}c) \right] = 0 \end{aligned} \quad (A17)$$

$$\begin{aligned} &A_2 \left\{ M I_{\nu_2}(\sqrt{i}b) + N \left[ \frac{\nu_2}{b} I_{\nu_2}(\sqrt{i}b) + \sqrt{i} I_{\nu_2+1}(\sqrt{i}b) \right] \right\} \\ &+ B_2 \left\{ M K_{\nu_2}(\sqrt{i}b) + N \left[ \frac{\nu_2}{b} K_{\nu_2}(\sqrt{i}b) - \sqrt{i} K_{\nu_2+1}(\sqrt{i}b) \right] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (A18)$$

利用(A5)~(A8)式, 得到关于待定系数  $A_1, B_1, A_2, B_2$  的线性方程组(A15)~(A18)的系数行列式如下:

$$\begin{aligned} \Delta = E & \left\{ -\mu\varphi_{0,0}^1(a,c) [M\varphi_{1,0}^2(c,b) + N\varphi_{1,1}^2(c,b)] + \lambda\varphi_{0,1}^1(a,c) [M\varphi_{0,0}^2(c,b) + N\varphi_{0,1}^2(c,b)] \right\} \\ & + (1+EF) \left\{ -\mu\varphi_{1,0}^1(a,c) [M\varphi_{1,0}^2(c,b) + N\varphi_{1,1}^2(c,b)] + \lambda\varphi_{1,1}^1(a,c) [M\varphi_{0,0}^2(c,b) + N\varphi_{0,1}^2(c,b)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A19})$$

由边值问题(1)的解的唯一性知:  $\Delta \neq 0$ 。

利用 Cramer 法则, 得

$$A_1 = \frac{D}{\Delta} \left\{ \mu K_{\nu_1}(\sqrt{ic}) [M\varphi_{1,0}^2(c,b) + N\varphi_{1,1}^2(c,b)] - \lambda \left[ \frac{\nu_1}{c} K_{\nu_1}(\sqrt{ic}) - \sqrt{i} K_{\nu_1+1}(\sqrt{ic}) \right] \cdot [M\varphi_{0,0}^2(c,b) + N\varphi_{0,1}^2(c,b)] \right\} \quad (\text{A20})$$

$$B_1 = -\frac{D}{\Delta} \left\{ \mu I_{\nu_1}(\sqrt{ic}) [M\varphi_{1,0}^2(c,b) + N\varphi_{1,1}^2(c,b)] - \lambda \left[ \frac{\nu_1}{c} I_{\nu_1}(\sqrt{ic}) + \sqrt{i} I_{\nu_1+1}(\sqrt{ic}) \right] \cdot [M\varphi_{0,0}^2(c,b) + N\varphi_{0,1}^2(c,b)] \right\} \quad (\text{A21})$$

$$A_2 = -\frac{D}{\Delta} \left\{ MK_{\nu_2}(\sqrt{ib}) + N \left[ \frac{\nu_2}{b} K_{\nu_2}(\sqrt{ib}) - \sqrt{i} K_{\nu_2+1}(\sqrt{ib}) \right] \right\} \cdot \varphi_{0,1}^1(c,c) \quad (\text{A22})$$

$$B_2 = \frac{D}{\Delta} \left\{ MI_{\nu_2}(\sqrt{ib}) + N \left[ \frac{\nu_2}{b} I_{\nu_2}(\sqrt{ib}) + \sqrt{i} I_{\nu_2+1}(\sqrt{ib}) \right] \right\} \cdot \varphi_{0,1}^1(c,c) \quad (\text{A23})$$

将(A20)~(A23)式代入(A13)式中, 并利用右、左区相似核函数定义式(A11)、(A12)式, 即可得到边值问题(1)的左、右区间解分别为(A9)、(A10)。