

The Second Minimal Skew Energy of Oriented Bicyclic Digraphs

Yubo Gao, Chengfu Ye

Department of Mathematics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai
Email: 610506630@qq.com

Received: Mar. 19th, 2015; accepted: Apr. 2nd, 2015; published: Apr. 8th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The energy of a graph has closed links to chemistry, since an important quantum-chemical characteristic of a conjugated molecule is its total π -electron energy. In this paper, we compared the characteristic polynomial coefficients of oriented bicyclic graphs and gave the skew energy's partial relation of oriented bicyclic graphs, and thus we got the second minimal skew energy of oriented bicyclic graphs.

Keywords

Oriented Bicyclic Graphs, Skew Adjacency Matrix, Skew Energy

有向双圈图的第二小斜能量

高育博, 冶成福

青海师范大学数学系, 青海 西宁
Email: 610506630@qq.com

收稿日期: 2015年3月19日; 录用日期: 2015年4月2日; 发布日期: 2015年4月8日

摘要

斜能量在化学能量方面具有广泛的应用, 由于共轭分子的量子化学的一个重要特性是它的 π -电子能量。

在本篇文献中,我们通过比较有向双圈图的斜特征多项式的系数,给出有向双圈图的斜能量的偏序关系,从而得到有向双圈图的第二小斜能量。

关键词

有向双圈图,斜邻接矩阵,斜能量

1. 预备知识

设 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ 是 \vec{G} 所有特征值的集合,则它们也称为有向图 \vec{G} 的特征值。因为 \vec{G} 是斜对称矩阵,所以它的特征值都是实数。定义有向图的斜能量等于这个图的所有特征值的绝对值之和,记为 $\varepsilon_s(\vec{G})$, 则有 $\varepsilon_s(\vec{G}) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|$ 。根据斜能量积分公式,对于两个 n 阶定向图我们有: $\vec{G}_1 \prec \vec{G}_2 \Rightarrow \varepsilon_s(\vec{G}_1) < \varepsilon_s(\vec{G}_2)$ 。

为方便起见,我们定义 G^+ (或 G^-) 为单圈图中的圈定向为+ (或-), 以及 G^* 为单圈图中的圈定向为任意定向*。如果 $t \leq 1$, 我们定义 $G^{a,b}$ 为双圈图中的圈 C_x 定向是 a 和双圈图中的圈 C_y 定向是 b , 其中 $a, b \in \{+, -, *\}$ 。如果 $t \geq 2$, 定义 $G^{a,b,c}$ 为双圈图中的圈 C_x 定向是 a , 双圈图中的圈 C_y 定向是 b , 和双圈图中的圈 C_z 定向是 c , 其中 $a, b, c \in \{+, -, *\}$ 。

根据文献[1]对于一个有向图,我们只需要考虑偶圈的定向。为方面定义,我们采用文献[2]图的记号。为了给出证明,我们给出一些注记: 图 $S_n^{3,3}$, $S_n^{4,4}$, 及它们的定向如图1。令 C_x , C_y 是双圈图 G 中具有 $t (t \geq 0)$ 个公共点的两个圈。如果 $t \leq 1$, 则 G 包含两个圈; 若 $t \geq 2$, 则 G 包含三个圈。第三个圈我们记为 G_z , 其中 $z = x + y - 2t + 2$ 。不失一般性,假定 $x \leq y \leq z$ 。

引理 1 [3] 令 G 是一个无向图, \vec{G} 是图 G 的一个定向, 则 $b_i = \sum_{L \in \mathcal{L}_i} (-2)^{p_e(L)} (-2)^{p_o(L)}$ 。其中 $p_e(L)$, $p_o(L)$ 分别为有向图 \vec{G} 线性子图 L 偶向圈的个数, 奇向圈的个数。

引理 2 [4] 令 \vec{G} 是一个具有 n 个顶点 m 条弧的有向图。若 $\phi(\vec{G}, \lambda) = \sum_{i=0}^n (-1)^i a_i(\vec{G}) \lambda^{n-i}$ 。

则 $a_0(\vec{G}) = 1$, $a_2(\vec{G}) = m$ 且 $a_4(\vec{G}) \geq m(\vec{G}, 2) - 2q(\vec{G})$ 等号成立当且仅当所有的有向四边形为偶定向, 其中 $q(\vec{G})$ 为 \vec{G} 中四边形的个数。

引理 3 [5] 令 $e = uv$ 是图 G 的一条边, 并且图 G 不包含偶圈, 则我们有

$$P_s(\vec{G}; x) = P_s(\vec{G} - e; x) + P_s(\vec{G} - u - v; x). \quad (2.1)$$

通过等同于多项式(2.1)的系数, 我们有

$$b_{2k}(\vec{G}) = b_{2k}(\vec{G} - e) + b_{2k-2}(\vec{G} - u - v). \quad (2.2)$$

此外, 如果 $e = uv$ 是图 G 的一条悬挂边, 则

$$b_{2k}(\vec{G}) = b_{2k}(\vec{G} - v) + b_{2k-2}(\vec{G} - u - v). \quad (2.3)$$

对于一个不包含偶圈图 G (特别地, 一棵树或单圈非二部图)任意定向, 根据引理 1 我们有 $b_{2k}(\vec{G}) = m(\vec{G}, k)$ 。

引理 4 [2] 对于一个图 G 的 k 匹配数目, 我们有以下结论: 令 $e = uv$ 是图 G 的一条边, 则 $m(G, k) = m(G - e, k) + m(G - u - v, k - 1)$ 。

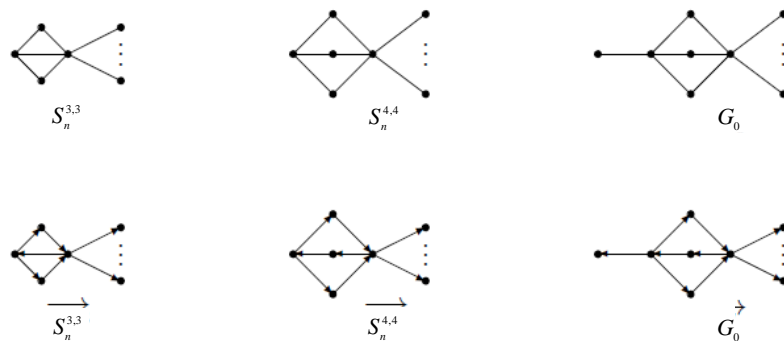


Figure 1. Minimal skew energy of oriented bicyclic graphs

图 1. 有向双圈图最小斜能量

2. 主要结论

定理 1. $\vec{G}^{*,*}$ 是 $n(n \geq 8)$ 阶双圈图, 基础图 $G^{*,*} \neq S_n^{4,4}, S_n^{3,3}$, 则 $\vec{G} \succ (S_n^{4,4})^{\overline{-,-,-}} \succ (S_n^{3,3})^{*,*,-}$.

证明: 我们通过对 n 进行归纳假设证明. 根据引理 1 我们可得到 $S\left((S_n^{4,4})^{\overline{-,-,-}}\right)$, $S\left(\overline{S_n^3}\right)$, $S\left(\overline{S_n^4}\right)$ 的斜特征多项式分别为: $P_S\left((S_n^{4,4})^{\overline{-,-,-}}\right) = x^{n-4}(x^4 + (n+1)x^2 + 3(n-5))$; $P_S\left(\overline{S_n^3}\right) = x^{n-4}(x^4 + nx^2 + (n-3))$; $P_S\left(\overline{S_n^4}\right) = x^{n-4}(x^4 + nx^2 + 2(n-4))$.

首先我们证明 $b_4(\vec{G}) > 3(n-5)$ 对于 $\vec{G} \neq (S_n^{4,4})^{\overline{-,-,-}}, (S_n^{3,3})^{*,*,-}$. 令 $n = 8$.

情形 1.1. $t \leq 1$.

情形 1.1.1. $x = y = 4$. 我们适当的在某一个 C_4 上选择一条边 $e = uv$ 使得 $G - u - v$ 是连通的. 根据引理 2, 我们有

$$\begin{aligned} b_4(G^{*,*}) &\geq m(G, 2) - 4 \\ &= m(G - e, 2) + m(G - u - v, 1) - 4 \\ &\geq m(G - e, 2) + 6 - 4 \\ &> m(P_7, 2) + 2 \\ &> 9 = b_4\left((S_n^{4,4})^{\overline{-,-,-}}\right), \end{aligned}$$

情形 1.1.2. x 或者 y 等于 4. 不失一般性, 假定 $x = 4$. 我们在 C_y 上选择一条边 $e = uv$ 使得 $G - u - v$ 至少有 4 条边. 根据引理 2, 我们有

$$\begin{aligned} b_4(G^{*,*}) &\geq m(G, 2) - 2 \\ &= m(G - e, 2) + m(G - u - v, 1) - 2 \\ &\geq m(G - e, 2) + 4 - 2 \\ &> m(S_7^4, 2) + 2 \\ &> 9 = b_4\left((S_n^{4,4})^{\overline{-,-,-}}\right), \end{aligned}$$

情形 1.1.3. 不论 x 还是 y 都不等于 4. 则 $x = y = 3$ 或 $x = 3, y = 5$. 我们在任意的一个圈上选择一条边 $e = uv$ 使得 $G - u - v$ 包含至少 4 条边. 根据引理 2. 我们可以得到

$$\begin{aligned}
 b_4(G^{**}) &= m(G, 2) \\
 &= m(G-e, 2) + m(G-u-v, 1) \\
 &\geq m(G-e, 2) + 4 \\
 &= b_4(G-e, 2) + 4 \\
 &> b_4(\overline{S_8^3}) + 4 \\
 &= 9 = b_4\left(\left(S_n^{4,4}\right)^{-\cdot-\cdot-\cdot}\right),
 \end{aligned}$$

情形 1.2. $t \geq 2$ 。

情形 1.2.1. 每一个圈长为 4。则当 $t=3$ 时，在圈外我们有 3 个顶点，令作 v_1, v_2, v_3 。令 v_1 是图 G 的一个悬挂点， u_1 与 v_1 相邻， v_2 是图 $G-v_1$ 的一个悬挂点， u_2 与 v_2 相邻， v_3 是图 $G-v_1-v_2$ 的一个悬挂点， u_3 与 v_3 相邻。根据公式(2.3)，我们有

$$\begin{aligned}
 b_4(G^{**}) &= b_4(G^{**}-v_1) + b_2(G^{**}-u_1-v_1) \\
 &\geq b_4(G^{**}-v_1) + 3 \\
 &\geq b_4(G^{**}-v_1-v_2) + 6 \\
 &\geq b_4(G^{**}-v_1-v_2-v_3) + 9 \\
 &\geq 9 = b_4\left(\left(S_n^{4,4}\right)^{-\cdot-\cdot-\cdot}\right),
 \end{aligned}$$

情形 1.2.2. 图 G 中有两个圈长为 4，记作 C_x, C_y ，则当 $t=2$ 时， $z = x + y - 2t + 2 = 6$ 。我们有两个顶点不属于 G 。类似于情形 1.2.1 的证法，我们可以得到 $b_4(G^{**}) > b_4\left(\left(S_n^{4,4}\right)^{-\cdot-\cdot-\cdot}\right)$ 。

情形 1.2.3. 图 G 中仅有一个圈长为 4，记作 C_x 。如果 $C_y = C_3$ ，则当 $t=2$ 时，我们三个顶点不属于 G 。类似于情形 1.2.1 的证法，我们可以得证 $b_4(G^{**}) > b_4\left(\left(S_n^{4,4}\right)^{-\cdot-\cdot-\cdot}\right)$ 。若 $y \geq 5$ ，我们在圈 C_y 选择一条边 $e = uv$ 使得 $m(G-u-v, 1) \geq 7$ 。类似于情形 1.1.2 的证法，我们可以得到 $b_4(G^{**}) > b_4\left(\left(S_n^{4,4}\right)^{-\cdot-\cdot-\cdot}\right)$ 。

情形 1.2.4. 图 G 中不含圈长为 4 的圈。类似于情形 1.1.3 的证法，当 $n=8$ 时，结论成立。

假定 $n > 8$ ，当 $n_1 < n$ 时，对于任意的 n_1 阶有向双圈图 G_1 有 $\overline{G_1} > \left(S_n^{4,4}\right)^{-\cdot-\cdot-\cdot}$ 。定义 p 为图 G 中悬挂点的数目。

若 $p=0$ ，则 G 不含悬挂点。以下我们分三种情况进行考虑：

情形 2.1. $t=1$ 。令 $e=uv$ 是 C_x 的一条边以及 u 是 C_x 和 C_y 的公共顶点。根据 $m(P_n, 2) = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$ ，以及引理 2 和 4，我们有

$$\begin{aligned}
 b_4(G^{**}) &\geq m(G, 2) - 4 \\
 &= m(G-e, 2) + m(G-u-v, 1) - 4 \\
 &= m(P_n^y, 2) + m(P_{x-2} \cup P_{n-x}, 1) - 4 \\
 &= m(P_n, 2) + m(P_{y-2} \cup P_{n-y}, 1) + n - 8 \\
 &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 4 + n - 8 \\
 &> 3(n-5),
 \end{aligned}$$

由于 $\frac{(n-2)(n-3)}{2} - (n-3) = \frac{(n-3)(n-4)}{2} > 0$ 当 $n > 4$ 时。

情形 2.2. $t \geq 2$ 。令 $e = uv$ 是圈 C_x 的一条边以及 u 是 C_x 和 C_y 的公共顶点。根据引理 2 和引理 4，我们有

$$\begin{aligned} b_4(G^{**}) &\geq m(G, 2) - 6 \\ &= m(G - e, 2) + m(G - u - v, 1) - 6 \\ &= m(P_n^y, 2) + n - 3 - 6 \\ &= m(P_n, 2) + m(P_{y-2} \cup P_{n-y}, 1) + n - 9 \\ &= \frac{(n-2)(n-3)}{2} + n - 4 + n - 9 \\ &> 3(n-5), \end{aligned}$$

由于 $\frac{(n-2)(n-3)}{2} - (n-2) = \frac{(n-2)(n-5)}{2} > 0$ 当 $n > 5$ 时。

情形 2.3. $t = 0$ 。假定圈 C_x , C_y 由一条长为 $a(n-8 \geq a > 0)$ 的路连接。令 $e = uv$ 是圈 C_x 的一条边，其中顶点 u 的度为 3。类似于情形 2.1 的证法，则 $b_4(G^{**}) > 3(n-5)$ 。因此， $b_4(G^{**}) > b_4((S_n^{4,4})^{-,-,-})$ 当 $p = 0$ 时。

当 $p \geq 1$ 时， v 是图 G 的一个悬挂点，以及它对应的悬挂边为 uv 。由于 $G^{**} - u - v$ 至少含有 3 条边，根据公式(2.2)及归纳假设，有

$$\begin{aligned} b_4(G^{**}) &= b_4(G^{**} - v) + b_2(G^{**} - u - v) \\ &> b_4((S_{n-1}^{4,4})^{-,-,-}) + 3 \\ &= 3(n-1-5) + 3 \\ &= 3(n-5) \\ &= b_4((S_n^{4,4})^{-,-,-}), \end{aligned}$$

命题得证。

当 $n = 7$ 时，类似于定理 1 对 $n = 8$ 的讨论， $\bar{G}_0^{-,-,-}$ 为有向双圈图的第二小斜能量。因为 $P_x(\bar{G}_0^{-,-,-}) = x^{n-4}(x^4 + (n+1)x^2 + [4(n-5)-1])$ 则 $b_4((S_n^{4,4})^{-,-,-}) = b_4(\bar{G}_0^{-,-,-}) = 3$ 当 $n = 6$ 时。类似于定理 1 对 $n = 8$ 的讨论，我们可以得到不论 $(S_n^{4,4})^{-,-,-}$ 还是 $\bar{G}_0^{-,-,-}$ 为有向双圈图的最小斜能量当 $n = 6$ 时。

定理 2. 在所有 n 阶有向双圈图中，当 $n \geq 8$ 时， $(S_n^{4,4})^{-,-,-}$ 为有向双圈图第二小斜能量；当 $n = 7$ 时， $\bar{G}_0^{-,-,-}$ 为有向双圈图第二小斜能量；当 $n = 6$ 时，不论 $(S_n^{4,4})^{-,-,-}$ 还是 $\bar{G}_0^{-,-,-}$ 为有向双圈图最小斜能量。

参考文献 (References)

- [1] Adiga, C., Balakrishnan, R. and So, W. (2010) The skew energy of a digraph. *Linear Algebra and Its Applications*, **432**, 1825-1835.
- [2] Shen, X., Hou, Y. and Zhang, C. (2012) Bicyclic digraphs with extremal skew energy. *Electron Journal of Linear Algebra*, **23**, 340-355.
- [3] Hou, Y.P. and Lei, T. (2011) Characteristic polynomials of skew-adjacency matrices of oriented graphs. *Electronic*

Journal of Combinatorics, **18**, R156.

- [4] Gong, S., Li, X. and Xu, G. (2014) On oriented graphs with minimal skew energy. *Electronic Journal of Linear Algebra*, **27**, 692-704.
- [5] Gong, S. and Xu, G. (2012) The characteristic polynomial and the matchings polynomial of a weighted oriented graph. *Linear Algebra and Its Applications*, **436**, 3597-3607.