

# A Study of the Epidemic Model of H7N9 with Media Coverage

Yao Chen, Faguo Sun\*, Xinli Hu, Yan Liu

College of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an Shaanxi  
Email: [\\*sfg12600@126.com](mailto:sfg12600@126.com)

Received: Aug. 2<sup>nd</sup>, 2015; accepted: Aug. 19<sup>th</sup>, 2015; published: Aug. 24<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

An epidemic model of avian influenza (H7N9) with media coverage is established in the article to investigate the impact of media coverage on the spread of infectious diseases, and the basic reproduction number of model is obtained. Then, the stability of the model has been analyzed by using V function, Dulac function and the limit equation theory. We prove that the disease free equilibrium is globally asymptotically stable if  $R_0 \leq 1$ ; the epidemic equilibrium is globally asymptotically stable if  $R_0 > 1$ . In addition, the results imply that media coverage have a great influence to control avian influenza (H7N9).

## Keywords

V Function, Dulac Function, Globally Stability, Avian Influenza Model

---

# 带有媒体报道的H7N9传染病模型的研究

陈 瑶, 孙法国\*, 胡新利, 刘 艳

西安工程大学理学院, 陕西 西安  
Email: [\\*sfg12600@126.com](mailto:sfg12600@126.com)

收稿日期: 2015年8月2日; 录用日期: 2015年8月19日; 发布日期: 2015年8月24日

---

## 摘 要

建立了带有媒体报道的H7N9型禽流感模型, 研究媒体报道对H7N9型禽流感传染病传播的影响, 并得到  
\*通讯作者。

文章引用: 陈瑶, 孙法国, 胡新利, 刘艳. 带有媒体报道的 H7N9 传染病模型的研究[J]. 应用数学进展, 2015, 4(3): 285-291. <http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.43035>

了模型的基本再生数 $R_0$ 。再利用V函数、Dulac函数及极限方程理论等方法对此模型进行了稳定性分析。证明了当 $R_0 \leq 1$ 时,无病平衡点全局渐近稳定;当 $R_0 > 1$ 时,地方病平衡点全局渐近稳定,发现媒体报道对控制H7N9型禽流感有很大的影响。

## 关键词

V函数, Dulac函数, 全局稳定性, 禽流感模型

## 1. 引言

H7N9型禽流感是一种新型禽流感,于2013年3月底在上海和安徽两地率先发现。H7N9型禽流感是全球首次发现的新亚型流感病毒,被该病毒感染均在早期出现发热等症状。H7N9禽流感病毒主要通过人与带病禽畜接触传播,至2013年4月尚未证实此类病毒是否具有人传染人的特性。病例主要分布于北京、上海、江苏、浙江、安徽、山东、河南、台湾、福建、东莞、汕尾等地。截至2015年1月25日,全国已确诊133人,37人死亡,76人痊愈[1]。自从H7N9流感爆发后,公共媒体每天都会对感染者数量、死亡病例数量、感染疾病的症状和预防措施等进行大量的报道。如此一来,将大大减少染病者数量。反之,如果没有媒体的报道,很多易感者会因为不注意、不知情而感染;同时,染病者也会因为低估病情可能不去医院治疗,从而将疾病传染给其他易感者或者使其自身病情加重导致死亡。综上,媒体报道会极大地减小疾病感染率,对传染病的控制有极大影响。

数学模型已经成为分析研究传染病传播与控制的一个重要工具,关于媒体报道对传染病传播的研究也有了一些研究结果[2]-[7]。文献[8]研究了具有饱和治疗的禽流感动力学模型。文献[9]研究了媒体报道对H7N9传播的具体影响。本文在文献[9]的基础上改变了H7N9型禽流感的发生率,继续研究媒体报道对H7N9传播的影响,补充了文献[9]的结论。

## 2. 模型的建立

把人类分为三类,用 $S_h(t), I_h(t)$ 和 $R_h(t)$ 分别表示人类易感者,感染者和恢复者数量,把家禽分为两类:易感者和染病者,分别用 $S_b(t)$ 和 $I_b(t)$ 表示其数量,假设 $m$ 为人类易感者 $S_h(t)$ 数量上限,我们建立带有媒体报道的H7N9禽流感模型:

$$\begin{cases} S'_h(t) = \Lambda_h - \left( \beta_h - \frac{\beta I_h}{m + I_h} \right) S_h I_b - \mu_h S_h \\ I'_h(t) = \left( \beta_h - \frac{\beta I_h}{m + I_h} \right) S_h I_b - \mu_h I_h - \gamma_h I_h - \alpha_h I_h \\ R'_h(t) = \gamma_h I_h - \mu_h R_h \\ S'_b(t) = \Lambda_b - \beta_b S_b I_b - \mu_b S_b \\ I'_b(t) = \beta_b S_b I_b - \mu_b I_b - \alpha_b I_b \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\Lambda_h, \Lambda_b$ 分别是人和家禽的出生率;  $\mu_h, \mu_b$ 分别是人和家禽的自然死亡率;  $\gamma_h$ 是人的恢复率;  $\alpha_h, \alpha_b$ 分别是人和家禽的因病死亡率;  $\beta_h, \beta_b$ 分别是染病禽类传染人类和染病禽类传染家禽的传染率;  $\beta$ 是媒体影响因子,我们假定所有参数是正常数。

由模型(1)前三个方程知

$$(S_h + I_h + R_h)' \leq \Lambda_h - \mu_h (S_h + I_h + R_h)$$

解得

$$S_h(t) + I_h(t) + R_h(t) \leq \frac{\Lambda_h}{\mu_h} + \left( S_h(0) + I_h(0) + R_h(0) - \frac{\Lambda_h}{\mu_h} \right) e^{-\mu_h t}.$$

由模型(1)后两个方程知,

$$(S_b + I_b)' \leq \Lambda_b - \mu_b (S_b + I_b)$$

解得

$$S_b(t) + I_b(t) \leq \frac{\Lambda_b}{\mu_b} + \left( S_b(0) + I_b(0) - \frac{\Lambda_b}{\mu_b} \right) e^{-\mu_b t}$$

故系统(1)所有解均要进入区域

$$D = \left\{ (S_h, I_h, R_h, S_b, I_b) \in \mathbb{R}_+^5 \mid S_h + I_h + R_h \leq \frac{\Lambda_h}{\mu_h}, S_b + I_b \leq \frac{\Lambda_b}{\mu_b} \right\}$$

有下面的引理:

**引理1:** 集合  $D$  是系统(1)的正向不变集。

对系统(1)定义基本再生数  $R_0 = \beta_b \cdot \Lambda_b / \mu_b \cdot 1/(\mu_b + \alpha_b)$ , 其中  $\beta_b$  表示禽流感在家禽中的传染率,  $\Lambda_b / \mu_b$  表示没有患病家禽时的总的家禽数量,  $1/(\mu_b + \alpha_b)$  表示患病家禽的平均染病期。该基本再生数表示当所有家禽都是易感者时, 一个患病家禽在其平均染病期所能传染的所有家禽的数量。

下面将在不变集  $D$  中讨论系统(1)的解的性态。

### 3. 平衡点的存在性

**定理 1:** 当  $R_0 \leq 1$  时, 系统(1)仅有无病平衡点  $E_0(\Lambda_h / \mu_h, 0, 0, \Lambda_b / \mu_b, 0)$ , 当  $R_0 > 1$  时, 系统有无病平衡点  $E_0$  和地方病平衡点  $E_*(S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_b^*, I_b^*)$ 。

**证明:** 系统(1)有无病平衡点  $E_0(\Lambda_h / \mu_h, 0, 0, \Lambda_b / \mu_b, 0)$ 。同时, 我们可以得到

$$S_b^* = \frac{\mu_b + \alpha_b}{\beta_b}, I_b^* = \frac{\mu_b}{\beta_b} (R_0 - 1),$$

$$S_h^* = \frac{\Lambda_h - (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h) I_h^*}{\mu_h},$$

$$R_h^* = \frac{\gamma_h}{\mu_h} I_h^*$$

其中  $I_h^*$  满足

$$\begin{aligned} & [(\beta_h - \beta) I_b^* + \mu_h] (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h) I_h^{*2} \\ & - [(\beta_h - \beta) \Lambda_h I_b^* - (\beta_h I_b^* - \mu_h) m (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)] I_h^* - m \beta_h \Lambda_h I_b^* = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

因为  $\beta_h > \beta$ , 则此方程中二次项系数为正, 且经过点  $(0, -m \beta_h \Lambda_h I_b^*)$ , 由二次曲线的性质知, 方程(2)存在唯一的正解  $I_h^*$ 。

所以, 当  $R_0 > 1$  时, 模型有无病平衡点  $E_0(\Lambda_h / \mu_h, 0, 0, \Lambda_b / \mu_b, 0)$  和地方病平衡点  $E_*(S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_b^*, I_b^*)$ 。

当  $R_0 = 1$  时, 由  $I_b^* = \frac{\mu_b}{\beta_b}(R_0 - 1)$  可得, 此时  $I_b^* = 0$ 。

即,  $R_0 = 1$  不存在地方病平衡点, 仅有无病平衡点。

#### 4. 平衡点的稳定性

**定理 2:** 对于系统(1), 当  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点  $E_0(\Lambda_h/\mu_h, 0, 0, \Lambda_b/\mu_b, 0)$  全局渐近稳定。

**证明:** 系统(1)在无病平衡点的 Jacobian 矩阵为:

$$D|_{E_0} = \begin{pmatrix} -\mu_h & 0 & 0 & 0 & -\frac{\beta_h \Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & -(\mu_h + \gamma_h + \alpha_h) & 0 & 0 & \frac{\beta_h \Lambda_h}{\mu_h} \\ 0 & \gamma_h & -\mu_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_b & -\beta_b \frac{\Lambda_b}{\mu_b} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (\mu_b + \alpha_b)(R_0 - 1) \end{pmatrix}$$

显然, 当  $R_0 \leq 1$  时, Jacobian 矩阵所有特征根都是负值, 无病平衡点局部渐近稳定; 当  $R_0 > 1$  时, Jacobian 矩阵有正实根, 无病平衡点不稳定。

下面证明无病平衡点的全局稳定性。

构造 Liapunov 函数  $V = I_b$ , 则

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1)} &= \beta_b S_b I_b - \mu_b I_b - \alpha_b I_b = (\beta_b S_b - \mu_b - \alpha_b) I_b \\ &= (\mu_b + \alpha_b) \left[ \beta_b \cdot \frac{\Lambda_b}{\mu_b} \cdot \frac{1}{\mu_b + \alpha_b} - 1 \right] I_b = (\mu_b + \alpha_b)(R_0 - 1) I_b \leq 0. \end{aligned}$$

由 Lasalle 不变原理[10]可知: 当  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点  $E_0$  全局渐近稳定。

**定理 3:** 对于系统(1), 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点  $E_* (S_h^*, I_h^*, R_h^*, S_b^*, I_b^*)$  是全局渐近稳定的。

**证明:** 系统(1)的子系统:

$$\begin{cases} S_b'(t) = \Lambda_b - \beta_b S_b I_b - \mu_b S_b \\ I_b'(t) = \beta_b S_b I_b - \mu_b I_b - \alpha_b I_b \end{cases}$$

易知当  $R_0 > 1$  时, 该子系统的地方病平衡点全局渐近稳定。

$$\text{即: } \lim_{t \rightarrow \infty} S_b(t) = \frac{\mu_b + \alpha_b}{\beta_b} = S_b^*, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} I_b(t) = \frac{\mu_b}{\beta_b}(R_0 - 1) = I_b^*。$$

可得系统(1)的极限子系统:

$$\begin{cases} S_h'(t) = \Lambda_h - \left( \beta_h - \frac{\beta I_h}{m + I_h} \right) S_h I_b^* - \mu_h S_h \triangleq H(S_h, I_h) \\ I_h'(t) = \left( \beta_h - \frac{\beta I_h}{m + I_h} \right) S_h I_b^* - \mu_h I_h - \gamma_h I_h - \alpha_h I_h \triangleq G(S_h, I_h) \end{cases} \quad (3)$$

取 Dulac 函数为  $B = m + I_h$ , 有

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial(BH)}{\partial S_h} + \frac{\partial(BG)}{\partial I_h} \\
&= -[(\beta_h - \beta)I_h]I_b^* - m\beta_h I_b^* - \mu_h(m + I_h) + (\beta_h - \beta)S_h I_b^* - (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)(m + 2I_h) \\
&< -[(\beta_h - \beta)I_h]I_b^* - m\beta_h I_b^* - \mu_h(m + I_h) + \beta_h S_h I_b^* - (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)(m + 2I_h) \\
&= -[(\beta_h - \beta)I_h]I_b^* - (m - S_h)\beta_h I_b^* - \mu_h(m + I_h) - (\mu_h + \gamma_h + \alpha_h)(m + 2I_h)
\end{aligned}$$

由于  $m > S_h$ , 因此  $\frac{\partial(BH)}{\partial S_h} + \frac{\partial(BG)}{\partial I_h} < 0$ 。

故系统(3)在其最大不变集上无环, 系统(3)的地方病平衡点只要存在就全局渐近稳定。再由极限系统理论可知, 系统(1)的地方病平衡点全局渐近稳定。

## 5. 数值模拟

接下来, 将通过数值模拟直观显示出媒体报道对该发生率下 H7N9 型禽流感的影响。首先选取参数  $\Lambda_b = 80$ ,  $\Lambda_h = 50$ ,  $\mu_h = 0.02$ ,  $\mu_b = 0.8$ ,  $\gamma_h = 0.06$ ,  $\alpha_h = 0.003$ ,  $\alpha_b = 0.06$ ,  $m = 300000$ ,  $\beta = 0.2$ ,  $\beta_h = 0.00025$ ,  $\beta_b = 0.004$ , 此时  $R_0 = 0.4651 < 1$ , 由定理 2 可知无病平衡点全局渐近稳定。在图 1 中, 选取不同的初始值做数值模拟, 易看出无病平衡点的全局渐近稳定性。

若令  $\Lambda_b = 100$ ,  $\beta_b = 0.0095$ , 其他参数不变, 此时  $R_0 = 1.3808 > 1$ , 由定理 3 知地方病平衡点全局渐近稳定。在图 2 中, 选取不同的初始值做数值模拟, 易发现地方病平衡点的全局渐近稳定性。

最后, 通过在初始条件, 即初始染病人人数不变的情况下, 选取不同的  $\alpha$  值来观察媒体报道对该发生率下禽流感(H7N9)规模的影响。取  $\Lambda_h = 50$ ,  $\Lambda_b = 100$ ,  $\mu_h = 0.02$ ,  $\mu_b = 0.5$ ,  $\gamma_h = 0.06$ ,  $\alpha_h = 0.003$ ,  $\alpha_b = 0.06$ ,  $\beta_h = 0.00025$ ,  $\beta_b = 0.0055$ , 此时  $R_0 = 1.9643 > 1$ , 疾病会持续存在。若分别取  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0.02$ ,  $\alpha = 0.4$ , 进行数值模拟, 从图 3 易发现虽然媒体报道没有影响疾病的动力学性态, 但是随着  $\alpha$  值的增大, 很大程度上减小了最终该发生率下禽流感(H7N9)的患病人数。

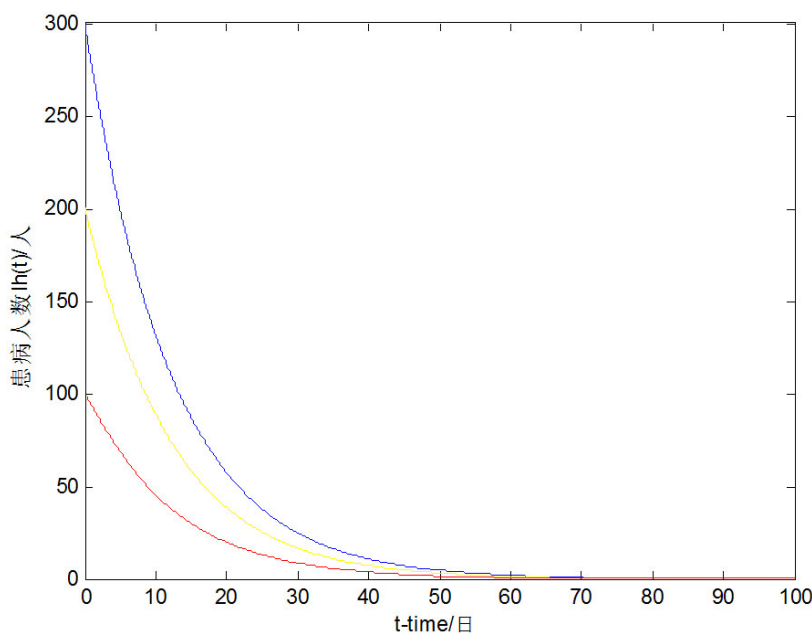
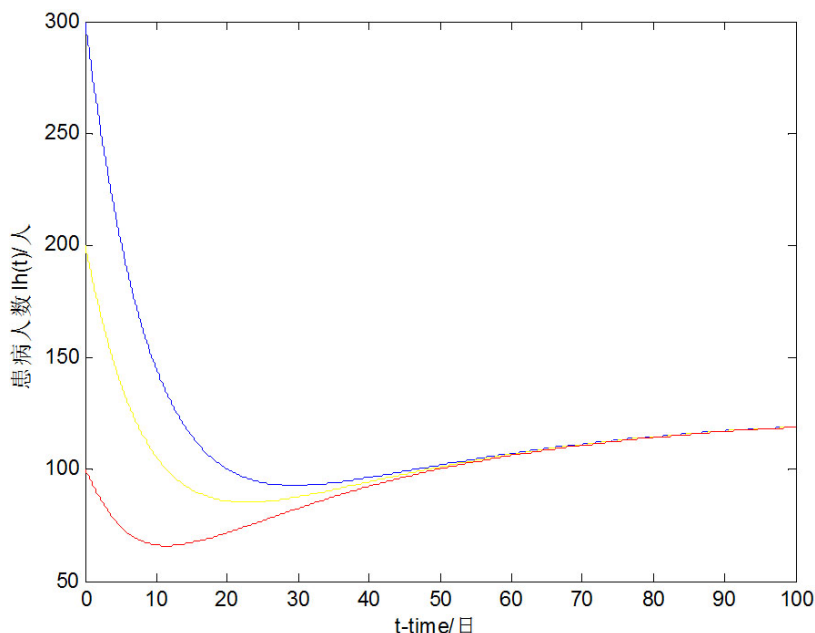
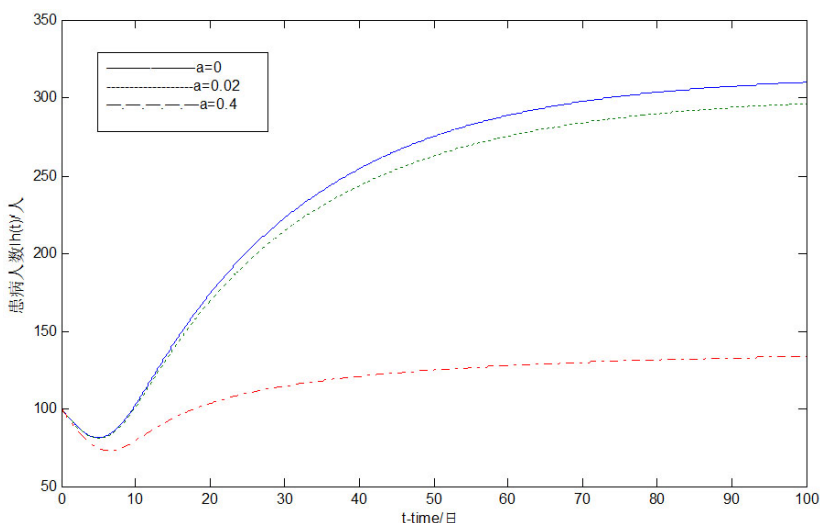


Figure 1. The globally stability of the disease free equilibrium (the solution curve of patient and time)

图 1. 无病平衡点的全局稳定性(患病人数与时间的解曲线)



**Figure 2.** The globally stability of the epidemic equilibrium (the solution curve of patient and time)  
**图 2.** 地方病平衡点的全局稳定性(禽流感(H7N9)患病人数与时间的解曲线)



**Figure 3.** If  $R_0 > 1$ , the relationship between patient and the coefficient of media coverage (the solution curve of the patient in epidemic equilibrium and time)  
**图 3.** 当  $R_0 > 1$  时, 患病人数与媒体报道系数的关系(地方病平衡点患病人数与时间的解曲线)

综上, 当  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点全局渐近稳定, 该发生率下的禽流感(H7N9)将会绝灭; 当  $R_0 > 1$  时, 地方病平衡点全局渐近稳定, 禽流感(H7N9)最终将保持地方性。由于基本再生数  $R_0$  为禽类的传染率  $\beta_b$  和总禽类规模  $\Lambda_b/\mu_b$  以及禽类的平均染病期  $1/(\mu_b + \alpha_b)$  的乘积, 故要想根除该发生率下的禽流感(H7N9)必须设法减小  $R_0$ , 可以通过宰杀来缩短染病期  $1/(\mu_b + \alpha_b)$ , 即增大  $\alpha_b$ , 也可以通过减少孵化等措施减少出生率  $\Lambda_b$ 。并由以上分析可知: 媒体报道对该发生率下的禽流感(H7N9)传播的阈值没有影响, 即就是对基本再生数  $R_0$  没有影响; 但随着  $\alpha$  的增大, 人类的患病规模就会减少。所以当  $R_0 > 1$  时, 媒体报道对控制

该发生率下的禽流感(H7N9)的传播有很大影响。

## 致 谢

感谢孙法国老师和胡新利老师在论文的写作过程中给予我的指导和帮助,在此向帮助和指导过我的各位老师同学表示衷心的感谢!感谢这篇论文所涉及到的各位学者,如果没有各位学者的研究成果的帮助和启发,我将很难完成本篇论文的写作。

由于我的学术水平有限,所写论文难免有不足之处,恳请各位老师和学友批评指正!

## 基金项目

陕西省自然科学基金基础研究计划项目资助(2013JM1002)。

## 参考文献 (References)

- [1] 朱迪国, 宋建德, 黄保续 (2015) 当前全球禽流感流行概况及特点分析. *中国动物检疫*, **3**, 41-47.
- [2] Liu, R.S., Wu, J.H. and Zhu, H.P. (2007) Media/psychological impact on multiple outbreaks of emerging infectious diseases. *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, **8**, 153-164. <http://dx.doi.org/10.1080/17486700701425870>
- [3] Cui, J.A., Sun, Y.H. and Zhu, H.P. (2008) The impact of media on the control of infectious diseases. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **20**, 31-53. <http://dx.doi.org/10.1007/s10884-007-9075-0>
- [4] Li, B., Yuan, S.L. and Zhang, W.G. (2011) Analysis on an epidemic model with a ratio dependent nonlinear incidence rate. *International Journal of Biomathematics*, **4**, 227-239. <http://dx.doi.org/10.1142/S1793524511001374>
- [5] 王晓娜, 刘茂省, 李有文 (2012) 媒体报道对一类具有潜伏期的传染病控制的影响. *数学的实践与认识*, **23**, 173-178.
- [6] 刘玉英, 肖燕妮 (2013) 一类受媒体影响的传染病模型的研究. *应用数学与力学*, **4**, 399-407.
- [7] 邹琴, 高淑京 (2009) 一类具有垂直传染的 SIS 传染病模型的全局分析. *赣南师范学院学报*, **3**, 14-16.
- [8] 郭树敏, 郭丽娜, 李学志 (2010) 具有饱和治疗的禽流感动力学模型的研究. *数学的实践与认识*, **3**, 134-137.
- [9] 胡新利, 杨亚莉, 赵惠文, 郭晨平 (2014) 媒体报道对禽流感(H7N9)传播影响的研究. *西北大学学报(自然科学版)*, **4**, 525-528.
- [10] LaSalle, J.P. (1976) The stability of dynamical systems. SIAM, Philadelphia, 49-78. <http://dx.doi.org/10.1137/1.9781611970432>