

Mathematical Description of the Creative Folding Table's Dynamic Change Process

Ying Wang*, Jiang Qian, Fumou Duan

College of Science, Hohai University, Nanjing Jiangsu
Email: *15951707381@163.com

Received: Jul. 15th, 2015; accepted: Aug. 4th, 2015; published: Aug. 10th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Parametric-related point method model is used to give a mathematical description of the dynamic table folding process. Firstly by analyzing the relationship between the coordinate of the batten on the edge of the table articulated point, the intersection point coordinates of batten and steel and the coordinates of leg edge points and the inclined angle— θ of table articulated point and the x axis, and radius of the table— r , we can conclude the equation of coordinate variables indicated by parameters and observe the change of the corresponding coordinate variables through the change of parameter values. This parametric equation of folding table is used to give a mathematical description for the process of dynamic change. When solving specific problems, we can also directly use the coordinate of the batten on the edge of the table articulated point and the coordinate of the intersection between batten and steel to calculate the coordinate of leg edge points. Using these three function formulas, the folding process is described.

Keywords

Parameterization, The Related Point Method, Cubic Spline Interpolation, Folding Table, Similar Triangles, The Pythagorean Theorem

创意折叠桌的动态变化过程的数学描述

王莹*, 钱江, 段付谋

河海大学理学院, 江苏 南京

*通讯作者。

Email: *15951707381@163.com

收稿日期: 2015年7月15日; 录用日期: 2015年8月4日; 发布日期: 2015年8月10日

摘要

采用参数化 - 相关点法模型对折叠桌的动态变化过程进行数学描述。首先通过分析木条在桌面边缘铰接处的坐标、木条与钢筋的交点坐标以及桌脚边缘点坐标三者与桌面铰接处与 x 轴的夹角 θ 、桌面半径 r 之间的关系, 将各坐标变量用参数表示, 通过参数值的变化观测相应坐标变量的变化, 进而用此参数方程对折叠桌的动态变化过程进行数学描述。而具体解决问题时, 也可以直接利用桌面边缘铰接处的坐标、木条与钢筋的交点的坐标表示出桌脚边缘线上各点的坐标, 根据三者的函数关系式来描述折叠桌的动态变化过程。

关键词

参数化, 相关点法, 三次样条插值, 折叠桌, 相似三角形, 勾股定理

1. 引言

Rising Side Table 来自设计师 Robert van Embricqs 的创意, 与其说这是一款精妙的设计, 还不如说它是一种数学宅的炫耀。简约与时尚已成为当代设计的潮流[1]。相比普通折叠桌, 创意平板桌的美观艺术性, 在折叠的动态变化过程可很好展示, 同时对加工进行参数优化设计, 使它兼具稳定性好、加工方便、用材最少等特点[2] [3]。

然而在创意折叠桌好看的同时, 对于它的加工以及由平板变为折叠桌时的过程描述却是复杂的, 本文对 2014 年全国大学生数学建模竞赛 B 题折叠桌的相关问题进行了研究, 其中主要的研究目的是针对顾客的要求和所给平板的尺寸, 给出求解此折叠桌的加工参数的公式, 进而通过建立不同模型, 并对于桌高 h 采用变步长法取不同桌高, 利用桌子相应位置的坐标变化来描述平板在展为折叠桌时的动态变化过程。

本文在求解模型部分, 以竞赛中的给出的平板尺寸为例, 求出折叠桌相关坐标的数据, 再对这些数据进行三次样条插值进而得到与实际桌脚边缘线基本吻合的三维立体图。因为插值可估算出函数在其他点处的近似值, 以此来填充图像变换时像素之间的空隙。三次样条插值具有良好的收敛性和稳定性, 又有二阶光滑度, 理论上和应用上都有重要意义, 在计算机图形学中有重要应用[4]。

2. 模型建立

2.1. 模型假设

- (1) 不考虑各木条间的缝隙;
- (2) 不考虑加工时的木料磨损;
- (3) 长方形木板刚好加工成整数根木条, 无木料剩余;
- (4) 加工时, 保证桌腿上的滑槽宽度小于桌腿厚度, 同时大于钢筋直径;
- (5) 不考虑由于加工桌子所用的木板的材质以及钢筋的质量问题所导致的折叠桌不稳定的情况。

2.2. 预备知识说明

首先, 建立以桌子背面为 xoy 平面, 垂直桌面向下方向为 z 轴正向的空间直角坐标系, 如图 1, 其中 i 为从 y 轴正向开始数的第 i 根木条。各长度单位均为: cm 。

其次, 设钢筋固定点, 距最外侧桌腿触地端的距离 CE (见图 3) 为最外侧桌腿长度 leg_1 的 k 倍, 即

$$\frac{CE}{AC} = \frac{k}{1-k}, \frac{CE}{AE} = \frac{k}{leg_1}$$

其中 r 是圆形桌面的半径, θ 是桌面边缘铰接点和原点的连线与 x 轴夹角, h 为桌高, d 为桌厚, L 为长方形木板的总长。根据上述图 3, 可知桌腿 i 的长度以及最外侧桌腿与接触面夹角 α 为:

$$leg_i = \frac{L}{2} - r \cos \theta_i \text{ 或 } leg_i = \frac{L}{2} - x_{1i} \tag{1}$$

$$\alpha = \arcsin \frac{h-d}{leg_1} \tag{2}$$

2.3. 参数化模型

由图 2 可知桌面边缘铰接处各点的坐标 (x_{1i}, y_{1i}, z_{1i}) 分别为:

$$\begin{cases} x_{1i} = r \cos \theta_i \\ y_{1i} = r \sin \theta_i \\ z_{1i} = 0 \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ 。

由图 3, 根据折叠桌的高度 h 与最外侧桌腿长度 leg_1 在 $\triangle ADE$ 中的几何关系可求出最外侧的桌腿上钢筋固定点的横坐标和 z 轴坐标, 同时易知其余交点横坐标和 z 轴坐标均等于钢筋在固定点处的坐标, 纵坐标总与对应桌面木条纵坐标相同, 则各木条与钢筋的交点坐标为:

$$\begin{cases} x_{2i} = (1-k) \sqrt{\left(\frac{L}{2} - r \cos \theta_i\right)^2 - (h-d)^2} + r \cos \theta_i \\ y_{2i} = r \sin \theta_i \\ z_{2i} = (1-k)(h-d) \end{cases} \tag{4}$$

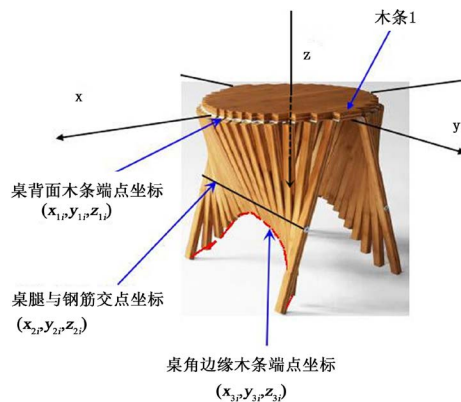


Figure 1. Wood corresponding location coordinate
图 1. 木条相应位置坐标图

而对于各桌脚边缘点的坐标 (x_{3i}, y_{3i}, z_{3i}) ，通过图 3 可以直观判断出 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ，又 $A(x_{1i}, y_{1i}, z_{1i})$ ， $C(x_{2i}, y_{2i}, z_{2i})$ ， $E(x_{3i}, y_{3i}, z_{3i})$ ，则根据相似三角形性质 $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ ，经过化简得各桌脚边缘点的坐标是关于 r 、 θ 、 h 、 d 、 L 的参数方程：

$$\begin{cases} x_{3i} = x_{3i}(r, \theta, h, d, L) \\ y_{3i} = y_{3i}(r, \theta, h, d, L) \\ z_{3i} = z_{3i}(r, \theta, h, d, L) \end{cases}$$

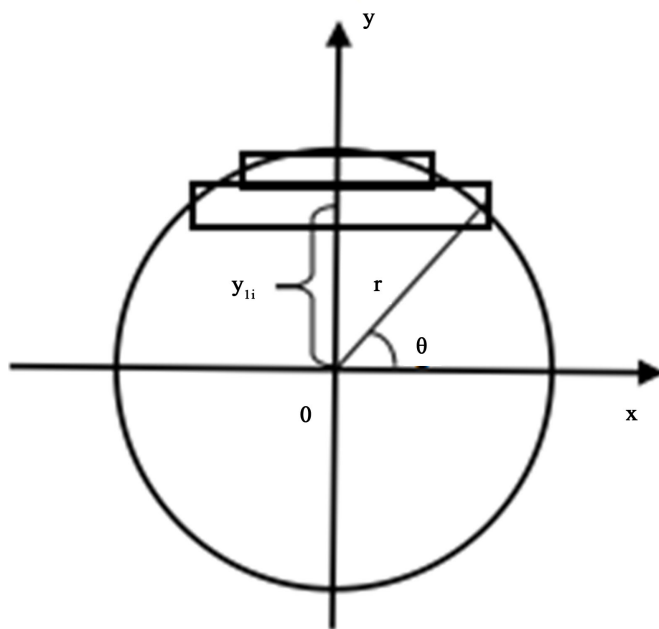


Figure 2. Coordinate diagram

图 2. 坐标关系图

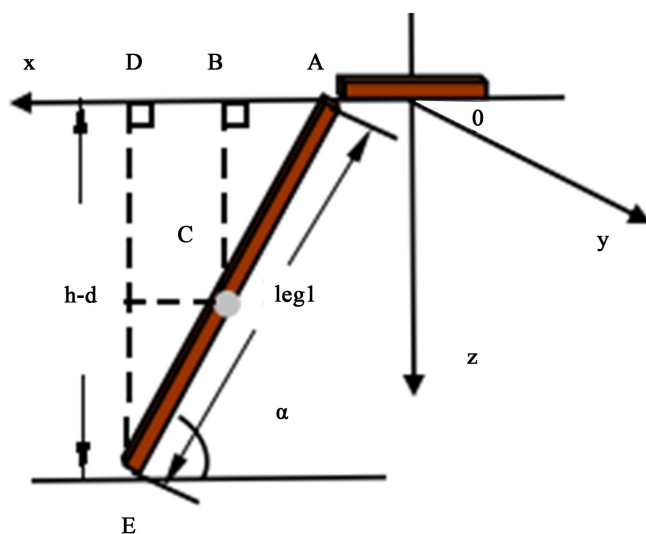


Figure 3. Length scale diagram

图 3. 长度比例关系图

$$\begin{cases} x_{3i} = r \cos \theta_i - \frac{\left(\frac{L}{2} - r \cos \theta_i\right) \left(r(\cos \theta_i - \cos \theta_1) - (1-k) \sqrt{\left(\frac{L}{2} - r \cos \theta_i\right)^2 - (h-d)^2} \right)}{\sqrt{\left(r(\cos \theta_i - \cos \theta_1) - (1-k) \sqrt{\left(\frac{L}{2} - r \cos \theta_i\right)^2 - (h-d)^2} \right)^2 + (1-k)^2 (h-d)^2}} \\ y_{3i} = r \sin \theta_i \\ z_{3i} = \frac{\left(\frac{L}{2} - r \cos \theta_i\right) (1-k)(h-d)}{\sqrt{\left(r(\cos \theta_i - \cos \theta_1) - (1-k) \sqrt{\left(\frac{L}{2} - r \cos \theta_i\right)^2 - (h-d)^2} \right)^2 + (1-k)^2 (h-d)^2}} \end{cases} \quad (5)$$

2.4. 相关点法模型

在解决具体问题时，可以直接利用桌面边缘铰接处的坐标、木条与钢筋的交点的坐标表示出桌脚边缘线上各点的坐标，通过三者的函数关系式来描述折叠桌的动态变化过程。建立与模型一相同的空间直角坐标系，由图 2 中对应桌面木条横坐标、纵坐标与圆形桌面半径 r 之间满足的勾股关系求出桌面边缘铰接处的坐标，求得结果为：

$$\begin{cases} x_{1i} = \sqrt{r^2 - y_{1i}^2} \\ y_{1i} = \frac{(n+1)w}{2} - w \cdot i \\ z_{1i} = 0 \end{cases} \quad (6)$$

其中 n 为木条总数， w 为木条宽度。

又根据折叠桌的高度 h 与最外侧桌腿长度 leg_1 在 $\triangle ADE$ 中的几何关系求得：

$$\begin{cases} x_{2i} = (1-k) \sqrt{\left(\frac{L}{2} - x_{1i}\right)^2 - (h-d)^2} + x_{1i} \\ y_{2i} = y_{1i} \\ z_{2i} = (1-k)(h-d) \end{cases} \quad (7)$$

根据图 3 中相似三角形的性质： $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ 得到每一根木条桌脚边缘线的轨迹方程，即

$$\begin{cases} x_{3i} = x_{1i} - \frac{x_{1i} - x_{2i}}{\sqrt{(x_{1i} - x_{2i})^2 + (z_{1i} - z_{2i})^2}} \cdot leg_i \\ y_{3i} = y_{1i} \\ z_{3i} = z_{1i} - \frac{z_{1i} - z_{2i}}{\sqrt{(x_{1i} - x_{2i})^2 + (z_{1i} - z_{2i})^2}} \cdot leg_i \end{cases} \quad (8)$$

考虑当折叠桌平稳触地时每根木条与钢筋的交点坐标，即是各个木条上滑槽的一个端点，另一端点均位于距离桌腿末端长度为 $k \times leg_1$ 处，这样每根木条的开槽长度就是这两个端点之间的距离，可表示为：

$$S = k \left(\frac{L}{2} - x_{11} \right) - D_{23} \quad (9)$$

其中 $D_{23} = \sqrt{(x_{2i} - x_{3i})^2 + (y_{2i} - y_{3i})^2 + (z_{2i} - z_{3i})^2}$ 。

3. 模型求解

根据顾客要求通过正确地评估并算出相应的合理数据, 带入公式即可求得折叠桌的加工参数和相应位置的坐标。以平板尺寸为 $120 \text{ cm} \times 50 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$, 每根木条宽 2.5 cm , 钢筋固定在最外侧桌腿的中间位置, 折叠后桌面的高度为 53 cm 为例, 表 1 对应木板加工参数和部分坐标信息, 图 4 至图 6 对应不同桌高 h 下, 折叠桌的动态变化过程简化示意图, 图 7 为对已知数据点插值后得到的简化桌脚边缘线三维图。

Table 1. Board design and processing parameter list

表 1. 木板设计加工参数表

木条序号	开槽长度 S	桌脚边缘点坐标(x_3, y_3, z_3)		
1	0	22.78	23.75	-50
2	4.36	17.13	21.25	-46.66
3	7.66	14.38	18.75	-43.41
4	10.37	13	16.25	-40.56
5	12.59	12.35	13.75	-38.18
6	14.39	12.12	11.25	-36.27
7	15.8	12.11	8.75	-34.79
8	16.84	12.19	6.25	-33.72
9	17.53	12.27	3.75	-33.01
10	17.87	12.32	1.25	-32.67
11	17.87	12.32	-1.25	-32.67
12	17.53	12.27	-3.75	-33.01
13	16.84	12.19	-6.25	-33.72
14	15.8	12.11	-8.75	-34.79
15	14.39	12.12	-11.25	-36.27
16	12.59	12.35	-13.75	-38.18
17	10.37	13	-16.25	-40.56
18	7.66	14.38	-18.75	-43.41
19	4.36	17.13	-21.25	-46.66
20	0	22.78	-23.75	-50

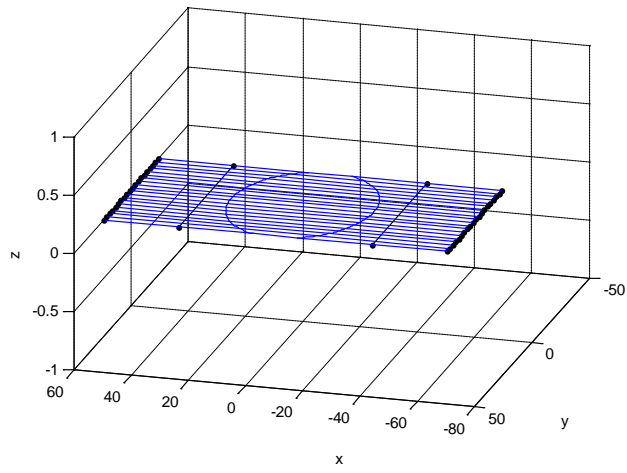


Figure 4. $h = 3$ Simplified model diagram

图 4. $h = 3$ 折叠桌简化模型图

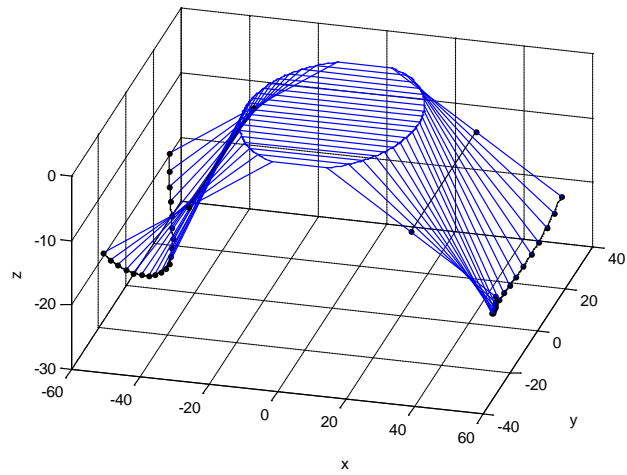


Figure 5. $h = 20$ Simplified model diagram

图 5. $h = 20$ 折叠桌简化模型图

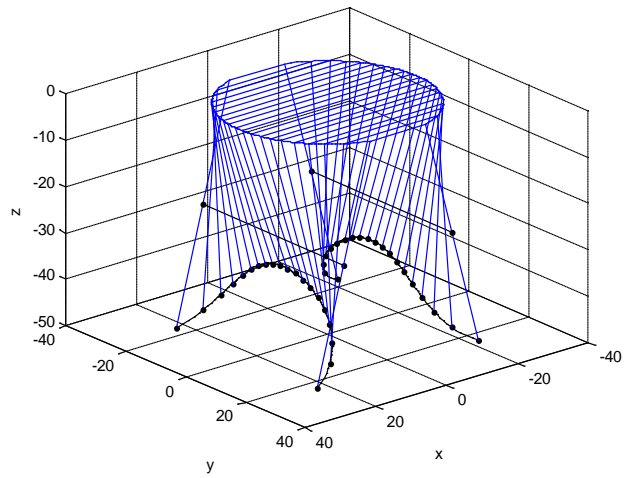


Figure 6. $h = 53$ Simplified model diagram

图 6. $h = 53$ 折叠桌简化模型图

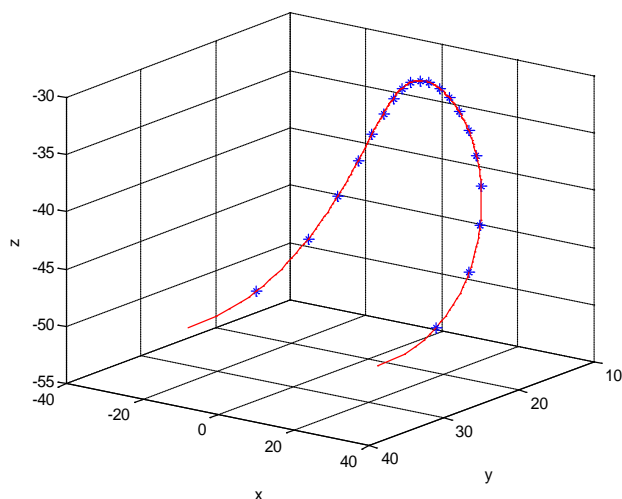


Figure 7. Simplified figure of interpolation table leg edge line
图7. 插值桌脚边缘线简化示意图

4. 结论

根据顾客的要求和所给平板的尺寸, 本文给出了平板的加工参数的求法, 如各个桌腿的长度 leg 、最外侧桌腿与接触面夹角 α 、每条桌腿的开槽长度 S 分别可由关系式(1)、(2)、(9)求得。另外通过对桌高 h 采用变步长法取得不同桌高, 来观察各个坐标点的变化, 进而描绘出对应时刻折叠桌所处的状态。如果采用参数化模型, 折叠桌的动态变化过程可用参数方程(3)、(4)、(5)来描述; 如果采用相关点法模型, 则折叠桌的动态变化过程可由函数关系式(6)、(7)、(8)来描述。

致 谢

感谢审稿人为本论文提出宝贵的意见。

基金项目

河海大学 2014 年小型教改项目(数值分析)。

参考文献 (References)

- [1] 王新业 (2013) 折叠家具: “叠”出品质生活. *销售与市场(管理版)*, **10**, 56-58.
- [2] 韩佳成, Van Embricqs, R. (2012) 平板折叠边桌. *设计*, **8**, 24.
- [3] 郑路通, 郭志鹏 (2014) 创意平板折叠桌的数学模型. *运城学院学报*, **5**, 1-2.
- [4] 李庆扬, 王能超, 易大义 (2008) 数值分析. 第 5 版, 清华大学出版社, 北京.