Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2015, 4(4), 336-342
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44042

Hans汉斯

A Study on Construction for Linear Multi-Step Methods Based on Taylor Expansion

Zhiyuan Huang[1], Zhijun Hu[2], Cheng Wang[3]

[1]Guangzhou University, Guangzhou Guangdong
[2]Guangxi Normal University, Guilin Guangxi
[3]Huizhou University, Huizhou Guangdong
Email: 695393496@qq.com, 56965832@qq.com, 313988842@qq.com

Received: Oct. 30th, 2015; accepted: Nov. 13th, 2015; published: Nov. 18th, 2015

Abstract

Following the previous literature on multi-step formulae for initial value problems of ODEs (ordinary differential equations), we study the construction for linear multi-step methods based on Taylor expansion in this paper. We try the weighted average method and derive a new formula. Then we check this new method in an example, and compare the original two formulae and constructed new formula. Via such numerical experiment, this method is reliable. Some constructed new formulae can have relatively high stability and small error while solving ODEs initial value problems.

Keywords

Initial Value Problems, Linear Multi-Step Methods, Stability, Weighted Average Method

基于泰勒展开的线性多步法构造方法的研究

黄志远[1]，胡志军[2]，王　承[3]

[1]广州大学，广东 广州
[2]广西师范大学，广西 桂林
[3]惠州学院，广东 惠州
Email: 695393496@qq.com, 56965832@qq.com, 313988842@qq.com

文章引用: 黄志远, 胡志军, 王承. 基于泰勒展开的线性多步法构造方法的研究[J]. 应用数学进展, 2015, 4(4): 336-342.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44042

收稿日期：2015年10月30日；录用日期：2015年11月13日；发布日期：2015年11月18日

摘　要

本文在前人对常微分方程初值问题的线性多步法公式研究的基础上，对于线性多步法公式中基于泰勒展开的构造方法进行了探究。我们尝试使用加权平均法构造得出了一个新的公式，随后对此给出了实例进行检验，并对构造生成新公式的原先两个公式和新公式进行了对照分析。经数值实验，该方法具有可行性，某些所得新公式在求解常微分方程初值问题中具有较高稳定性和较小误差。

关键词

初值问题，线性多步法，稳定性，加权平均法

1. 引言

解常微分方程在很多学科领域内都有着重要的应用，自动控制、各种电子学装置的设计、弹道的计算、飞机和导弹飞行的稳定性的研究、化学反应过程稳定性的研究等问题，都可以化为研究常微分解的性质的问题，或者化为求常微分方程的解。但大部分的常微分方程其真解一般难以通过解析的方法来获得，直到现在有许多类型的微分方程还不能给出解的解析表达式，通常只能用数值的方法进行计算。有关这一问题的研究早在十八世纪就已经开始了，现在计算机的发展更是为常微分方程的应用及理论研究提供了有力的工具，从而能使人们认识解的种种性质及其数值特征[1]-[4]。可以说，应用常微分方程理论已经取得了很大的成就，但是，它的现有理论还远远不能满足需要，仍有待于进一步的发展，使这门学科的理论更加完善。

常微分方程的数值算法发展到今天已有了线性多步法、龙格－库塔法和在此基础上发展起来的单支方法、分块方法、循环方法、外推法、混合方法、二阶导数法以及各种常用的预估校正算法。其中比较经常用到的线性多步法公式有 Euler 公式、Heun 公式、中点公式、Milne 公式、Adams 公式、Simpson 公式、Hamming 公式，Gear 方法、Adams 预估－校正法和 Mile 预估-Hamming 校正法公式等[5]-[8]，此外还包含许多至今尚未探明的新公式。

2. 用加权平均方法构造新的线性多步法公式

2.1. 线性多步法的局部截断误差

一般的，假设在第 n 个结点算法精确成立，即 $y_n = f\left(x_n\right)$，则线性多步格式具有以下形式[9]-[12]：

$$y_{n+1} = \sum_{k=0}^{r} \alpha_k y_{n-k} + h \sum_{k=-1}^{r} \beta_k y'_{n-k}, \tag{2.1.1}$$

这里 h 是步长，节点 $x_{n-k} = x_n - kh$，而 $y'_{n-k} = f\left(x_{n-k}, y_{n-k}\right)$。注意到 $y'_{n+1} = f\left(x_{n+1}, y_{n+1}\right)$ 中含有未知的 y_{n+1}，则当 $\beta_{-1} = 0$ 时，格式(2.1.1)是显式的，$\beta_{-1} \neq 0$ 时则是隐式的。

设 $y_{n-k} = y\left(x_{n-k}\right)$，$y'_{n-k} = y'\left(x_{n-k}\right)$，由 Taylor 展开，有

$$y_{n-k} = \sum_{j=0}^{p} \frac{\left(-kh\right)^j}{j!} y_n^{(j)} + \frac{\left(-kh\right)^{p+1}}{\left(p+1\right)!} y_n^{(p+1)} + \cdots,$$

$$y'_{n-k}=\sum_{j=1}^{p}\frac{(-kh)^{j-1}}{(j-1)!}y_n^{(j)}+\frac{(-kh)^{p}}{p!}y_n^{(p+1)}+\cdots.$$

代入式(2.1.1)，整理得

$$\begin{aligned}y_{n+1}=&\left(\sum_{k=0}^{r}\alpha_k\right)y_n+\sum_{j=1}^{p}\frac{h^j}{j!}\left[\sum_{k=1}^{r}(-k)^j\alpha_k+j\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{j-1}\beta_k\right]y_n^{(j)}\\&+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[\sum_{k=1}^{r}(-k)^{p+1}\alpha_k+(p+1)\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{p}\beta_k\right]y_n^{(p+1)}+\cdots,\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

于是，欲使格式(2.1.1)成为 p 阶精度的，即局部截断误差为 $O\left(h^{p+1}\right)$，只要令展开式(2.1.2)与 $y\left(x_{n+1}\right)$ 的泰勒展开式

$$y\left(x_{n+1}\right)=\sum_{j=0}^{p}\frac{h^j}{j!}y_n^{(j)}+\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}y_n^{(p+1)}+\cdots,\tag{2.1.3}$$

能符合到 h^p 项，即要求成立

$$\begin{cases}\sum_{k=0}^{r}\alpha_k=1,\\ \sum_{k=1}^{r}(-k)^j\alpha_k+j\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{j-1}\beta_k=1\left(j=1,2,\cdots,p\right).\end{cases}\tag{2.1.4}$$

如果格式(2.1.1)的系数满足这组条件，则将式(2.1.3)与式(2.1.2)相减，即得局部截断误差

$$y\left(x_{n+1}\right)-y_{n+1}=\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[1-\sum_{k=1}^{r}(-k)^{p+1}\alpha_k-(p+1)\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{p}\beta_k\right]y_n^{(p+1)}+\cdots.\tag{2.1.5}$$

其中 $\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}\left[1-\sum_{k=1}^{r}(-k)^{p+1}\alpha_k-(p+1)\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{p}\beta_k\right]y_n^{(p+1)}$ 称为局部截断误差主项，$\frac{1}{(p+1)!}\left[1-\sum_{k=1}^{r}(-k)^{p+1}\alpha_k-(p+1)\sum_{k=-1}^{r}(-k)^{p}\beta_k\right]$ 称为误差常数。

2.2. 用加权平均方法构造新公式的基本思想

现研究基于泰勒展开的四步显示格式：

$$y_{n+1}=\alpha_0y_n+\alpha_1y_{n-1}+\alpha_2y_{n-2}+h\left(\beta_0y'_n+\beta_1y'_{n-1}+\beta_2y'_{n-2}+\beta_3y'_{n-3}\right),\tag{2.2.1}$$

欲使这类格式成为四阶的，按格式(2.1.4)，其系数应当满足条件

$$\begin{cases}\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2=1,\\-\alpha_1-2\alpha_2+\beta_0+\beta_1+\beta_2+\beta_3=1,\\\alpha_1+4\alpha_2-2\beta_1-4\beta_2-6\beta_3=1,\\-\alpha_1-8\alpha_2+3\beta_1+12\beta_2+27\beta_3=1,\\\alpha_1+16\alpha_2-4\beta_1-32\beta_2-108\beta_3=1.\end{cases}\tag{2.2.2}$$

这里有七个待定系数 α_0，α_1，α_2，β_0，β_1，β_2，β_3，然而它们所要适合的条件只有五个，因此有两个自由度。令 $\alpha_1=0$，$\alpha_2=1$，求解式(2.2.2)得到

$$\alpha_0=0,\ \beta_0=\frac{13}{4},\ \beta_1=-3,\ \beta_2=\frac{15}{4},\ \beta_3=-1.$$

将数据代入式(2.1.5)，解得截断误差为$\frac{51h^5}{40}y_n^{(5)}+O\left(h^6\right)$。代入数据，可得出

$$y_{n+1}=y_{n-2}+h\left(\frac{13}{4}y_n'-3y_{n-1}'+\frac{15}{4}y_{n-2}'-y_{n-3}'\right)+\frac{51h^5}{40}y_n^{(5)}+O\left(h^6\right). \tag{2.2.3}$$

根据文献[4]，可得 Hamming 格式：

$$y_{n+1}=\frac{1}{8}\left(9y_n-y_{n-2}\right)+\frac{3}{8}h\left(y_{n+1}'+2y_n'-y_{n-1}'\right)-\frac{h^5}{40}y_n^{(5)}+O\left(h^6\right), \tag{2.2.4}$$

其局部截断误差为$-\frac{h^5}{40}y_n^{(5)}+O\left(h^6\right)$。

结合基于泰勒展开的四步显示格式(2.2.3)和 Hamming 格式(2.2.4)这两个公式，令θ可取任意实数，做加权平均公式：

$$\begin{aligned}
y_{n+1}&=\theta\left[y_{n-2}+h\left(\frac{13}{4}y_n'-3y_{n-1}'+\frac{15}{4}y_{n-2}'-y_{n-3}'\right)+\frac{51h^5}{40}y_n^{(5)}\right]\\
&\quad+(1-\theta)\left[\frac{1}{8}\left(9y_n-y_{n-2}\right)+\frac{3}{8}h\left(y_{n+1}'+2y_n'-y_{n-1}'\right)-\frac{h^5}{40}y_n^{(5)}\right]+O\left(h^6\right)\\
&=\frac{9}{8}(1-\theta)y_n+\left[\theta-\frac{1}{8}(1-\theta)\right]y_{n-2}+\frac{3}{8}(1-\theta)hy_{n+1}'+\left[\frac{13}{4}\theta+\frac{3}{4}(1-\theta)\right]hy_n'\\
&\quad-\left[3\theta+\frac{3}{8}(1-\theta)\right]hy_{n-1}'+\frac{15}{4}\theta hy_{n-2}'-\theta hy_{n-3}'+\left[\theta\frac{51}{40}-(1-\theta)\frac{1}{40}\right]h^5y_n^{(5)}+O\left(h^6\right).
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

在式(2.2.5)中，取$\theta=\frac{1}{51}$时，则有$\theta\frac{51}{40}-(1-\theta)\frac{1}{40}=0$。此时，可得到一个截断误差为零的新的高一阶公式：

$$\begin{aligned}
y_{n+1}&=\frac{459}{416}y_n-\frac{43}{416}y_{n-2}+\frac{153}{416}hy_{n+1}'+\frac{83}{104}hy_n'-\frac{177}{416}hy_{n-1}'\\
&\quad+\frac{15}{208}hy_{n-2}'-\frac{1}{52}hy_{n-3}'+O\left(h^6\right).
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

该公式为一个隐式公式，对于其中的y_{n+1}'，可选取以下预测-校正系统

预测

$$\overline{y}_{n+1}=y_{n-3}+\frac{4h}{3}\left(2y_n'-y_{n-1}'+2y_{n-2}'\right),\quad \overline{y}_{n+1}'=f\left(x_{n+1},\overline{y}_{n+1}\right), \tag{2.2.7}$$

校正

$$y_{n+1}=\frac{1}{8}\left(9y_n-y_{n-2}\right)+\frac{3}{8}h\left(\overline{y}_{n+1}'+2y_n'-y_{n-1}'\right),\quad y_{n+1}'=f\left(x_{n+1},y_{n+1}\right). \tag{2.2.8}$$

进行求解。

2.3. 数值实验

下面通过求解一个例题，检验公式：

求解初值问题

$$\begin{cases} y'=y-2x/y \quad (0<x<3), \\ y(0)=1. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

(初值问题(2.3.1)有精确解 $y=\sqrt{1+2x}$ 。)

下面我们依次使用基于泰勒展开的四步显示格式(2.2.3)、Milne-Hamming 格式(2.2.7) (2.2.8)和新得到的公式(2.2.6)求解初值问题(2.3.1)，画出它们在区间 $[0,3]$ 的图像，并在同图中画出 $y=\sqrt{1+2x}$ 的图像图 1~3，进而对其误差进行比较，检验新公式的精确度。

其中，$y=\sqrt{1+2x}$ 求出的解为 $y(x_n)$，使用基于泰勒展开的四步显示格式(2.2.3)求出的解为 y_{n1}，使用 Hamming 格式(2.2.4)求出的解为 y_{n2}，使用新得到的公式(2.2.6)求出的解为 y_{n3}。

其图像如下：

将精确值 $y(x_n)$ 与估计值 y_{n1}，y_{n2}，y_{n3} 列在一起制成表格表 1，截取其中开始变化的那部分，结果如下表：

Table 1. Image result data of $y(x_n)$, y_{n1}, y_{n2} and y_{n3}

表 1. $y(x_n)$，y_{n1}，y_{n2} 和 y_{n3} 的图像结果

x_n	$y(x_n)$	y_{n1}	y_{n2}	y_{n3}
2.3	2.366432	2.375243	2.373229	2.373033
2.31	2.370654	2.376292	2.377576	2.377376
2.32	2.374868	2.372462	2.381917	2.381714
2.33	2.379075	2.388074	2.386254	2.386047
2.34	2.383275	2.389802	2.390586	2.390375
2.35	2.387467	2.384688	2.394912	2.394698
2.36	2.391652	2.400788	2.399234	2.399016
2.37	2.39583	2.403332	2.403551	2.403329
2.38	2.4	2.396857	2.407863	2.407637
2.39	2.404163	2.413376	2.412171	2.41194
2.4	2.408319	2.416886	2.416474	2.41624
2.41	2.412468	2.408977	2.420773	2.420534
2.42	2.416609	2.425834	2.425068	2.424824
2.43	2.420744	2.430467	2.429358	2.42911
2.44	2.424871	2.421056	2.433645	2.433392
2.45	2.428992	2.438152	2.437927	2.437669
2.46	2.433105	2.44408	2.442205	2.441943
2.47	2.437212	2.433107	2.446479	2.446213
2.48	2.441311	2.450323	2.45075	2.450478
2.49	2.445404	2.457725	2.455017	2.45474
2.5	2.44949	2.44514	2.45928	2.458999
2.51	2.453569	2.462338	2.46354	2.463253
2.52	2.457641	2.471403	2.467797	2.467505
2.53	2.461707	2.457169	2.47205	2.471752
2.54	2.465766	2.474191	2.4763	2.475997
2.55	2.469818	2.485116	2.480547	2.480238
2.56	2.473863	2.469208	2.484791	2.484477
2.57	2.477902	2.485872	2.489032	2.488712
2.58	2.481935	2.49886	2.493271	2.492945
2.59	2.485961	2.481274	2.497507	2.497174
2.6	2.48998	2.497372	2.50174	2.501401

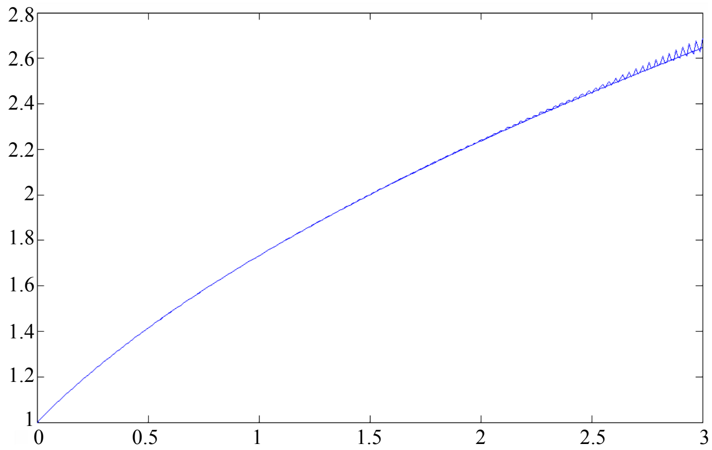

Figure 1. Curve: Image result of $y(x_n)$ and y_{n1}

图 1. $y(x_n)$ 和 y_{n1} 的图像结果曲线

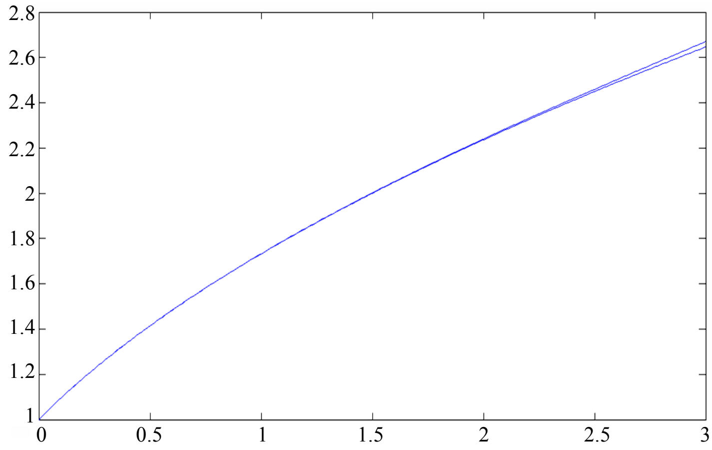

Figure 2. Curve: Image result of $y(x_n)$ and y_{n2}

图 2. $y(x_n)$ 和 y_{n2} 的图像结果曲线

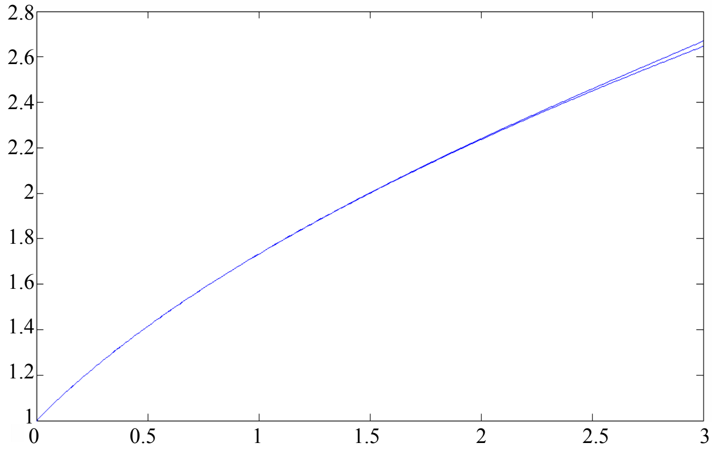

Figure 3. Curve: Image result of $y(x_n)$ and y_{n3}

图 3. $y(x_n)$ 和 y_{n3} 的图像结果曲线

由上表可以发现在对例题方程求解过程中，使用新公式的解的误差小于使用基于泰勒展开的四步显示格式(2.2.3)和使用 Hamming 格式(2.2.4)的解的误差。因此，新公式比基于泰勒展开的四步显示格式(2.2.3)和 Hamming 格式(2.2.4)更为精确。

3. 结论

线性多步法是解决实际中所遇到的常微分方程初值问题的一种重要方法。本文在前人的基础上作了进一步的深入研究，对于线性多步法公式中基于泰勒展开的线性多步法构造法进行了探索，得出了一个新的公式。实验证明利用已有公式，进行加权平均所得的新公式确实可能出现某些具有较好性质，如局部截断误差较小、精确度较高的公式。

基金项目

本工作受国家自然科学基金(项目号：11326096，11401247)，广东省自然科学基金(项目号：2015A030313674)，广东高校优秀青年创新人才培养计划项目(项目号：2013LYM_0089)和惠州学院博士启动项目(项目号：C511.0206)支持。

参考文献 (References)

[1] Atkinson, K.E., 著. 数值分析引论[M]. 匡蛟勋, 译. 上海: 上海科学技术出版社, 1986.
[2] 李庆扬, 关治, 白峰杉. 数值计算原理[M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.
[3] 关治, 陆金甫. 数值分析基础[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
[4] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析[M]. 第 4 版. 武汉: 华中科技大学出版社, 2006.
[5] Henrici, P. (1962) Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations. Wiley, New York.
[6] 李大侃, 编. 常微分方程数值解[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1994.
[7] 李庆扬. 常微分方程数值解法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
[8] 李荣华, 冯果忱. 微分方程的数值解法[M]. 第 3 版. 北京: 高等教育出版社, 1996.
[9] Dahlquist, G. (1963) A Special Stability Problem for Linear Multistep Methods. *BIT*, **3**, 27-43.
[10] Butcher, J.C. (1975) A Stability Property of Implicity Runge-Kutta Methods. *BIT*, **15**, 358-361.
[11] 刘丹. 常微分方程数值解的长时间性态[D]: [硕士论文]. 哈尔滨: 黑龙江大学, 2004.
[12] 吕万金. 一类常微分方程长时间数值计算稳定性分析[J]. 黑龙江大学自然科学学报, 2000, 17(4): 4-6.