

G-Design with Three Groups

Li Zhu, Jian Wang

Nantong Vocational University, Nantong Jiangsu
Email: ntzdwangjian@163.com

Received: Nov. 2nd, 2015; accepted: Nov. 19th, 2015; published: Nov. 26th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

As a special example of the candelabra systems (CQS), G -design is the extension of group divisible designs (GD), which plays an important role in quadruple systems' construction. With application of Stern and Lenz's result on one-factorization of graphs, by direct construction, it is given that the sufficient and necessary condition for the existence of the G -design with three groups $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ is that $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$.

Keywords

t -Designs, Quadruple Systems, Candelabra Systems, G -Design

三个组的G-设计

朱 莉, 王 建

南通职业大学, 江苏 南通
Email: ntzdwangjian@163.com

收稿日期: 2015年11月2日; 录用日期: 2015年11月19日; 发布日期: 2015年11月26日

摘 要

G -设计是可分组设计(GD)的推广, 同时又是烛台型设计(CQS)的特例, 它在四元系设计中起到重要作用。

文章应用Stern和Lenz关于图因子分解的结论, 通过直接构造法, 得到具有三个组的 G -设计 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的充分必要条件: $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 。

关键词

t -设计, 四元系, 烛台型设计, G -设计

1. 引言

设 λ, m, r, k 和 t 是给定的正整数, G -设计(记为 $G_\lambda(m, r, k, t)$)是一个三元组 $(X, \mathcal{A}, \mathcal{B})$, 其中 X 是一个 mr 元点集, \mathcal{A} 构成 X 的一个划分, \mathcal{B} 是 X 的一些子集组成的一个子集族, X 的元素叫点, \mathcal{A} 的元素叫组, \mathcal{B} 的元素叫区组, 满足(1)对任意 $A \in \mathcal{A}$, 都有 $|A| = r$; (2)对任意 $B \in \mathcal{B}$, 都有 $|B| = k$; (3)对任意 $A \in \mathcal{A}$ 与任意 $B \in \mathcal{B}$, 都有 $|A \cap B| < t$; (4)对于 X 中每个 t 元子集 T 与任意 $A \in \mathcal{A}$, 如果 $|A \cap T| < t$, 则 T 恰好包含于 \mathcal{B} 中 λ 个区组。 $\lambda = 1$ 时, $G_\lambda(m, r, k, 2)$ 记为 $G(m, r, k, t)$ 。

当 $t = 2$ 时, G -设计 $G_\lambda(m, r, k, 2)$ 就是大家熟知的可分组设计或 GD 设计(参见[1])。当 $t = 3, k = 4$ 时, G -设计 $G_\lambda(m, r, 4, 3)$ 是柄为0的烛台型四元系 $CQS_\lambda(r^m : 0)$, 而烛台型四元系在四元系中起到相当重要的作用(参见[2])。Mills [3] [4], Hartman [5] [6]研究了 $G_\lambda(m, r, 4, 3)$, 得到了一些结论。当 $m = 2$ 时, 易知 $G_\lambda(2, r, 4, 3)$ 存在的充分必要条件是: $\lambda r \equiv 0 \pmod{2}$ (参见[4])。本文讨论当 $m = 3$ 时, $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 的存在性。我们给出 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的充分必要条件是: $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 。

文中用到的组合设计及图论方面的名词术语均参照著作[1]和[7]。

2. 预备知识

定理 2.1 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的必要条件是: $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 。

证明: $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 中有 $3r$ 个点, 不同的三元点集共有 $r(3r-1)(3r-2)/2$ 个, 其中能出现在区组中的有 $r(3r-1)(3r-2)/2 - r(r-1)(r-2)/2 = r^2(4r-3)$, 而一个区组含有四个三元集, 一个三元集可出现在 λ 个区组中, 所以, $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 中的区组数为 $\lambda r^2(4r-3)/4$, 因而, $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{4}$ 。再设 x 是设计中给定的点, 能和 x 组成三元集的点共有 $(3r-1)(3r-2)/2$ 个, 其中能出现在区组中的有 $(3r-1)(3r-2)/2 - (r-1)(r-2)/2 = r(4r-3)$ 个, 且每个三元集可出现在 λ 个区组中, 而一个区组中能由 x 组成三元集的点有三个, 所以, $\lambda r(4r-3) \equiv 0 \pmod{3}$ 。综上所述, 可得 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的必要条件是 $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 。

上述 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的必要条件可分类等价于以下四种情形

- 1) $r \equiv 0 \pmod{6}$ 且 $\lambda \geq 1$ 或
- 2) $r \equiv 0 \pmod{2}$ 且 $r \equiv 0 \pmod{3}$ 或
- 3) $r \equiv 0 \pmod{3}$ 且 $\lambda \equiv 0 \pmod{4}$ 或
- 4) $r \geq 2$ 且 $r \equiv 0 \pmod{12}$ 。

为证 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的充分性, 我们需要图1-因子分解的有关知识。记 G 是具有 g 个点的图, 其点集为 $\{0, 1, 2, \dots, g-1\}$ 。设 $u < v$, 图 G 的边 $e = \{u, v\}$ 的差定义为 $v-u$ 和 $g-(v-u)$ 中小的一个。我们记图 G 的边 $e = \{u, v\}$ 的差为 $D_g(u, v)$ 或 $D(u, v)$, 也即是

$$D(e) = D(u, v) = \min\{v-u, g-(v-u)\}。$$

对于任何一个子集 $D \subseteq \{1, 2, \dots, \lfloor g/2 \rfloor\}$ ($\lfloor g/2 \rfloor$ 表示不大于 $g/2$ 的最大整数), 我们定义 $G(D, g)$ 是一个图, 其点集为 $\{0, 1, 2, \dots, g-1\}$, 边集为 $\{\{u, v\} \mid D(u, v) \in D\}$, 即包含所有差属于 D 的边。

图 G 的一个子图 H 如果包含了 G 的全部点, 则 H 为 G 的生成子图。如果图 G 的一个生成子图 H 是 1-正则的, 则称 H 是 G 的 1-因子。如果图 G 的边集可表示为它的某些 1-因子的并, 则称 G 存在的 1-因子分解, 或称 G 可 1-因子化。下面的引理来自 Stern 和 Lenz [8], 我们在第 3 节的证明中将会用到, 其中 $\gcd(\{x, y\})$ 表示 x 和 y 的最大公约数。

引理 2.2 (Stern 和 Lenz) 如果 D 包含一个元素 d 使得 $g/\gcd(\{d, g\})$ 是偶数, 则图 $G(D, g)$ 存在 1-因子分解。

3. 主要结论

引理 3.1 如果 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在, 则对于任意正整数 s , $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在。

证明: 将 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 的每个区组重复 s 倍, 即得 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 。

由引理 2.1 结合引理 3.1, 为证主要结论, 我们只需考虑以下四种情形

- 1) $\lambda = 1$ 且 $r \equiv 0 \pmod{6}$;
- 2) $\lambda = 3$ 且 $r \equiv 2, 4 \pmod{6}$;
- 3) $\lambda = 4$ 且 $r \equiv 3 \pmod{6}$;
- 4) $\lambda = 12$ 且 $r \equiv 1, 5 \pmod{6}$ 。

引理 3.2 当 $r \equiv 0 \pmod{6}$ 时, $G(3, r, 4, 3)$ 存在。

证明: 设 $r = 6n$, 记所需设计的点集 $\mathcal{X} = Z_{6n} \times Z_3$, 组 A: $\{(x, i) : x \in Z_{6n}\}$ ($i \in Z_3$)。

区组 B: $\{(x, i), (x-6j-3, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{6n}, i \in Z_3, j \in Z_n, x+y+z \equiv 3(n-j)+i-3 \pmod{6n})$;

$\{(x, i), (y, i), (z, i+1), (w, i+1)\}$

(由引理 2.2, 图 $G(\{1, 2, \dots, 3n\} \setminus \{6j+3 : j \in Z_n\}, 6n)$ 存在 1-因子分解, 记 $\{F_1, F_2, \dots, F_t\}$ 是

$G(\{1, 2, \dots, 3n\} \setminus \{6j+3 : j \in Z_n\}, 6n)$ 的 1-因子分解, $\{x, y\} \in F_k, \{z, w\} \in F_k, 1 \leq k \leq t, i \in Z_3$)。

引理 3.3 当 $r \equiv 3 \pmod{6}$ 时, $G_4(3, r, 4, 3)$ 存在。

证明: 设 $r = 6n+3$, 记所需设计的点集 $\mathcal{X} = Z_{6n+3} \times Z_3$, 组 A: $\{(x, i) : x \in Z_{6n+3}\}$ ($i \in Z_3$)。

区组 B: $\{(x, i), (x-6j-3, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{6n+3}, i \in Z_3, j \in Z_{n-1}, x+y+z \equiv 3(n-j)+i-3 \pmod{6n+3})$ 重复 4 次;

$\{(x, i), (x-6n+3, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{6n+3}, i \in Z_3, x+y+z \equiv i \pmod{6n+3})$ 重复 2 次;

$\{(x, i), (x-1, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{6n+3}, i \in Z_3, x+y+z \equiv 6n-3+2i \pmod{6n+3})$ 重复 2 次;

$\{(x, i), (x-1, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{6n+3}, i \in Z_3, x+y+z \equiv 6n+2i \pmod{6n+3})$ 重复 2 次;

$\{(x, i), (x+6n-3, i), (y, i+1), (y+6n-3, i+1)\}$ ($x, y \in Z_{6n+3}, i \in Z_3$);

$\{(x, i), (x+d, i), (y, i+1), (y+d, i+1)\}$ ($d \in Z_{6n+3} \setminus \{0, \pm 1, \pm(6j+3) : j \in Z_n\}, x, y \in Z_{6n+3}, i \in Z_3$)。

引理 3.4 当 $r \equiv 0 \pmod{2}$ 时, $G_3(3, r, 4, 3)$ 存在。

证明: 设 $r = 2n$, 记所需设计的点集 $\mathcal{X} = Z_{2n} \times Z_3$, 组 A: $\{(x, i) : x \in Z_{2n}\}$ ($i \in Z_3$)。

区组 B: $\{(x, i), (x-n-j, i), (y, i+1), (z, i+2)\} (x, y, z \in Z_{2n}, i \in Z_3, j \in Z_n, x+y+z \equiv j \pmod{2n})$;
 $\{(x, i), (x+d, i), (y, i+1), (y+d, i+1)\} (d \in \{1, 2, \dots, n-1\}, x, y \in Z_{2n}, i \in Z_3)$;
 $\{(x, i), (x+n, i), (y, i+1), (y+n, i+1)\} (x, y \in Z_n, i \in Z_3)$ 。

引理 3.5 当 $r \equiv 1 \pmod{2}$ 时, $G_{12}(3, r, 4, 3)$ 存在。

证明: 设 $r = 2n+1$, 记所需设计的点集 $X = Z_{2n+1} \times Z_3$, 组 A: $\{(x, i) : x \in Z_{2n+1}\} (i \in Z_3)$ 。

区组 B: $\{(x, i), (x-2j-1, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{2n+1}, i \in Z_3, j \in Z_{n-1}, x+y+z \equiv n-j-1 \pmod{2n+1})$ 重复 4 次;

$\{(x, i), (x-1, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{2n+1}, i \in Z_3, j \in Z_2, x+y+z \equiv 2n-1+j \pmod{2n+1})$ 重复 2 次;

$\{(x, i), (x-2, i), (y, i+1), (z, i+2)\}$

$(x, y, z \in Z_{2n+1}, i \in Z_3, x+y+z \equiv 2n-1 \pmod{2n+1})$ 重复 2 次;

$\{(x, i), (x+d, i), (y, i+1), (y+d, i+1)\} (d \in Z_{2n+1} \setminus \{0\}, x, y \in Z_{2n+1}, i \in Z_3)$;

$\{(x, i), (x+d, i), (y, i+1), (y+d, i+1)\} (d \in Z_{2n+1} \setminus \{0, 1, 2n-1, 2j : j \in Z_{n+1}\}, x, y \in Z_{2n+1}, i \in Z_3)$

$\{(x, i), (x+2, i), (y, i+1), (y+2, i+1)\} (x, y \in Z_{2n+1}, i \in Z_3)$

定理 3.6 当 $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 时, $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在。

证明: 由引理 3.2~3.5, 结合引理 3.1, 可得 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的充分条件。

结合引理 2.1 和定理 3.6, 我们得到本文的主要结论。

定理 3.7 $G_\lambda(3, r, 4, 3)$ 存在的充分必要条件是 $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$ 。

基金项目

国家自然科学基金项目(11171248 和 11371207)。

参考文献 (References)

- [1] 沈灏. 组合设计理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2008.
- [2] Mohacsy, H. and Ray-Chaudhuri, D.K. (2002) Candelabra Systems and Designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **106**, 419-448. [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-3758\(02\)00226-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-3758(02)00226-4)
- [3] Mills, W.H. (1981) A Covering of Triples by Quadruples. *Congr. Numer.*, **33**, 253-260.
- [4] Mills, W.H. (1990) On the Existence of H Designs. *Congr. Numer.*, **79**, 129-141.
- [5] Hartman, A. (1980) Tripling Quadruple Systems. *Ars Combinatoria*, **10**, 255-309.
- [6] Hartman, A. (1994) The Fundamental Construction for 3-Designs. *Discrete Mathematics*, **124**, 107-132. [http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X\(92\)00055-V](http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(92)00055-V)
- [7] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Press, London.
- [8] Stern, G. and Lenz, H. (1980) Sterner Triple Systems with Given Subspaces: Another Proof of the Doyen-Wilson Theorem. *Bollettino Unione Matematica Italiana (Ser. A)*, **17**, 109-114.