

Application of Level Set Method in Medical Image Segmentation

Xiu Ma, Haoran Zhang, Hanquan Wang

School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming Yunnan
Email: 724491062@qq.com, wang_hanquan@hotmail.com

Received: Feb. 4th, 2016; accepted: Feb. 23rd, 2016; published: Feb. 26th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Image segmentation is the basic of object detection and resource classification, and it has an important application in the field of medical diagnosis, video monitoring and computer vision. Level set method describes the evolution of geometric active contour in a compact way and provides a stable numerical algorithm. Chan and Vese first introduced the active contour model based simplified Mumford-Shah model, which could well detect the vacuum of object, but could represent only two phases or segments in the image. Vese-Chan variational level set model was proposed by Vese-Chan as the generalization of C-V model, which needed multiple level set functions for n phases image segmentation; it can represent boundaries with complex topologies. In this paper, based on the C-V model and Vese-Chan variational level set model, we show how to do medical image segmentation through one level set function and two-level set functions respectively. We discuss the advantages and disadvantages of both methods. Our numerical results validate our theoretical predication.

Keywords

Vese-Chan Model, Variational Level Set Method, Multiple Image Segmentation

水平集方法在医学图像分割中的一个应用

马 秀, 张浩然, 王汉权

云南财经大学统计与数学学院, 云南 昆明
Email: 724491062@qq.com, wang_hanquan@hotmail.com

摘要

图像分割是目标识别，资源分类等研究的基础。在医学临床诊断，视频监控计算机视觉等多个领域都有重要的应用。水平集方法以一种紧凑的方式来表达集合主动轮廓曲线的演化，并且为之提供稳定的数值计算。Chan和Vese提出的基于简化的Mumford-Shan模型的主动轮廓模型(C-V方法)，能够很的检查出带有空洞的目标的内部区域，但只能处理两相图片的分割。基于C-V模型，Vese Chan推广到实用多个水平集函数来分割多相图像，即Vese-Chan变分多水平模型。该方法有以下优点：可以自动的避免水平集函数覆盖区域的“重叠”和“真空”问题。本文中，我们基于C-V模型以及Vese-Chan变分水平集模型，实现了如何利用单个水平集函数以及两个水平集函数来进行医学图像分割；讨论了这两种方法的优缺点。我们的图像分割数值实验结果验证了理论结果。

关键词

Vese-Chan模型，变分水平集法，多相图像分割

1. 引言

图像分割是计算机图像识别与理解领域非常活跃的一个分支，是图像处理，图像分析等领域最重要的研究领域[1]-[4]。人们在对图像的研究和应用中，往往仅对图像中的某些部分感兴趣，为了识别这些具有特殊性质的区域，需要将它们分离提取出来，在此基础上才有可能对目标进行更深层次的处理。图像分割就是指把图像分成各具有特征的区域并提取出感兴趣目标的技术和过程。一方面，它是目标表达的基础，对特征的测量有重要的影响。另一方面，图像分割及其基于分割的目标表达，特征的测量有重要的影响；另一方面，图像分割及其基于分割的目标表达，特征提取和参数测量可以将原始图像信息转化为更抽象，更紧凑的形式，使得更高层次的图像分析和理解成为可能。因此图像分割是图像分析和图像识别前期处理的一个重要步骤。

近年来，活动轮廓模型在图像分割中得到广泛的研究与应用[5] [6]，该类模型在分割图像是以能量泛函的形式来反映分割区域的位置、大小、形状、等先验知识，确保了曲线在演化过程能够保持连续性和平滑性。

2000年，Chan和Vese提出了梯度无关活动轮廓模型(C-V方法)[7]，该模型具有自动检测内部轮廓、初始曲线位置选择保持鲁棒形、与梯度无关等优点。C-V方法基于简化的Mumford-Shan模型(简称M-S模型)[8] [9]，由于该模型是基于图像区域系的，因此使用与边缘模糊或者是不连续的情况，且对曲线初始位置不敏感。但此方法适用于边缘模糊或者是不连续的情况，且假定图像中仅存在目标和背景两类同质区域。传统的单水平集函数只局限在描述两个相，而描述多相图像分割通常需要用多个水平集函数。多相分割始于1996年Zhao等关于多项运动的研究[10]，该方法用 m 个区域设定 m 个水平集函数，这样可以表达 2^m 相图像，并且可避免水平集函数覆盖区域的“重叠”和“真空(漏盖)”问题[11] [12]。

本文将C-V方法以及Vese-Chan多相水平集法分别应用于多相医学图像的分割，通过对比数值试验结果，显示出多个水平集函数(本文取2个水平集函数)在图像分割中所具有的明显优势。本文主要研究以下几个方面：概述了水平集方法的基本原理及其应用；介绍了简化的C-V模型的基本原理，并且由单水平集函数推广到两个水平集函数，引入了改进的Vese-Chan变分多水平集模型。最后通过一系列的实验，

表明两个水平集函数在处理多相图像时的明显优于单水平函数。本文是按照如下方式安排的。第 2 节主要介绍了水平集方法的基本原理以及 C-V 模型。第 3 节在研究多相图像分割的需求上介绍了 Vese-Chan 变分水平集模型。第 4 节通过一系列的实验, 分别展示了 C-V 模型以及 Vese-Chan 变分水平集法处理图像的结果, 并且对比了图像分割处理结果的优异。第 5 节展望了以后研究重点以及多相分割算法。

2. 水平集算法在图像分割中的应用原理

图像分割问题可以用多种数学方法来描述。我们下面介绍其中一种较为实用的方法(由 Mumford 以及 Shah 1989 年提出)。设一个观察到的电子图像可以用函数 $u_0 = u_0(x, y)$ 来表示, 并且该函数定义的区域是 Ω 。我们并设 $\Omega = \left(\prod_{i=1}^n \Omega_i \right) \cup C$, 这里 C 是区域 Ω 的边界组成的曲线, n 是一个正整数。那么图像分割问题可以表述为下面一个最小值问题: 我们要找到一个光滑函数 $u = u(x, y)$, 使得下面的函数

$$E(u, C) = \int_{\Omega} |u_0 - u|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + \nu |C|$$

达到最小值。这里 $|C|$ 表示曲线 C 的长度, μ, ν 是给定的常数。上述问题还是难于求解, 我们把图像分割问题可以表述为另外一个最小值问题: 我们要找到一个分段单值函数, 也就是, 在 Ω_i 上 u 为常值 c_i , 使得下面的函数

$$E(u, C) = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} |u_0 - c_i|^2 dx dy + \mu \int_{\Omega \setminus C} |\nabla u(x, y)|^2 dx dy + \nu |C| \quad (2.1)$$

达到最小值。在下面 2.1 节讨论的 C-V 模型中 $n = 2$, 它是最简单的一种情形, 此时图像函数的定义区域只分为两个区域; 在下面 2.2 节讨论的 Vese-Chan 变分多水平集模型中我们只考虑了 $n = 4$, 此时假定图像函数的定义区域只分为四个区域。

2.1. C-V 模型

C-V 方法中, 假设图像区域 Ω 上的演化曲线 C 是 Ω 的一个子集 ω 的边界, 即 $C = \partial\omega$ 。设原图像 u_0 被任意闭合主动轮廓线 C 划分为内部区域 ω_1 (用 inside (C) 表示) 和外部区域 ω_2 (用 outside (C) 表示) 两个同质区域, 则能量泛函可写成:

$$\begin{aligned} E(c_1, c_2, C) = & \nu \cdot \text{Length}(C) + \mu \cdot \text{Area}(\text{inside}(C)) \\ & + \int_{\text{inside}(C)} |u_0(x, y) - c_1|^2 dx dy \\ & + \int_{\text{outside}(C)} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

其中 $\mu, \nu \geq 0, \lambda_1, \lambda_2 > 0$ 为各个能量项权重参数, 一般取 $\mu = 0$ 。 c_1, c_2 是常值, 分别表示曲线 C 内部区域和外部区域的所有像素灰度的平均值。用水平集函数 $\phi = \phi(x, y)$ 来表示闭合轮廓线 C , 即 C 为 $\phi(x, y): R^2 \rightarrow R$ 的零水平集。关于水平集函数的详细介绍, 参见文献[13]。

考虑到 Heaviside 函数和 Dirac 函数的形式为:

$$H(z) = \begin{cases} 1 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\delta(z) = \frac{d}{dz} H(z) \quad (2.4)$$

则能量泛函中的各项可以改写成:

$$Length(\phi=0) = \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x, y))| dx dy = \int_{\Omega} \delta(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| dx dy \quad (2.5)$$

$$Area(\phi \geq 0) = \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy \quad (2.6)$$

$$\int_{inside(C)} |u_0(x, y) - c_1|^2 dx dy = \int_{\Omega_1} |u_0(x, y) - c_1|^2 H(\phi(x, y)) dx dy \quad (2.7)$$

$$\int_{outside(C)} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy = \int_{\Omega_2} |u_0(x, y) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x, y))) dx dy \quad (2.8)$$

从而 Mumford-Shah 模型中的能量泛函(2.2)用水平集函数表示可改写为:

$$\begin{aligned} E(c_1, c_2, \phi) &= \nu \cdot \int_{\Omega} \delta(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| dx dy + \mu \cdot \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_1} |u_0(x, y) - c_1|^2 H(\phi(x, y)) dx dy \\ &\quad + \int_{\Omega_2} |u_0(x, y) - c_2|^2 H(\phi(x, y)) dx dy \end{aligned} \quad (2.9)$$

为求出(2.9)中的能量泛函的最小值时, 我们根据变分法发现函数必须满足方程

$$\nu \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \mu - (u_0(x, y) - c_1)^2 + (u_0(x, y) - c_2)^2 = 0. \quad (2.10)$$

这里函数写成:

$$u(x, y) = c_1 H(\phi(x, y)) + c_2 (1 - H(\phi(x, y))) \quad (2.11)$$

令 ϕ 不变, 最小化能量函数 $E(c_1, c_2, \phi)$, 可得到 c_1, c_2 的表达式:

$$c_1(\phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0(x, y) H(\phi(x, y)) dx dy}{\int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy} \quad (2.12)$$

$$c_2(\phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0(x, y) (1 - H(\phi(x, y))) dx dy}{\int_{\Omega} (1 - H(\phi(x, y))) dx dy} \quad (2.13)$$

其中, c_1 为轮廓内像素的平均灰度值; c_2 为轮廓外像素的平均灰度值。在实际求解时, Heaviside 函数 H 通常用一个函数 H_{ε} 来代替:

$$H_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \right) \quad (2.14)$$

同样的, 对 Dirac 函数也通常用一个函数来代替:

$$\delta_{\varepsilon}(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + z^2} \quad (2.15)$$

因为一般较难直接求解静态的偏微分方程(2.10), 我们转向求出下面动态的偏微分方程的稳态解:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_{\varepsilon}(\phi) \left[\nu \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \mu - (u_0(x, y) - c_1)^2 + (u_0(x, y) - c_2)^2 \right] \\ \phi(0, x, y) = \phi_0(x, y) \end{cases} \quad (2.16)$$

理论可以证明(2.16)的稳态解就是静态的偏微分方程 2-(10)的解。

我们利用通常的有限差分法来离散(2.16), 设空间步长为 h , 时间步长为 Δt , 有如下方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\phi_{i,j}^{n+1} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} = & \delta_\varepsilon(\phi_{i,j}^n) \left[\frac{v}{h^2} \Delta^x \left(\frac{\Delta_+^x \phi_{i,j}^{n+1}}{\sqrt{(\Delta_+^x \phi_{i,j}^n)^2/h^2 + (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n)^2/h^2}} \right) \right. \\
& + \frac{v}{h^2} \Delta^y \left(\frac{\Delta_+^y \phi_{i,j}^{n+1}}{\sqrt{(\Delta_+^y \phi_{i,j}^n)^2/h^2 + (\phi_{i,j+1}^n - \phi_{i,j-1}^n)^2/h^2}} \right) \\
& \left. - \mu - (u_{0,i,j} - c_1(\phi^n))^2 + (u_{0,i,j} - c_2(\phi^n))^2 \right] \quad (2.17)
\end{aligned}$$

这里的 $u_{0,i,j}$ 代表图像函数 $u_0(x, y)$ 的值，在 MATLAB 中很容易得到它。

2.2. 计算步骤

- 1) 初始化：定义初始轮廓曲线 C_0 ，并根据 C_0 计算初始的符号距离函数 ϕ_0 ；
- 2) 根据当前的 ϕ^n ，计算 $c_1(\phi^n)$ 和 $c_2(\phi^n)$ ，以及轮廓线曲率的值 $K(\phi^n)$ ；
- 3) 根据方程(2.17)，求得该点下一时刻的 ϕ 值，并且更新轮廓线 C ；
- 4) 检测迭代是否满足收敛条件，如果收敛，则停止计算，输出最终轮廓线。否则，重复步骤 2)；

2.3. 小结

本节首先介绍了 C-V 模型的基本理论以及数值实现方法。C-V 模型将图像的分割为目标和背景两个部分，所有与目标平均灰度值接近的像素被划入目标中；而与背景平均灰度相接近的像素则被划入背景中。这样便忽略了目标或背景可能存在的内部亮度的变化，而现实中要处理的图像往往存在着复杂的亮度变化，导致分割失败。因此，接下来我们将引入 Vese-Chan 变分多水平集模型，该模型含有 m 个水平集函数，可以用来识别复杂的图像。

3. Vese-Chan 变分多水平集模型

3.1. Vese-Chan 变分多水平模型的提出

Vese -Chan 对 C-V 模型进行了扩展[6]，提出了一种新的基于 M-S 模型的多相图像分割的 Vese-Chan 变分水平集模型。在该模型中，用 m 个水平集函数划分图像为 $n = 2^m$ 个相，水平集函数的个数可以减少为 m 。

对 $m = \log_2 n$ 个水平集函数 ϕ_i ，引入水平集函数向量 $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$ 和 Heaviside 函数向量 $H(\Phi) = (H(\phi_1), H(\phi_2), \dots, H(\phi_m))$ ，则相可以定义成：两像素点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 属于同一相中，当且仅当 $H(\Phi(x_1, y_1)) = H(\Phi(x_2, y_2))$ 。即决定了每一个分割部分或相。一幅图像的 $H(\Phi)$ 有个可能值，在一个区域 Ω 中就可以定义个相。因此，被分成不相交的 n 的部分，每个像素 (x, y) 都只属于其中一部分，从而避免了重叠(overlap)或真空(vacuum)问题。用 I 来表示图像的相， $1 \leq I \leq 2^m = n$ ，设 $c = (c_1, \dots, c_n)$ ，这里 c_I 为第 I 相中的平均值，设为 χ_I 每一相的特征函数，则可以改写能量泛函数为：

$$F_n(c, \Phi) = \sum_{1 \leq I \leq n} \int_{\Omega} (u_0 - c_I)^2 \chi_I dx dy + \sum_{1 \leq i \leq m} v \int_{\Omega} |\nabla H(\phi_i)| \quad (3.1)$$

如图 1 所示[6]，左边的图使用了两个水平集函数 ϕ_1, ϕ_2 实现了 4-相分割，曲线 $\{\phi_1 = 0\}$ 和 $\{\phi_2 = 0\}$ 将整个区域分为 $\{\phi_1 > 0, \phi_2 > 0\}$ ， $\{\phi_1 > 0, \phi_2 < 0\}$ ， $\{\phi_1 < 0, \phi_2 > 0\}$ ， $\{\phi_1 < 0, \phi_2 < 0\}$ 四个子区域。右边的图用三个

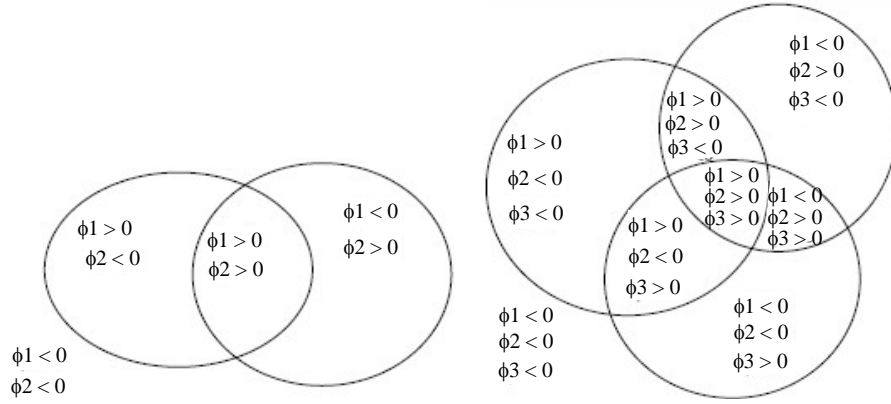


Figure 1. Vese-Chan variational level set region partition principle
图 1. Vese-Chan 变分水平集模型区域划分原理

水平集函数 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 实现了 8-相分割，曲线 $\{\phi_1 = 0\}$ ， $\{\phi_2 = 0\}$ 和 $\{\phi_3 = 0\}$ 将整个区域分为 $\{\phi_1 > 0, \phi_2 > 0, \phi_3 > 0\}$ ， $\{\phi_1 > 0, \phi_2 > 0, \phi_3 < 0\}$ ， $\{\phi_1 > 0, \phi_2 < 0, \phi_3 > 0\}$ ， $\{\phi_1 > 0, \phi_2 < 0, \phi_3 < 0\}$ ， $\{\phi_1 < 0, \phi_2 < 0, \phi_3 > 0\}$ ， $\{\phi_1 < 0, \phi_2 < 0, \phi_3 < 0\}$ ， $\{\phi_1 < 0, \phi_2 > 0, \phi_3 > 0\}$ ， $\{\phi_1 < 0, \phi_2 > 0, \phi_3 < 0\}$ 八个子区域。

这样，Vese-Chan 变分水平集模型的能量泛函用水平集函数表示可写成：

$$\begin{aligned}
 F_4(c, \Phi) = & \int_{\Omega} (u_0 - c_{11})^2 H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u_0 - c_{10})^2 H_{\varepsilon}(\phi_1) (1 - H_{\varepsilon}(\phi_2)) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u_0 - c_{01})^2 (1 - H_{\varepsilon}(\phi_1)) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy \\
 & + \int_{\Omega} (u_0 - c_{00})^2 (1 - H_{\varepsilon}(\phi_1)) (1 - H_{\varepsilon}(\phi_2)) dx dy \\
 & + \nu \int_{\Omega} |\nabla H_{\varepsilon}(\phi_1)| + \nu \int_{\Omega} |\nabla H_{\varepsilon}(\phi_2)|
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

其中 $c = (c_{11}, c_{10}, c_{01}, c_{00})$ 是一个常向量， $\Phi = (\phi_1, \phi_2)$ 。函数 $u(x, y)$ 可以写成：

$$\begin{aligned}
 u = & c_{11} H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) + c_{10} H_{\varepsilon}(\phi_1) (1 - H_{\varepsilon}(\phi_2)) \\
 & + c_{01} (1 - H_{\varepsilon}(\phi_1)) H_{\varepsilon}(\phi_2) + c_{00} (1 - H_{\varepsilon}(\phi_1)) (1 - H_{\varepsilon}(\phi_2))
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

给定初始条件 $\phi_1(0, x, y) = \phi_{1,0}(x, y)$ ， $\phi_2(0, x, y) = \phi_{2,0}(x, y)$ ，于是能量泛函(3.2)的 Euler-Lagrange 方程写成：

$$c_{11}(\Phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0 H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy} \tag{3.4}$$

$$c_{10}(\Phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0 H_{\varepsilon}(\phi_1) (1 - H_{\varepsilon}(\phi_2)) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy} \tag{3.5}$$

$$c_{01}(\Phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0 (1 - H_{\varepsilon}(\phi_1)) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy} \tag{3.6}$$

$$c_{00}(\Phi) = \frac{\int_{\Omega} u_0 (1 - H_{\varepsilon}(\phi_1)) (1 - H_{\varepsilon}(\phi_2)) dx dy}{\int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi_1) H_{\varepsilon}(\phi_2) dx dy} \tag{3.7}$$

为求出(3.2)中的能量泛函的最小值时, 我们根据变分法发现函数 $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)$ 必须满足方程

$$\begin{aligned} \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_1}{|\nabla \phi_1|} \right) - \left[\left((u_0 - c_{11})^2 - (u_0 - c_{01})^2 \right) H(\phi_2) \right. \\ \left. + \left((u_0 - c_{10})^2 - (u_0 - c_{00})^2 \right) (1 - H(\phi_2)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|} \right) - \left[\left((u_0 - c_{11})^2 - (u_0 - c_{10})^2 \right) H(\phi_1) \right. \\ \left. + \left((u_0 - c_{01})^2 - (u_0 - c_{00})^2 \right) (1 - H(\phi_1)) \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

为了求出上面的函数 $\phi_1(x, y), \phi_2(x, y)$, 我们转向求出下面动态的偏微分方程组的稳态解:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi_1) \left\{ \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_1}{|\nabla \phi_1|} \right) - \left[\left((u_0 - c_{11})^2 - (u_0 - c_{01})^2 \right) H(\phi_2) \right. \right. \\ \left. \left. + \left((u_0 - c_{10})^2 - (u_0 - c_{00})^2 \right) (1 - H(\phi_2)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi_2) \left\{ \nu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi_2}{|\nabla \phi_2|} \right) - \left[\left((u_0 - c_{11})^2 - (u_0 - c_{10})^2 \right) H(\phi_1) \right. \right. \\ \left. \left. + \left((u_0 - c_{01})^2 - (u_0 - c_{00})^2 \right) (1 - H(\phi_1)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

理论可以证明偏微分方程组(3.10)以及(3.11)的稳态解就是静态的偏微分方程(3.8)以及(3.9)的解。

3.2. Vese-Chan 变分多水平集模型的数值算法步骤

- 1) 设定初始值 $n = 0$, 初始水平集 $\phi_1(0, x, y) = \phi_{1,0}(x, y)$, $\phi_2(0, x, y) = \phi_{2,0}(x, y)$ 。
- 2) 按照公式(3.4), (3.5), (3.6), (3.7), 计算 $c_{11}^n, c_{10}^n, c_{01}^n, c_{00}^n$; 再计算 $\phi_{1,i,j}^{n+1}, \phi_{2,i,j}^{n+1}$;
- 3) 若达到稳定的状态, 停止迭代; 否则, 转到步骤 2)。

3.3. Vese-Chan 变分多水平集模型的差格式

在 3.2 中步骤(2)计算时, 采用以下有限差分格式来处理, 设

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{1,i+1,j}^n - \phi_{1,i,j}^n}{h} \right)^2 + \left(\frac{\phi_{1,i,j+1}^n - \phi_{1,i,j-1}^n}{2h} \right)^2}} \quad (3.12)$$

$$C_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{1,i,j}^n - \phi_{1,i-1,j}^n}{h} \right)^2 + \left(\frac{\phi_{1,i-1,j+1}^n - \phi_{1,i-1,j-1}^n}{2h} \right)^2}} \quad (3.13)$$

$$C_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{1,i+1,j}^n - \phi_{1,i-1,j}^n}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\phi_{1,i,j+1}^n - \phi_{1,i,j}^n}{h} \right)^2}} \quad (3.14)$$

$$C_4 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{1,i+1,j-1}^n - \phi_{1,i-1,j-1}^n}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{1,i,j}^n - \phi_{1,i,j-1}^n}{h}\right)^2}} \quad (3.15)$$

$$m_1 = \frac{\Delta t}{h^2} \delta_\varepsilon(\phi_{1,i,j}) \nu \quad (3.16)$$

$$C = 1 + m_1(C_1 + C_2 + C_3 + C_4) \quad (3.17)$$

则

$$\begin{aligned} \phi_{1,i,j}^{n+1} = & \frac{1}{C} \left[\phi_{1,i,j}^n + m_1 (C_1 \phi_{1,i+1,j}^n + C_2 \phi_{1,i-1,j}^n + C_3 \phi_{1,i,j+1}^n + C_4 \phi_{1,i,j-1}^n) \right. \\ & + \Delta t \delta_\varepsilon(\phi_{1,i,j}) \left(-(u_{0,i,j} - c_{11}^n)^2 H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n) - (u_{0,i,j} - c_{10}^n)^2 (1 - H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n)) \right. \\ & \left. \left. + (u_{0,i,j} - c_{01}^n)^2 H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n) + (u_{0,i,j} - c_{00}^n)^2 (1 - H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n)) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

相似的, 设

$$D_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{2,i+1,j}^n - \phi_{2,i,j}^n}{h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{2,i,j+1}^n - \phi_{2,i,j-1}^n}{2h}\right)^2}} \quad (3.19)$$

$$D_2 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{2,i,j}^n - \phi_{2,i-1,j}^n}{h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{2,i-1,j+1}^n - \phi_{2,i-1,j-1}^n}{2h}\right)^2}} \quad (3.20)$$

$$D_3 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{2,i+1,j}^n - \phi_{2,i-1,j}^n}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{2,i,j+1}^n - \phi_{2,i,j}^n}{h}\right)^2}} \quad (3.21)$$

$$D_4 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\phi_{2,i+1,j-1}^n - \phi_{2,i-1,j-1}^n}{2h}\right)^2 + \left(\frac{\phi_{2,i,j}^n - \phi_{2,i,j-1}^n}{h}\right)^2}} \quad (3.22)$$

$$m_2 = \frac{\Delta t}{h^2} \delta_\varepsilon(\phi_{2,i,j}) \nu \quad (3.23)$$

$$D = 1 + m_2(D_1 + D_2 + D_3 + D_4) \quad (3.24)$$

对于第二个水平集函数 $\phi_{2,i,j}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} \phi_{2,i,j}^{n+1} = & \frac{1}{D} \left[\phi_{2,i,j}^n + m_2 (D_1 \phi_{2,i+1,j}^n + D_2 \phi_{2,i-1,j}^n + D_3 \phi_{2,i,j+1}^n + D_4 \phi_{2,i,j-1}^n) \right. \\ & + \Delta t \delta_\varepsilon(\phi_{2,i,j}) \left(-(u_{0,i,j} - c_{11}^n)^2 H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n) - (u_{0,i,j} - c_{10}^n)^2 (1 - H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n)) \right. \\ & \left. \left. + (u_{0,i,j} - c_{01}^n)^2 H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n) + (u_{0,i,j} - c_{00}^n)^2 (1 - H_\varepsilon(\phi_{2,i,j}^n)) \right) \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

以上即为 Vese-Chan 变分多水平集模型的数值实现过程。这里我们采用标准的有限差分法，在下一节中，我们即通过数值试验分割的结果来具体的分析两种模型在分割复杂的多相图片，从而对比判别两种模型的优劣。

4. 数值实验结果与分析

4.1. 实验一

文中的实验平台为 IBM Thinkpad T41: Intel Pentium M 1.6GHz, 1GB 内存, 显卡为 ATI 7500。运行环境为 MatLAB7.0。

采用图像 fourblock_gray.bmp, 图像大小为 107×100 , 其中三个分割目标灰度值不同。首先采用传统的 C-V 模型。给定参数如下: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, 面积权系数 $\nu = 0$, 轮廓线长度权系数 $\mu = 0.001 \times 255 \times 255$, 时间步长 $\Delta t = 0.1$, 空间离散步长 $h = 1$, 规整化 Dirac 函数和 Heaviside 函数所用参数 $\varepsilon = 1$ 。为了得到较好的分隔效果, 我们循环 1000 次, 由图 2 分割结果来看, 分割效果很不理想, 在只有一个水平集函数的条件下, 只能识别出两相图像轮廓, 而此次实验图片为四相图片, 只能勾勒出黑色矩形的边框, 效果不大好。

而我们再次采用改进的 Vese-Chan 变分多水平集模型, 参数设计如上, 循环 500 次, 由图 3 可以看到, 该方法非常有效。

4.2. 实验二

采用的是图像 kneel.jpg 四相图片。图 4 为传统的 C-V 模型分割效果, 实验参数: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\nu = 0$, 轮廓线长度权系数 $\mu = 0.001 \times 255 \times 255$, 时间步长 $\Delta t = 0.1$, 空间离散步长 $h = 1$, $\varepsilon = 1$ 。循环次数为 200 次。

观察分割效果, 可以看出 C-V 模型分割出来了膝关节外围的大体轮廓; 但是在膝关节内侧, 以及关节接触点没有被分割识别出来。为此我们采用改进的 Vese-Chan 变分水平集模型。参数同上, 同样循环 200 次, 得到结果图 5 可以看出, 分割效果较好。

可以看出, 内侧的轮廓以及膝关节接触处轮廓都被很好的识别分割出来。

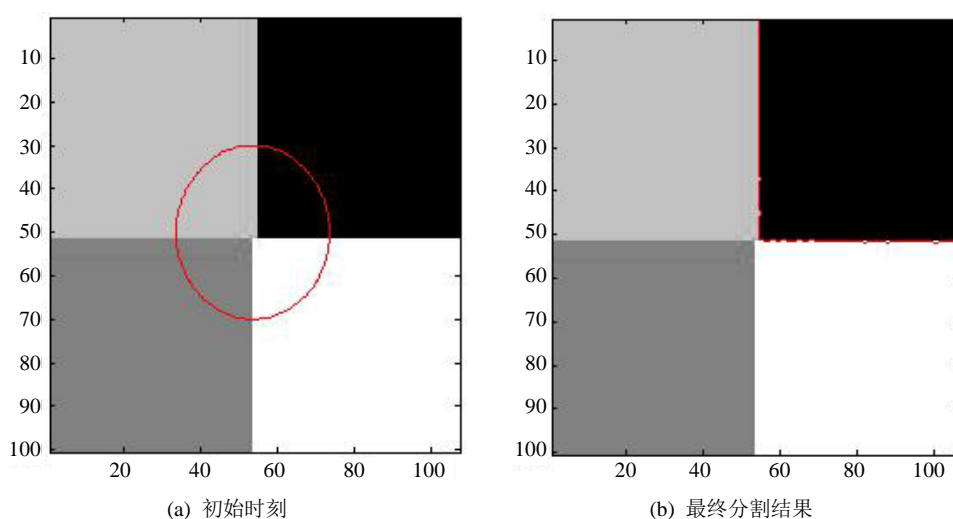


Figure 2. Pictures processing by C-V model

图 2. C-V 模型处理四相图片

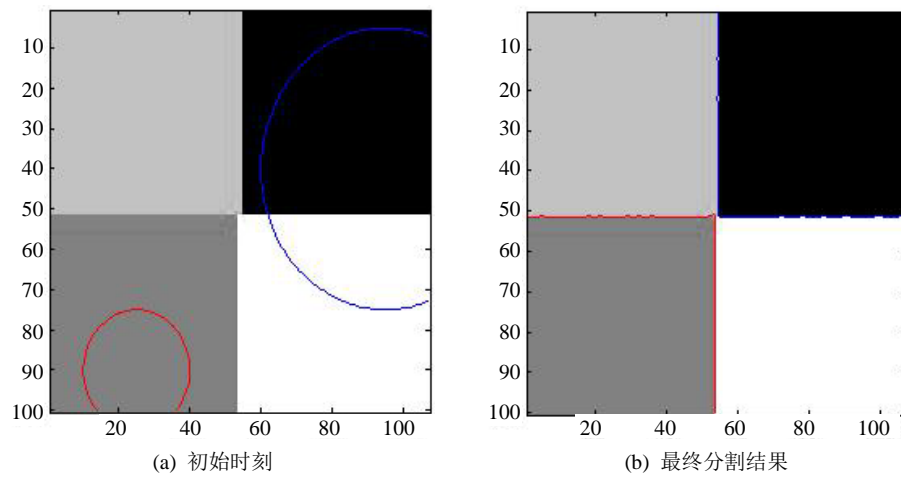


Figure 3. Pictures processing by two level sets model

图 3. 两个水平集模型处理四相图片

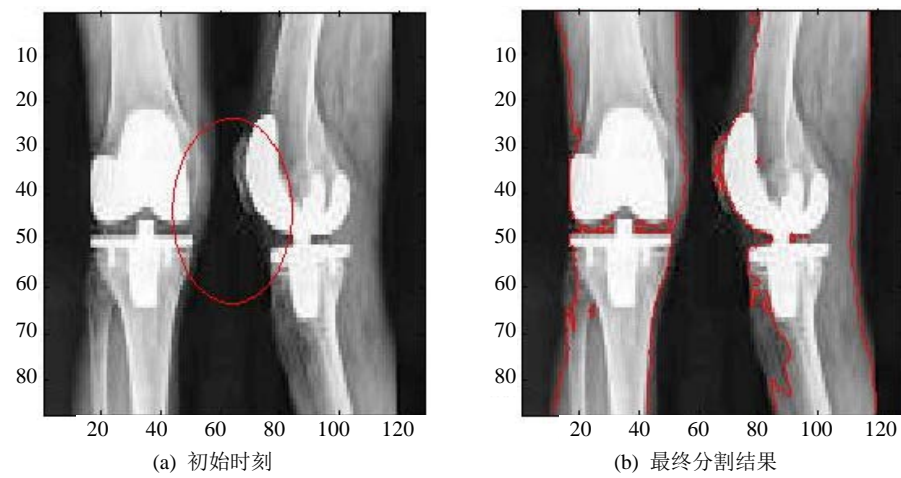


Figure 4. Pictures processing by C-V model

图 4. C-V 模型处理四相图片

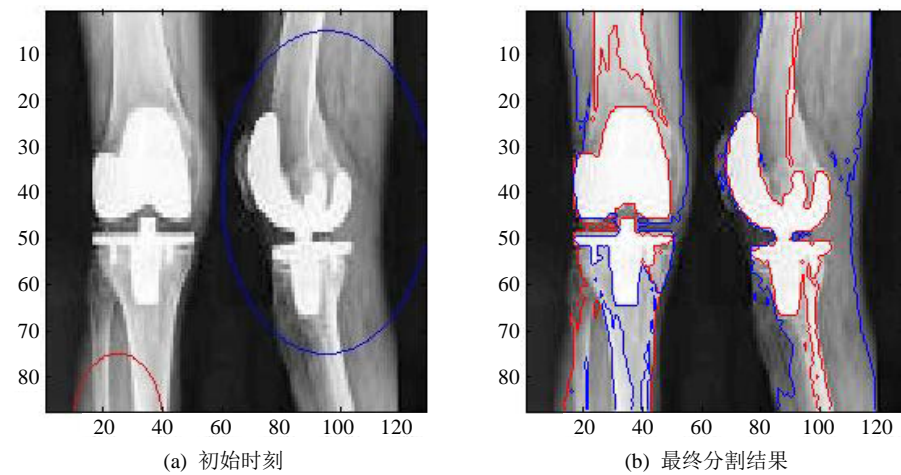


Figure 5. Pictures processing by two level set functions model

图 5. 两个水平集函数模型处理四相图片

5. 总结与展望

本论文针对多相图像分割的变分水平集法及其相关数学模型进行了系统的研究，并以实例说明其优势。得出如下结论：

1) 简单的 C-V 方法只有一个水平集函数，在处理两相图像时，效果是很好的，甚至分割精度比多个水平集函数分割效果要好得多。但是多相(大于 2 相)图像分割中，单个水平集函数只能识别其中的两相，而自动忽略了其他的相。多个水平集函数由于计算量大，在试验中，耗费时间要大一些。

2) 实验参数的选取对于实验的时间以及结果有着决定性的作用。C-V 模型参数的选取中，初始水平集函数为一个圆，当圆心的位置为图像的正中间的那个点时，效果最优。Vese-Chan 多相水平集法的初始水平集函数为两个圆，圆的大小需要依照图像的大小作相应的调整，而且当实验图像格式比较大时，异常耗时。

3) 从 Vese-Chan 多水平集法的表达式可以看出，尽管只是使用两个水平集函数实现四相分割，其表达式的形式已经很复杂，若要实现大于四相的图像分割，单单是推导表达式就相当繁重，因而迫切的需要找出一个通用的表达式，以清晰明了的表达分割。这也将是下一步研究的重点。

致 谢

本文从选题到完成，都是在王汉权老师的指导下完成的。倾注了老师大量的心血，再次致以衷心的感谢与真挚的敬意。同时感谢支持以及给予帮助的同学和朋友们，感恩，谢谢！

基金项目

本文受到云南省科技厅中青年学术带头人后备人才基金、国家自然科学基金(11261065)等资助。

参考文献 (References)

- [1] Koepfler, G., Lopez, C. and Morel, J.M. (1995) A Multiscale Algorithm for Image Segmentation by Variational Method. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **74**, 483-548.
- [2] Bourdin, B. (1999) Image Segmentation with a Finite Element Method. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **33**, 229-244.
- [3] 朱付平, 田捷, 林瑶, 葛行飞. 基于 Level Set 方法的图像分割[J]. 软件学报, 2002, 13(9): 1866-1872.
- [4] 章毓晋. 图像处理和分析[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999.
- [5] Chan, T. and Vese, L. (2000) Image Segmentation Using Level Sets and the Piecewise-Constant Mumford-Shah Model. *UCLA CAM Report 00-14, Submitted to IJCV*.
- [6] Chan, T., Sandberg, B.Y. and Vese, L. (2000) Active Contours without Edges for Vector-Valued Images. *JVCIR*, **11**, 130-141.
- [7] Chan, T. and Vese, L. (2001) Active Contours without Edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, **10**, 266-277. <http://dx.doi.org/10.1109/83.902291>
- [8] Shah, J. (1996) A Common Framework for Curve Evolution, Segmentation and Anisotropic Diffusion. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*.
- [9] Mumford, D. and Shah, J. (1989) Optimal Approximation by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **42**, 577-685. <http://dx.doi.org/10.1002/cpa.3160420503>
- [10] Zhao, H.K., Chan, T., Merriman, B. and Osher, S. (1996) A Variational Level Set Approach to Multiphase Motion. *Journal of Computational Physics*, **127**, 179-195. <http://dx.doi.org/10.1006/jcph.1996.0167>
- [11] Vese, L. (2003) Multiphase Object Detection and Image Segmentation. *Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics*, Springer, 175-194. http://dx.doi.org/10.1007/0-387-21810-6_10
- [12] 石洁, 潘振宽, 魏伟波, 李华, 崔丽娜. 基于变分水平集方法的多相图像分割模型[D]: [硕士学位论文]. 青岛大学信息工程学院硕士论文, 青岛.
- [13] Osher, S. and Fedkiw, J. (2002) *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer-Verlag.