

# Positive Solutions for a Third-Order Three-Point Singular Boundary Value Problem

Hongping Wu

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu  
Email: wu-hp@163.com

Received: Feb. 1<sup>st</sup>, 2016; accepted: Feb. 20<sup>th</sup>, 2016; published: Feb. 23<sup>rd</sup>, 2016

Copyright © 2016 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

This paper is concerned with the following nonlinear third-order three-point boundary value problem

$$\begin{cases} u'''(t) = h(t)f(t, u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(\eta) = 0 \end{cases}$$

where  $\frac{17}{24} < \eta < 1$ , the nonlinear term may be singular at  $t = 0, t = 1$  and  $u = 0$ . By using fixed-point theorem in cone, the existence of one or two or  $n$  positive solutions is obtained with the weaker conditions.

## Keywords

Third-Order Three-Point Boundary Value Problem, Singular, Positive Solutions, Fixed-Point Theorem

---

# 一类奇异三阶三点边值问题正解的存在性

吴红萍

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

Email: wu-hp@163.com

收稿日期: 2016年2月1日; 录用日期: 2016年2月20日; 发布日期: 2016年2月23日

## 摘要

讨论非线性三阶三点边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = h(t)f(t, u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(\eta) = 0 \end{cases}$$

其中  $\frac{17}{24} < \eta < 1$ , 非线性项允许在  $t=0, t=1$  及  $u=0$  处奇异, 利用锥上的不动点定理在较弱的条件下得到了上述边值问题至少存在一个、两个、 $n$ 个正解的存在性结果。

## 关键词

三阶三点边值问题, 奇异, 正解, 不动点定理

## 1. 引言

本文主要研究以下三阶三点奇异边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = h(t)f(t, u(t)), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(\eta) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $\frac{17}{24} < \eta < 1$ , 更一般地,  $f$  允许在  $t=0$  和(或) $t=1$  或  $u=0$  处奇异。

三阶常微分方程起源于应用数学和物理的各种领域, 例如, 带有固定或变化横截面的屈曲梁的挠度、三层梁、电磁波、地球引力吹积的涨潮等[1]。最近常微分方程三点边值问题受到了人民的广泛关注, 详见文献[2]-[7], 特别地, Alex P 等在文[8]首次讨论了问题(1)的正解, 通过对相应 Green 函数的深入讨论, 得到了问题(1)至少有一个正解的存在性结果, 重要的是该结果表明尽管 Green 函数并不完全是正的, 问题的解却是严格正的。文[9]中, 本人讨论了问题(1)两个正解的存在性结果。

受此启发, 本文在更弱的条件下, 继续讨论问题(1)的正解, 利用 Guo-Krasnoselskii 不动点定理, 笔者的工作表明, 只要非线性项  $f(t, u(t))$  在某些有界集连续部分  $g(t, u)$  高度适当的情况下, 问题(1)必定存在一个、两个、 $n$ 个正解。

## 2. 预备与引理

本文我们作如下假设:

(H1)  $h: (0, 1) \rightarrow [0, +\infty)$  连续且满足  $0 < \max_{0 \leq t \leq 1} \int_{\theta}^{1-\theta} G(t, s)h(s)ds \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s)h(s)ds < +\infty$ , 其中  $\theta > 0$

满足  $1 - \eta < \theta < \eta$ 。

(H2)  $f: (0, 1) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  连续。

(H3) 存在两个连续函数  $g, \lambda: (0, 1) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ , 使得  $f(t, u) \leq g(t, u) + \lambda(t, u)$ ,  $(t, u) \in (0, 1) \times [0, +\infty)$ 。

(H4)  $\lambda$  是一个非降函数, 对于任意的  $0 < t < 1$ 。

(H5) 对于任意的  $r > 0$ ,  $\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)\lambda(s,r\theta^*)ds < +\infty$ , 其中  $\theta^* = \frac{\eta - (1-\theta)}{\eta}$ 。

本文的工作空间为 Banach 空间  $C^+[0,1] := \{u \in C[0,1]: u \geq 0\}$ , 其中的范数为  $\|u\| = \max_{0 \leq t \leq 1} |u(t)|$ 。

令  $K_0 = \left\{ u \in C^+[0,1]: u(0) = u(1) = 0, \min_{\theta \leq t \leq \eta} u(t) = \max_{\eta \leq t \leq 1} u(t) = u(\eta) \right\}$ 。

易知  $K_0$  为  $C^+[0,1]$  中的锥。

**引理 1 [8]** 边值问题  $\begin{cases} u'''(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(\eta) = 0 \end{cases}$  的 Green 函数为

$$\text{当 } s \geq \eta \text{ 时, } G(t,s) = \begin{cases} -\frac{t(s-1)^2}{2} & t \leq s \\ \frac{t^2 - (s^2+1)t + s^2}{2} & t \geq s \end{cases}$$

$$\text{当 } s < \eta \text{ 时, } G(t,s) = \begin{cases} \frac{-t^2 + (2s-s^2)t}{2} & t \leq s \\ \frac{s^2(1-t)}{2} & t \geq s \end{cases}$$

经过简单计算, 我们有

$$s \geq \eta \text{ 时, } \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} -\frac{(s-1)^2}{2}, & t \leq s \\ t - \frac{s^2+1}{2}, & t \geq s \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} 0, & t \leq s \\ 1, & t \geq s \end{cases}$$

$$s < \eta \text{ 时, } \frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = \begin{cases} -t + \frac{2s-s^2}{2}, & t \leq s \\ -\frac{s^2}{2}, & t \geq s \end{cases}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}(t,s) = \begin{cases} -1, & t \leq s \\ 0, & t \geq s \end{cases}$$

进一步

当  $s \geq \eta$  时,  $\max_{0 \leq t \leq 1} G(t,s) = 0$ ,

$$\min_{0 \leq t \leq 1} G(t,s) = -\frac{(1-s^2)^2}{8} \geq -\frac{(1-\eta^2)^2}{8} = G\left(\frac{1-\eta^2}{2}, \eta\right) \quad (2)$$

当  $s < \eta$  时,  $\min_{0 \leq t \leq 1} G(t,s) = 0$

$$\max_{0 \leq t \leq 1} G(t,s) = \frac{(2s-s^2)^2}{8} \leq \frac{(2\eta-\eta^2)^2}{8} = G\left(\frac{2\eta-\eta^2}{2}, \eta\right) \quad (3)$$

因此

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \{ |G(t,s)|, t,s \in [0,1] \} \leq \max \left\{ \frac{(1-\eta^2)^2}{8}, \frac{(2\eta-\eta^2)^2}{8} \right\}.$$

**引理 2 [8]** 设  $y:(0,1) \rightarrow [0,+\infty)$  是  $(0,1)$  上的连续可积函数, 满足  $\min_{\theta \leq t \leq \eta} y(t) = \max_{\eta \leq t \leq 1} y(t) = y(\eta)$ , 则边值问题

$$\begin{cases} u'''(t) = y(t), & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = u''(\eta) = 0 \end{cases} \quad (E_y)$$

有唯一非负解  $u(t) = \int_0^1 G(t,s)y(s)ds$ . 且在  $[0,\eta]$  上是凸的, 在  $[\eta,1]$  上是凹的.

**引理 3 [8]** 设  $y$  如同引理 2 所述, 则边值问题  $(E_y)$  的唯一非负解  $u(t) \in K_0$  并且满足  $\min_{t \in [\theta, 1-\theta]} u(t) \geq \theta^* \|u\|$ , 其中  $\theta^* = \frac{\eta - (1-\theta)}{\eta}$  (很显然  $0 < \theta^* < \theta$ ).

定义锥  $K = \{u \in K_0 : \min_{t \in [\theta, 1-\theta]} u(t) \geq \theta^* \|u\|\}$ . 以及算子  $Tu(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f(s,u(s))ds$ .

记  $\Omega_r = \{u \in K : \|u\| < r\}$ ,  $\partial\Omega_r = \{u \in K : \|u\| = r\}$ .

**引理 4** 设  $0 < a < b$ , 则  $T: \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a) \rightarrow K$  全连续.

**证明** 取  $u \in \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a)$ , 则有  $\theta^* a \leq \theta^* \|u\| \leq u(t) \leq \|u\| \leq b, 0 < t < 1$ .

由(H4),  $\lambda(t, u(t)) \leq \lambda(t, \theta^* a), 0 < t < 1$ . 依(H5),  $\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)\lambda(s, \theta^* a)ds < +\infty$ .

令  $\lambda_n(t, \theta^* a) = \min\{\lambda(t, \theta^* a), n\}$ , 则有  $\max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)[\lambda(s, \theta^* a) - \lambda_n(s, \theta^* a)]ds \rightarrow 0$ .

令  $f_n(t, u) = \min\{f(t, u), g(t, u) + \lambda_n(t, \theta^* a)\}$ , 则  $f_n: (0,1) \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  连续.

定义算子  $T_n$  如下:

$$(T_n u)(t) = \int_0^1 G(t,s)h(s)f_n(s,u(s))ds$$

模仿文[3]中引理 3 的证明, 结合  $f_n(t, u)$  的连续性及 Arzela-Ascoli 定理, 容易验证  $T_n: K \rightarrow C[0,1]$  全连续.

$$\begin{aligned} \sup_{u \in \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a)} \|Tu - T_n u\| &= \sup_{u \in \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a)} \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)[f(s,u(s)) - f_n(s,u(s))]ds \\ &\leq \sup_{u \in \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a)} \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)[\lambda(s, \theta^* a) - \lambda_n(s, \theta^* a)]ds \\ &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t,s)h(s)[\lambda(s, \theta^* a) - \lambda_n(s, \theta^* a)]ds \rightarrow 0 \end{aligned}$$

上式表明全连续算子  $T_n$  在集合  $\bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a)$  上一致收敛于  $T$ , 因此  $T: \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a) \rightarrow C[0,1]$  是全连续算子, 进一步  $T: \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a) \rightarrow K$  全连续.

**引理 5 [10]** 设  $E$  是 Banach 空间,  $P \subseteq E$  是  $E$  中的一个锥,  $\Omega_1, \Omega_2$  是  $E$  中的有界开集  $0 \in \Omega_1, \bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$ , 设  $T: P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1) \rightarrow P$  全连续, 如果满足条件:

- 1)  $\|Tu\| \geq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_1, \|Tu\| \leq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_2$ ; 或
- 2)  $\|Tu\| \leq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_1, \|Tu\| \geq \|u\|, u \in P \cap \partial\Omega_2$

那么,  $T$  在  $P \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$  中必有不动点.

### 3. 主要结果

引入以下两个“高度”函数:

$$\phi(r) = \max \{g(t, u) : 0 \leq t \leq 1, \theta^* r \leq u \leq r\}; \quad \varphi(r) = \min \{f(t, u) : \theta \leq t \leq 1 - \theta, \theta^* r \leq u \leq r\}.$$

另记  $I(r) = \max_{0 \leq s \leq 1} \int_0^1 |G(t, s)| h(s) \lambda(s, \theta^* r) ds$ ;

$$A = \left[ \int_0^1 \max_{0 \leq s \leq 1} |G(t, s)| h(s) ds \right]^{-1}, \quad B = \left[ \int_\theta^{1-\theta} \min_{0 \leq s \leq 1} |G(t, s)| h(s) ds \right]^{-1}.$$

**定理 1** 假设存在两个正数  $0 < a < b$ , 使得以下条件成立其一:

(A1)  $\phi(a) \leq (a - I(a))A, \varphi(b) \geq bB$ ;

(A2)  $\varphi(a) \geq aB, \phi(b) \leq (b - I(b))A$ ;

则边值问题(1)至少有一个正解  $u^* \in K$  且  $a \leq \|u^*\| \leq b$ 。

**证明** 不失一般性, 我们只证明满足(A1)的情形。

如果  $u \in \partial\Omega(a)$ , 则  $\|u\| = a$  且  $\theta^* a \leq u(t) \leq a, 0 < t < 1$ , 由(H4)和(A1),

$$g(t, u(t)) \leq \varphi(a) \leq (a - I(a))A, \quad \lambda(t, u(t)) \leq \lambda(t, \theta^* a), 0 \leq t \leq 1, \text{ 进而根据引理}$$

$$\begin{aligned} \|Tu\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) h(s) f(s, u(s)) ds \leq \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) h(s) [g(s, u(s)) + \lambda(s, u(s))] ds \\ &\leq \int_0^1 \max_{0 \leq t \leq 1} |G(t, s)| h(s) g(s, u(s)) ds + \int_0^1 \max_{0 \leq t \leq 1} |G(t, s)| h(s) \lambda(s, \theta^* a) ds \\ &\leq (a - I(a))A \int_0^1 \max_{0 \leq t \leq 1} |G(t, s)| h(s) ds + I(a) \\ &\leq (a - I(a))AA^{-1} + I(a) = a = \|u\| \end{aligned}$$

故

$$\|Tu\| \leq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega(a). \tag{4}$$

若  $u \in \partial\Omega(b)$ , 则  $\|u\| = b$  且  $\theta^* b \leq u(t) \leq b, 0 < t < 1$ , 因此  $f(t, u(t)) \geq \varphi(b) \geq bB, \theta \leq t \leq 1 - \theta$ 。

$$\text{故 } \|Tu\| = \max_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) h(s) f(s, u(s)) ds \geq \min_{0 \leq t \leq 1} \int_\theta^{1-\theta} G(t, s) h(s) bB ds = bBB^{-1} = b = \|u\|.$$

即

$$\|Tu\| \geq \|u\|, u \in K \cap \partial\Omega(b) \tag{5}$$

依引理 4 及引理 5 知, 算子  $T$  有一个不动点  $u^* \in \bar{\Omega}(b) \setminus \Omega(a)$ 。意即  $u^*(t) = \int_0^t G(t, s) h(s) f(s, u^*(s)) ds, 0 \leq t \leq 1$ 。故有  $(u^*)''(t) = h(t) f(t, u^*(t)), 0 \leq t \leq 1$ 。依引理 1,  $G(0, s) \equiv 0, G(1, s) \equiv 0, \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\eta, s) \equiv 0, 0 \leq s \leq 1$ ,

故有  $u^*(0) = u^*(1) = (u^*)''(\eta) = 0$ , 因此  $u^*$  是问题(1)的一个解, 且  $a \leq \|u^*\| \leq b$ , 另由  $u^*(t) \geq \theta^* a > 0, 0 \leq t \leq 1$ , 知  $u^*$  是正的。

**注记** 定理 1 表明, 问题(1)的正解存在性只与非线性项  $f(t, u)$  在集合  $\{f(t, u) : 0 < t < 1, \theta^* a \leq u \leq b\}$  边界的特性有关, 与  $f(t, u)$  在集合内部的状态无关。

**定理 2** 假设存在三个正数  $0 < a < b < c$  使得以下条件成立其一:

(B1)  $\phi(a) \leq (a - I(a))A, \varphi(b) > bB, \phi(c) \leq (c - I(c))A$ ;

(B2)  $\varphi(a) \geq aB, \varphi(b) < (b - I(b))A, \phi(c) \geq cB$

则边值问题(1)至少有两个正解  $u_1, u_2 \in K$  且  $a \leq \|u_1\| < b < \|u_2\| \leq c$ 。

**证明** 我们只证条件(B2)的情形。

由条件  $\phi(b) < (b - I(b))A$ ,  $\phi(c) \geq cB$ , 利用定理 1 的证明易知, 问题(1)至少有一个正解  $u_2 \in K$ ,  $b < \|u_2\| < c$ 。同样的, 利用条件  $\phi(a) \geq aB$ ,  $\phi(b) < (b - I(b))A$  及定理 1 知, 问题(1)还有另一个正解  $u_1 \in K$ ,  $a \leq \|u_1\| < b$ 。

**定理 3** 假设存在四个正数  $0 < a < b < c < d$  使得以下条件成立其一:

$$(C1) \quad \phi(a) \leq (a - I(a))A, \phi(b) > bB, \phi(c) < (c - I(c))A, \phi(d) \geq dB;$$

$$(C2) \quad \phi(a) \geq aB, \phi(b) < (b - I(b))A, \phi(c) > cB, \phi(d) \leq (d - I(d))A$$

则边值问题(1)至少有三个正解  $u_1, u_2, u_3 \in K$  且  $a \leq \|u_1\| < b < \|u_2\| < c < \|u_3\| \leq d$ 。

**定理 4** 假设存在  $n+1$  个正数  $a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$  使得以下条件成立其一:

$$(D1) \quad \phi(a_{2k-1}) < (a_{2k-1} - I(a_{2k-1}))A, \phi(a_{2k}) > a_{2k}B, k = 1, 2, \dots, \left[ \frac{n+1}{2} \right];$$

$$(D2) \quad \phi(a_{2k-1}) > a_{2k-1}B, \phi(a_{2k}) < (a_{2k} - I(a_{2k}))A, k = 1, 2, \dots, \left[ \frac{n+1}{2} \right];$$

则边值问题(1)至少有  $n$  个正解  $u_k \in K, k = 1, 2, 3, \dots, n$ , 且  $a_k < \|u_k\| < a_{k+1}, k = 1, 2, 3, \dots, n$ 。(其中  $[c]$  表示  $c$  的整数部分)。

**推论 1** 假设  $\liminf_{u \rightarrow 0^+} \min_{\theta \leq t \leq 1 - \theta} f(t, u) > 0$  (尤其  $\liminf_{u \rightarrow 0^+} \min_{\theta \leq t \leq 1 - \theta} f(t, u) = +\infty$ ), 存在一个正数  $a > 0$  使得  $\phi(a) \leq (a - I(a))A$ , 则边值问题(1)至少有一个正解  $u \in K$  满足  $0 < \|u\| \leq a$ 。

**证明** 由于  $\liminf_{u \rightarrow 0^+} \min_{\theta \leq t \leq 1 - \theta} f(t, u) > 0$ , 故存在  $0 < b < a$  使得  $f(t, u) \geq bB$ ,  $(t, u) \in [\theta, 1 - \theta] \times [0, b]$ 。

亦即  $\phi(b) \geq bB$ 。故依定理 1 知问题(1)至少有一个正解  $u \in K$  满足  $0 < \|u\| \leq a$ 。

**推论 2** 假设  $\liminf_{u \rightarrow 0^+} \min_{\theta \leq t \leq 1 - \theta} f(t, u) > 0$ , 存在  $n$  个正数  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , 使得

$\phi(a_{2k-1}) < (a_{2k-1} - I(a_{2k-1}))A, k = 1, 2, \dots, \left[ \frac{n+1}{2} \right]$  且  $\phi(a_{2k}) > a_{2k}B, k = 1, 2, \dots, \left[ \frac{n}{2} \right]$ , 则边值问题(1)有  $n$  个正解  $u_k \in K, k = 1, 2, 3, \dots, n$ , 满足  $0 < \|u_1\| < a_1 < \|u_2\| < a_2 < \dots < \|u_n\| \leq a_n$ 。

**推论 3** 假设  $\liminf_{u \rightarrow 0^+} \min_{\theta \leq t \leq 1 - \theta} f(t, u) > 0$ , 且  $\limsup_{u \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{g(t, u)}{u} < A$ , 则边值问题(1)至少有一个正解。

**证明** 取  $\varepsilon = \frac{1}{2} \left[ A - \limsup_{u \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{g(t, u)}{u} \right]$ , 则存在  $b > 0$  使得

$$\frac{g(t, u)}{u} \leq A - \varepsilon, \quad (t, u) \in [0, 1] \times [b, +\infty)$$

选取  $a > b$  使得  $\max \{g(t, u) : 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq b\} \leq (A - \varepsilon)a$  且  $AI(b) \leq a\varepsilon$ , 由此知,

$$g(t, u) \leq (A - \varepsilon)a, \quad (t, u) \in [0, 1] \times [0, a]$$

依(H4)及(H5),  $I(a) \leq I(b)$ 。

$$\phi(a) \leq (A - \varepsilon)a = Aa - \varepsilon a \leq Aa - AI(b) = A(a - I(b)) \leq A(a - I(a))。$$

故推论 1 的条件满足, 即问题(1)至少有一个正解。

## 基金项目

国家自然科学基金(11261053); 甘肃省自然科学基金(1308RJZA125)。

## 参考文献 (References)

- [1] Gregus, M. (1987) Third Order Linear Differential Equations. Reidel, Dordrecht.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-94-009-3715-4>
- [2] Anderson, D.R. (2003) Green's Function for a Third-Order Generalized Right Focal Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **288**, 1-14. [http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X\(03\)00132-X](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00132-X)
- [3] Sun, Y.P. (2005) Positive Solutions of Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **306**, 589-603. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.10.029>
- [4] Sun, Y.P. (2009) Positive Solutions for Third-Order Three-Point Nonhomogeneous Boundary Value Problem. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 45-51. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aml.2008.02.002>
- [5] Anderson, D.R. and Avery, R. (2001) Multiple Positive Solutions to a Third-Order Discrete Focal Boundary Value Problems. *Computers & Mathematics with Applications*, **42**, 333-340.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221\(01\)00158-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00158-4)
- [6] Kaufmann, E.R. (2003) Positive Solutions of a Three-Point Boundary Value Problem on a Time Scale. *Electron. J. Diff. Equa.*, **82**, 1-11.
- [7] Anderson, D.R., Anderson, T. and Kleber, M. (2006) Green's Function and Existence of Solutions for a Functional Focal Differential Equations. *Electron. J. Diff. Equa.*, **12**, 1-14.
- [8] Palamides, A.P. and Smyrlis, G. (2008) Positive Solutions to a Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problem with an Indefinitely Signed Green's Function. *Nonlinear Analysis*, **68**, 2104-2118.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2007.01.045>
- [9] Wu, H.P. (2011) Multiple Positive Solutions to a Singular Third-Order Three-Point Boundary Value Problem. *Annals of Differential Equations*, **27**, 379-383.
- [10] Guo, D. and Lakshmikantham, V. (1988) *Nonlinear Problems in Abstract Cone*. Academic Press, San Diego.