Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(2), 225-231
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.52029

Representation of Natural Numbers Using Generalized Fibonacci Sequence

Tingting Guo[1], Fugang Chao[1], Han Ren[1,2*]

[1]Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai
[2]Shanghai Key Laboratory of Pure Mathematics and Mathematical Practice, Shanghai
Email: *hren@ecnu.edu.cn

Received: Apr. 24th, 2016; accepted: May 10th, 2016; published: May 13th, 2016

Abstract

Previously, there were many studies about the problem of representation of natural numbers. But it's comparatively rare to study the problem based on Fibonacci sequence and its extension. This thesis mainly discussed the feasibility and diversity of this kind of representation. Utilizing enumerating polynomials and binomial codes, we focused on minimal and maximal representations of natural numbers. In addition to Fibonacci sequence, we also studied the situation of Lucas sequence and offered some hypotheses in the case of *n*-step Fibonacci sequence.

Keywords

Representation of Natural Numbers, Fibonacci Sequence, Enumerating Polynomial, Binomial Code

Fibonacci数列及其推广形式的正整数表示

郭婷婷[1]，晁福刚[1]，任　韩[1,2*]

[1]华东师范大学数学系，上海
[2]上海市核心数学与实践重点实验室，上海
Email: *hren@ecnu.edu.cn

收稿日期：2016年4月24日；录用日期：2016年5月10日；发布日期：2016年5月13日

*通讯作者。

文章引用: 郭婷婷, 晁福刚, 任韩. Fibonacci 数列及其推广形式的正整数表示[J]. 应用数学进展, 2016, 5(2): 225-231.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.52029

摘　要

正整数表示问题前人多有研究，而基于Fibonacci数列及其推广形式的分析并不多见。本文的主要工作是探讨了该类整数表示的可行性，发现了表示的多样性，从而从最少表示及最多表示的角度来展开分析，分别引入了它们的计数多项式以及0与1的编码形式。起初是只针对Fibonacci数列，之后研究Lucas数列的情况，再接着对一类推广：*n*代的Fibonacci数列做了猜测。

关键词

正整数表示，Fibonacci数列，计数多项式，二项编码

1. 引言

中世纪意大利数学家 Leonardo Fibonacci 提出了如下的“兔子问题”：在一年初把一对兔子(雌雄各一)放入围墙内，从第二个月起，雌兔每月生一对兔子(雌雄各一)，而雌小兔长满足两个月后开始生小兔子，也是每月生一对兔子(雌雄各一)，问到了年底墙内共有多少对兔子。这就是著名的 Fibonacci 数列。

Fibonacci 数列与许多数学概念联系密切，并具有许多漂亮的性质。人们在许多表面上看似没有任何联系的问题中都发现了它们，使得这一数列成为很基本的一个数学对象。例如：上 n 阶楼梯，每次只能上 1 阶或 2 阶，的不同方法数。就是与 Fibonacci 数列有相同的初始值和递推关系的数列。一个更有趣的事实是这个正整数的序列，它的通项竟然可以用无理数来表示。

美国数学会专门出版了一份以《Fibonacci Quarterly》为名的数学杂志，来刊载这方面的研究成果。本文所研究的正整数表示问题的很多参考文献也是来源于此。

2. 正整数表示的存在性和最多与最少的表示问题

为了证明存在性，先引入一个概念：对于一个非负递增数列，若所有正整数都能写成数列中的某些元素的和，且每个元素最多用一次，则该数列是完全数列[1]。

数列 $\{a_k\}$ 是完全数列的一个充要条件是 $\forall k\in N^*, S_k\ge a_{k+1}-1$，其中 S_k 为数列的和函数。因而可以推知当等号成立时，$\{2^n\}$ 是满足条件的最小数列。这也是每个正整数都有二进制表示的理由。

数列 $\{a_k\}$ 是完全数列的一个充分条件是 $\forall k\in N^*, 2a_k\ge a_{k+1}$，易验证 Fibonacci 数列满足该不等式，从而 Fibonacci 数列是完全数列，任何正整数都可以基于 Fibonacci 数列表示。

如果我们将任意正整数写成不同的 Fibonacci 数的和，且涉及的数字最多用一次，例如：10 = 8 + 2 = 2 + 3 + 5 = 1 + 1 + 3 + 5，可以发现会有很多种表示方法，那不禁要问最多与最少的表示分别是什么[2]。

若是最少表示的话，相邻的 Fibonacci 数是不能同时出现的。试想一下，若 $F(k)$ 与 $F(k-1)$ 同时出现在表示中，则为了用最少的数字来表示某个整数，它们可以被 $F(k+1)$ 所取代。

为了更好地分析该问题，我们需要引入一个 0 与 1 的纸盒模型。将命题“关于 $S(n)=\{1,2,3,\cdots,n\}$ 中不相邻的子集个数是 $F(n+2)$”，做如下推广。考虑 n 个盒子，每个盒子里要么装 0 要么装 1，连续的两个盒子里不能都装 1，那么这样的装法数为 $F(n+2)$ 种。如果再排除全部装 0 的情况，则只有 $F(n+2)-1$ 种装法。换句话说，由 n 个不相邻的且不同的 Fibonacci 数能表示的最大数是 $F(n+2)-1$。

回到提出的问题，由于要使用不同的 Fibonacci 数，则我们必须舍去 $F(1)$，n 个盒子分别按照顺序表示 $F(2),F(3),\cdots,F(n+1)$，取 1 则表示使用这个 Fibonacci 数，取 0 则表示不使用。

基于最少表示的限定条件：相邻的 Fibonacci 数不能出现，那么我们也能很容易得出恒等式即

$F(3)+F(5)+\cdots+F(2k+1)=F(2k+2)-1$（有 $2k$ 个盒子）；$F(2)+F(4)+\cdots+F(2k)=F(2k+1)-1$（有 $2k-1$ 个盒子）。

对于每一个在 $[F(m),F(m+1))$ 中的整数，我们定义一个最少表示的计数多项式 $P_{m-1}(x)$，多项式中的每一项 ax^j 表示有 a 个整数需 j 用个 Fibonacci 数表示。例如：对于 $[F(6),F(7))=[8,13)$ 中的整数的最少表示分别为 8 = 8，9 = 8 + 1，10 = 8 + 2，11 = 8 + 3，12 = 8 + 3 + 1，由此可得该段区间内的最少计数多项式为 $P_5(x)=x^3+3x^2+x$。从该例子中还能发现一个特点，即：对于每一个 $[F(m),F(m+1))$ 中的整数 Fibonacci 的最少表示一定会含有 $F(m)$。如果不含有 $F(m)$，那么此区间内的最少表示是不能实现的，否则得取相邻的 Fibonacci 数了，而这已经不是最少表示了。

表 1 罗列了前 9 个最少计数多项式。

接下来我们可以简单地推导一下该最少计数多项式的递推公式。

显然对于 $[F(m),F(m+2))$ 的最少计数多项式可以拆成 $[F(m),F(m+1))$ 与 $[F(m+1),F(m+2))$ 的两个最少计数多项式的和。

如果我们在每一个 $[F(m),F(m+1))$ 的整数最少表示中加入 $F(m+2)$，则我们可以得到 $[F(m)+F(m+2),F(m+1)+F(m+2))$，即 $[L(m+1),F(m+3))$ 的最少计数多项式为 $xP_{m-1}(x)$。

对于 $[F(m+1),F(m+2))$ 所有整数的最少表示中都会含有 $F(m+1)$，如果我们将 $F(m+1)$ 用 $F(m+2)$ 代替，即可得到 $[F(m+2),L(m+1))$ 的最少计数多项式，也是 $P_m(x)$。

从而我们能够得到 $[F(m+2),F(m+3))$ 的最少计数多项式，即递推公式：

$$\begin{cases} P_{m+1}(x)=P_m(x)+xP_{m-1}(x) \\ P_0(x)=0,\ P_1(x)=x \end{cases}$$

另外不难注意到，对于 $[F(m+1),F(m+2))$ 的最少计数多项式 $P_m(x)$ 的所有系数的和为 $P_m(1)$，该值也表示该区间所有整数的个数即 $F(m+2)-F(m+1)=F(m)$。所以在上述递推关系中若令 $x=1$，则可得到 Fibonacci 数列的递推关系。

此外，如果我们再结合之前提到的盒子问题，用 0 和 1 编码的形式来展示上述过程会更简单明了地看出递推关系。需要注意的是最少表示中必须满足任意两个 1 不能相邻的条件。表 2 展示了[13,21)至[21,34)的整数 Fibonacci 最少表示的变化过程。

3. Fibonacci 最少表示的唯一性与其最多表示

由 Zeckendorf 定理[3]可知，对于每个正整数 n 有唯一的 Fibonacci 最少表示，即必须由不相邻的数组成。可以用反证法证明如下，若 n 有两个不同的表示，即

$$n=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha(i)F(i)=\sum_{i=1}^{\infty}\beta(i)F(i)$$

其中，$\forall n\ge 1,\alpha(i)\alpha(i+1)=\beta(i)\beta(i+1)=0,\sum_{i=1}^{\infty}|\alpha(i)-\beta(i)|\ne 0$。

令 k 是满足 $\alpha(i)\ne\beta(i)$ 的最大指标，则 $\alpha(k)$ 与 $\beta(k)$ 中有一个是 0 有一个是 1，不妨设 $\alpha(k)=1$。因此 $n=\sum_{i=1}^{k}\alpha(i)F(i)=\sum_{i=1}^{k-1}\beta(i)F(i)$，且由该等式右边能导出 $n\ge F(k)$，而左边 $\sum_{i=1}^{k-1}\beta(i)F(i)\le F(k-1)+F(k-3)+\cdots+F(2,\ 3)\le F(k)-1$，其中 $F(2,3)=\begin{cases} F(2)，当k为奇数 \\ F(3)，当k为偶数 \end{cases}$，与前一导出

Table 1. Enumerating minimal polynomials using Fibonacci numbers
表 1. Fibonacci 的最少计数多项式

m	$[F(m), F(m+1))$	$P_{m-1}(x)$
1	[1, 1)	$0 = P_0(x)$
2	[1, 2)	$x = P_1(x)$
3	[2, 3)	$x = P_2(x)$
4	[3, 5)	$x^2 + x = P_3(x)$
5	[5, 8)	$2x^2 + x = P_4(x)$
6	[8, 13)	$x^3 + 3x^2 + x = P_5(x)$
7	[13, 21)	$3x^3 + 4x^2 + x = P_6(x)$
8	[21, 34)	$x^4 + 6x^3 + 5x^2 + x = P_7(x)$
9	[34, 55)	$4x^4 + 10x^3 + 6x^2 + x = P_8(x)$

Table 2. Recurrence relation of the minimal representation using Fibonacci numbers
表 2. Fibonacci 最少表示的递推关系

编码	Fibo		编码	Fibo	编码	Fibo		编码	Fibo
10000	8	→	1010000	29	100000	13	→	1000000	21
10001	9	→	1010001	30	100001	14	→	1000001	22
10010	10	→	1010010	31	100010	15	→	1000010	23
10100	11	→	1010100	32	100100	16	→	1000100	24
10101	12	→	1010101	33	100101	17	→	1000101	25
					101000	18	→	1001000	26
					101001	19	→	1001001	27
					101010	20	→	1001010	28

矛盾，得证。

反过来，如果我们为了得到最多的表示，则尽可能要用相邻的 Fibonacci 数。再回到之前提到的装满 0 和 1 的盒子，这次我们希望不要出现相邻的 0，即 n 个 1 中最多插入一个 0。在任何一串连续的 1 中，0 可以出现在最左边的 1 的旁边也可以出现在最右边的 1 的旁边。

现在考虑 $\left[F(n)-1,\ F(n+1)-1\right)$ 中整数的最多计数多项式 $P_{n-1}^{*}(x)$。同样的多项式中的每一项 ax^j 表示有 a 个整数需用 j 个 Fibonacci 数表示。例如：对于 $\left[F(6)-1, F(7)-1\right)=\left[7,\ 12\right)$ 中的整数的最多表示分别为 7 = 5 + 2, 8 = 5 + 2 + 1, 9 = 5 + 3 + 1, 10 = 5 + 3 + 2, 11 = 5 + 3 + 2 + 1，由此可得该段区间内的最多计数多项式为 $P_5^{*}(x)=x^4+3x^3+x^2$。

从该例子中还能发现一个特点，即：对于每一个 $\left[F(n)-1, F(n+1)-1\right)$ 中的整数 Fibonacci 的最多表示一定会含有 $F(n-1)$。

表 3 罗列了前 8 个最多计数多项式。

参照之前的做法，同样可以得到最多计数多项式的递推关系：

$$\begin{cases} P_n^{*}(x)=x\left[P_{n-1}^{*}(x)+P_{n-2}^{*}(x)\right] \\ P_1^{*}(x)=1,\ P_2^{*}(x)=x \end{cases}$$

同样地，我们也可以用编码的形式来直观地看出这个递推关系。表 4 展示了[7,20)至[20,33)的整数 Fibonacci 最多表示的变化过程。

4. Fibonacci 的表示数

我们定义 $R(n)$ 表示 n 用 Fibonacci 数表示的所有可能数目，则可以通过贪婪算法得出前 60 个正整数的情况表 5。

然而随着 n 不断变大，计算机的存储空间有限将不能继续运算，为此有些数学家就推导了一些关于 $R(n)$ 的递推关系，研究了该表示数的一些性质[4]。

5. Lucas 的表示

如果我们将 Fibonacci 数换成 Lucas 数，即：$2,1,3,4,7,11,18,\cdots$，探讨基于此数的正整数表示[5]。同样的，我们对 $\left[L(m),L(m+1)\right)$ 中的每个整数定义一个最少计数多项式 $Q_{m-1}(x)$ 多项式中的每一项 dx^j 表示有 d 个整数需用 j 个 Lucas 数表示。例如：对于 $\left[L(5),L(6)\right)=[11,18)$ 中的整数的最少表示分别为 $11=11$，$12=11+1$，$13=11+2$，$14=11+3$，$15=11+4$，$16=11+4+1$，$17=11+4+2$，由此可得该段区间内的最少计数多项式为 $Q_4(x)=2x^3+4x^2+x$，从该例子中也能发现一个特点，即：对于 $\left[L(m),L(m+1)\right)$ 每一个中的整数 Lucas 的最少表示一定会含有 $L(m)$。

Table 3. Enumerating maximal polynomials using Fibonacci numbers
表 3. Fibonacci 的最多计数多项式

m	$\left[F(n)-1,F(n+1)-1\right)$	$P_{n-1}^*(x)$
2	[0, 1)	$1=P_1^*(x)$
3	[1, 2)	$x=P_2^*(x)$
4	[2, 4)	$x^2+x=P_3^*(x)$
5	[4, 7)	$x^3+2x^2=P_4^*(x)$
6	[7, 12)	$x^4+3x^3+x^2=P_5^*(x)$
7	[12, 20)	$x^5+4x^4+3x^3=P_6^*(x)$
8	[20, 33)	$x^6+5x^5+6x^4+x^3=P_7^*(x)$
9	[33, 54)	$x^7+6x^6+10x^5+4x^4=P_8^*(x)$

Table 4. Recurrence relation of the maximal representation using Fibonacci numbers
表 4. Fibonacci 最多表示的递推关系

编码	Fibo		编码	Fibo	编码	Fibo		编码	Fibo
1010	7	→	101010	20	10101	12	→	110101	25
1011	8	→	101011	21	10110	13	→	110110	26
1101	9	→	101101	22	10111	14	→	110111	27
1110	10	→	101110	23	11010	15	→	111010	28
1111	11	→	101111	24	11011	16	→	111011	29
					11101	17	→	111101	30
					11110	18	→	111110	31
					11111	19	→	111111	32

由于 Fibonacci 和 Lucas 只是初项不同，两者的递推关系是一样的，从而我们可以推测两者的计数多项式的递推关系应该也是一样的。可以看表 6 用编码展示的 Lucas 最少计数多项式的递推关系变化过程。至于 Lucas 的最多计数多项式的内容和之前的 Fibonacci 类似，在此就不再赘述。

另外 Lucas 的最少表示是否与 Fibonacci 一样也是唯一的呢？答案是否定的。例如：$5=L(1)+L(3)=L(2)+L(4)$，若仍想保证表示的唯一性，则当同时出现时，只能选择其一。

6. *n* 代 Fibonacci 数列的表示

最后我们考虑一下 n 代的 Fibonacci 数列是否有上述提及的类似性质[6]。

我们称数列 $F(m)$ 为 n 代的 Fibonacci 数列，当且仅当

Table 5. The number of possibility of representation of *n* using Fibonacci numbers
表 5. *n* 用 Fibonacci 数表示的所有可能数目

n	*R*(*n*)	*n*	*R*(*n*)	*n*	*R*(*n*)	*n*	*R*(*n*)
1	1	16	4	31	3	46	2
2	1	17	2	32	4	47	5
3	2	18	3	33	1	48	5
4	1	19	3	34	4	49	3
5	2	20	1	35	4	50	6
6	2	21	4	36	3	51	3
7	1	22	3	37	6	52	4
8	3	23	3	38	3	53	4
9	2	24	5	39	5	54	1
10	2	25	2	40	5	55	5
11	3	26	4	41	2	56	4
12	1	27	4	42	6	57	4
13	3	28	2	43	4	58	7
14	3	29	5	44	4	59	3
15	2	30	3	45	6	60	6

Table 6. Recurrence relation of the minimal representation using Lucas numbers
表 6. Lucas 最少表示的递推关系

编码	Lucas		编码	Lucas	编码	Lucas		编码	Lucas
10000	7	→	1010000	25	100000	11	→	1000000	18
10010	8	→	1010010	26	100010	12	→	1000010	19
10001	9	→	1010001	27	100001	13	→	1000001	20
10100	10	→	1010100	28	100100	14	→	1000100	21
					101000	15	→	1001000	22
					101010	16	→	1001010	23
					101001	17	→	1001001	24

$$\begin{cases} F(0)=F(1)=F(2)=\cdots=F(n-1)=0 \\ F(n)=1 \\ F(m)=F(m-1)+F(m-2)+F(m-3)+\cdots+F(m-n) \end{cases}$$

该数列的特征方程是 $x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x-1=0$，将此等式两边同乘以 $x-1$，即化成 $x^{n+1}-2x^n+1=0$，之后再同时除以 x^n，可得 $x+x^{-n}=2$。所以该数列的特征根也是方程 $x+x^{-n}=2$ 的根。由于该方程的极限是 $x=2$，从而可知 n 代 Fibonacci 数列也会收敛到数列 $\{2^n\}$。

从而我们可以推断 n 代 Fibonacci 数列也会是完全数列。所以任何正整数也会有 n 代 Fibonacci 数列的表示。

同样的，我们也能够考虑 n 代 Fibonacci 数列的计数多项式的递推。如果从编码的角度，需要注意的一个规则是：n 代的最少编码是至多 $n-1$ 个 1 连在一起，n 代的最多编码是至多 $n-1$ 个 0 连在一起，这是由数列的递推关系决定的。

基金项目

本项研究工作得到了上海市科学技术委员会的资助，资助课题编号为 13dz2260400；同时受到中国国家自然科学基金项目资助(项目批准号：11171114)，在此表示感谢。

参考文献 (References)

[1] Hoggatt Jr., V.E. and Chow, B. (1972) Some Theorems on Completeness. *Fibonacci Quarterly*, **10**, 551-554.

[2] Ferns, H.H. (1965) On the Representation of Integers as Sums of Distinct Fibonacci Numbers. *Fibonacci Quarterly*, **3**, 21-30.

[3] Brown Jr., J.L. (1964) Zeckendorf's Theorem and Some Applications. *Fibonacci Quarterly*, **2**, 163-168.

[4] Bicknell-Johnson, M. and Fielder, D.C. (1999) The Number of Representations of *n* Using Distinct Fibonacci Numbers, Counted by Recursive Formulas. *Fibonacci Quarterly*, **37**, 47-60.

[5] Brown Jr., J.L. (1969) Unique Representations of Integers as Sums of Distinct Lucas Numbers. *Fibonacci Quarterly*, **7**, 243-252.

[6] Daykin, D.E. (1969) Representations of Natural Numbers as Sums of Generalized Fibonacci Numbers. *Fibonacci Quarterly*, **7**, 494-510.