Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(2), 282-290
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.52036

Hans汉斯

The 1-Good-Neighbor Connectivity and Diagnosability of Crossed Cubes

Xiaolei Ma[1], Shiying Wang[1,2*], Zhenhua Wang[1]

[1]School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang Henan
[2]Henan Engineering Laboratory for Big Data Statistical Analysis and Optimal Control, Henan Normal University, Xinxiang Henan
Email: 954631457@qq.com, *wangshiying@htu.edu.cn, zhwang@htu.cn

Received: May 4th, 2016; accepted: May 23rd, 2016; published: May 26th, 2016

Abstract

Connectivity and diagnosability are important parameters in measuring the fault diagnosis of multiprocessor systems. In 2012, Peng *et al*. proposed a new measure for fault diagnosis of the system, which is called *g*-good-neighbor diagnosability that restrains every fault-free node containing at least *g* fault-free neighbors. The *n*-dimensional crossed cube is an important variant of the hypercube. In this paper, we prove that the 1-good-neighbor connectivity of crossed cube is $2n - 2$ for $n \geq 4$, and the 1-good-neighbor diagnosability of crossed cube is $2n - 1$ under the PMC model for $n \geq 4$ and the MM* model for $n \geq 5$.

Keywords

Interconnection Network, Graph, Diagnosability, Crossed Cube

交叉立方体的1好邻连通度和诊断度

马晓蕾[1]，王世英[1,2*]，王贞化[1]

[1]河南师范大学，数学与信息科学学院，河南 新乡
[2]河南师范大学，河南省大数据统计分析与优化控制工程实验室，河南 新乡
Email: 954631457@qq.com, *wangshiying@htu.edu.cn, zhwang@htu.cn

*通讯作者。

文章引用: 马晓蕾, 王世英, 王贞化. 交叉立方体的 1 好邻连通度和诊断度[J]. 应用数学进展, 2016, 5(2): 282-290.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.52036

收稿日期：2016年5月4日；录用日期：2016年5月23日；发布日期：2016年5月26日

摘　要

连通度和诊断度是度量多处理器系统故障诊断能力的重要参数。2012年，Peng等提出了一个新的系统故障诊断方法，称为g好邻诊断度，它限制每个非故障顶点至少有g个非故障邻点。n维交叉立方体是超立方体的一个重要变形。本文证明了交叉立方体的1好邻连通度是$2n-2$ ($n \ge 4$)，又证明了交叉立方体在PMC模型下的1好邻诊断度是$2n-1$ ($n \ge 4$)和在MM*模型下的1好邻诊断度是$2n-1$ ($n \ge 5$)。

关键词

互连网络，图，诊断度，交叉立方体

1. 引言

连通度和诊断度是度量多处理器系统故障诊断能力的重要参数。它们是互联网络中热门的研究课题之一。通常我们把互联网络用图来表示，其中顶点表示处理器，边表示两处理器之间的链路。为了保证计算机系统的可靠性，系统中的故障处理器应该被诊断出来并被非故障处理器替换。Preparata 等首次提出了系统级故障诊断模型，称为 PMC 模型[1]。它是通过两个相邻的处理器之间相互测试来完成系统的诊断。Maeng 和 Malek 提出了 MM*模型[2]。在这种模型下，一个顶点分别给它相邻的两个顶点发出相同的任务，然后比较它们反馈的结果。传统的诊断度允许点的邻点全为故障点，但是在大型多处理器系统中这种故障出现的概率极小。因此 Lai 等提出了网络的条件诊断度[3]，它限制系统中任意一个处理器至少与一个非故障处理器相邻。2012 年，Peng 等通过在系统中限制每个非故障顶点都至少有 g 个非故障邻点，提出了网络的 g 好邻诊断度[4]，并且证明了超立方体在 PMC 模型下的 g 好邻诊断度是 $2^g(n-g)+2^g-1(0 \le g \le n-3)$。原军等在文[5]中证明了 k 元 n 立方体在 PMC 模型和 MM*模型下的 g 好邻诊断度是 $(2n-g+1)2^g-1(k \ge 4, n \ge 3, 0 \le g \le n)$。在文[6]中，王牟江山等证明了网络的 1 好邻诊断度不超过条件诊断度。因此，研究网络的 1 好邻诊断度也是很有意义的。本文首先证明了交叉立方体的 1 好邻连通度是 $2n-2(n \ge 4)$。然后，我们又证明了交叉立方体在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度是 $2n-1(n \ge 4)$ 和在 MM*模型下的 1 好邻诊断度是 $2n-1(n \ge 5)$。

2. 预备知识

设 $G=(V,E)$ 是一个无向简单图，其中 $V=V(G)$，$E=E(G)$ 分别表示图 G 的顶点集和边集。对于任意的非空顶点子集 $V' \subset V$，以 V' 为顶点集，以两端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 V' 在 G 中的导出子图，记作 $G[V']$。$d_G(V)$ 是顶点 v 在 G 中关联的边的数目，表示 v 在 G 中的度。$\delta(G)$ 表示 G 的顶点的最小度。对于任意顶点 $v \in V$，在 G 中与 v 相邻的所有顶点组成的集合称为 v 的邻集，记作 $N_G(v)$。若 S 是 G 的非空顶点子集，则 S 的邻集为 $N_G(S)=\bigcup_{v \in S} N_G(v) \setminus S$。图 G 的每一个顶点都恰好与边集 M 中的一条边关联，称 M 是 G 的一个完美匹配。对于任意的 $F \subset V$，若 $v \in V \setminus F$ 且 v 在 $G[V \setminus F]$ 中至少有 g 个邻点，则称 F 为 G 的 g 好邻故障集。如果 $G-F$ 不连通且 $G-F$ 的每个连通分支的最小度为 g，则称 F 是一个 g 好邻割。G 的所有 g 好邻割中的最小顶点数称为 G 的 g 好邻连通度，记作 $\kappa^{(g)}(G)$。文中其它未定义而直接使用的符号和术语参见文献[7]。

在 PMC 模型中，相邻的处理器之间可以相互测试。图 G 中，对于任意的 $(u,v)\in E(G)$ 表示从 u 到 v 的测试，其中 u 是测试者而 v 是被测试者。若 u 是非故障点而 v 是故障点(或非故障点)，则测试结果是 1(或 0)。若 u 是故障点，则测试结果不可靠。一个系统 G 的一个测试任务是每对相邻顶点测试结果的集合。它可以用一个有向图 $T=(V,L)$ 表示，其中 $(u,v)\in L$ 表示 $uv\in E(G)$。所有测试结果的集合称为系统 G 的症候，记作 σ。一个症候是一个函数 $\sigma: L\mapsto\{0,1\}$。对两个不同的顶点子集 $F_1,F_2\subseteq V(G)$，若 $\sigma(F_1)\cap\sigma(F_2)=\varnothing$，则称 F_1 和 F_2 是可区分的，记(F_1, F_2)为可区分的点对；否则，称 F_1 和 F_2 是不可区分的，记(F_1, F_2)为不可区分的点对。

在 MM*模型下，与一个结点 w 相邻的两个结点 u，v 被分配一个相同的任务，再把测试结果返回给结点 w，w 再对这两个结点返回的结果进行比较。用 $(u,v)_w$ 来表示 w 比较 u，v 输出的比较结果，如果这两个结果是相同的，则 $(u,v)_w=0$；否则，$(u,v)_w=1$。全部的测试结果叫做这个系统的比较症候，记作 σ^*。假定三个结点都是非故障的，则测试结果为 0；若 w 是非故障的，但 u，v 至少有一个是故障的，则比较结果为 1；若 w 是故障的，则测试结果无论是 0 或 1 都是不可靠的。

定义 2.1 [5]：在一个系统 $G=(V,E)$ 中，对于任意两个不同的 g 好邻故障集 F_1，F_2，其中 $|F_1|\le t$ 和 $|F_2|\le t$，若 F_1，F_2 是可区分的，则 G 是 g 好邻条件 t-可诊断的。

定义 2.2 [5]：使得 G 是 g 好邻条件 t-可诊断的最大值 t 称为 G 的 g 好邻诊断度，记作 $t_g(G)$。

n 维交叉立方体 CQ_n [8]有超立方体的正则性和相同的连通度。它是一个有 2^n 个顶点和 $n2^{n-1}$ 条边的 n 正则图。它包含长度为 $l\left(4\le l\le 2^n\right)$ 的圈，直径为 $\left\lceil\frac{n-1}{2}\right\rceil$ 大约是超立方体的一半。n 维交叉立方体 CQ_n 的顶点 u 用长为 n 的二进制字符串表示，如 $u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_1u_0$，其中 $u_i\in\{0,1\}$，$0\le i\le n-1$，u_{n-1} 表示最高位，u_0 表示最低位。

定义 2.3：两个二元序列 $x=x_1x_2$，$y=y_1y_2$ 称为相关对，记为 $x\sim y$，当且仅当 $(x,y)\in\{(00,00),(10,10),(01,11),(11,01)\}$。

n 维交叉立方体 CQ_n 可以用递归定义表示：

定义 2.4：1 维交叉立方体 CQ_1 是顶点标号分别为 0 和 1 的完全图(如图 1)。n 维交叉立方体 $CQ_n\,(n\ge 2)$ 包含两个 $n-1$ 维子交叉立方体 CQ_{n-1}^0 和 CQ_{n-1}^1，其中 CQ_{n-1}^0 和 CQ_{n-1}^1 各顶点的最高位分别是 0 和 1。设 $u=0u_{n-2}u_{n-3}\cdots u_0\in V\left(CQ_{n-1}^0\right)$，$v=1v_{n-2}v_{n-3}\cdots v_0\in V\left(CQ_{n-1}^1\right)$，则 u 和 v 在 CQ_n 中相邻当且仅当

(1) 如果 n 是偶数，$u_{n-2}=v_{n-2}$；

(2) 当 $0\le i\le\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor$ 时，$u_{2i+1}u_{2i}\sim v_{2i+1}v_{2i}$。

我们称 CQ_{n-1}^0 与 CQ_{n-1}^1 之间的边为交叉边。显然，这些交叉边的集合是 CQ_n 的一个完美匹配。

定义 2.5：交叉立方体 CQ_n 的顶点集为 $\left\{v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0\,\middle|\,v_i\in\{0,1\},0\le i\le n-1\right\}$，两个顶点 $u=u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_0$，$v=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_0$ 相邻当且仅当满足以下条件之一。

条件 1：存在一个整数 d，$1\le d\le n-1$ 使得

(1) $u_{n-1}u_{n-2}\cdots u_d=v_{n-1}v_{n-2}\cdots v_d$；

(2) $u_{d-1}\ne v_{d-1}$；

(3) 如果 d 是偶数，$u_{d-2}=v_{d-2}$；

(4) 当 $0\le i\le\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ 时，$u_{2i+1}u_{2i}\sim v_{2i+1}v_{2i}$。

条件 2：

(1) $u_{n-1}\ne v_{n-1}$；

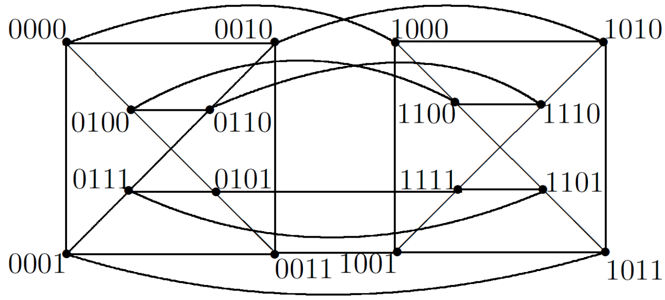


Figure 1. The 4-dimensional crossed cube CQ_4
图 1. 4 维交叉立方体 CQ_4

(2) 如果 n 是偶数，$u_{n-2} = v_{n-2}$；

(3) 当 $0 \le i < \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 时，$u_{2i+1}u_{2i} \sim v_{2i+1}v_{2i}$。

3. CQ_n 的 1 好邻连通度

引理 3.1： 交叉立方体 CQ_n 中任意两个顶点至多有两个公共邻点。

证明： 因为 CQ_n 没有三圈，所以任意两个相邻的顶点没有公共邻点。设 u，v 是 CQ_n 中任意两个不相邻的顶点。用归纳法证明 u 和 v 至多有两个公共邻点。当 $n = 2$ 时，CQ_2 是一个四圈，结论成立。假设 $n-1$ 时结论都成立，现证 $n(n \ge 3)$ 时结论也成立。将 CQ_n 沿最高位分解成两个 $n-1$ 维的子图 CQ_{n-1}^0 和 CQ_{n-1}^1，则 CQ_{n-1}^0 和 CQ_{n-1}^1 之间存在完美匹配(如图 1)。若 u 和 v 在同一个 $n-1$ 维的子图中，不失一般性，假设 $u, v \in V\left(CQ_{n-1}^0\right)$。由归纳假设 u 和 v 在 CQ_{n-1}^0 中至多有两个公共邻点。因为 CQ_{n-1}^0 和 CQ_{n-1}^1 之间存在完美匹配，所以 u 和 v 在 CQ_{n-1}^1 中没有公共邻点。若 u 和 v 分别在两个 $n-1$ 维的子图中，不失一般性，假设 $u \in V\left(CQ_{n-1}^0\right)$ 和 $v \in V\left(CQ_{n-1}^1\right)$。因为 CQ_{n-1}^0 和 CQ_{n-1}^1 之间存在完美匹配，所以 u 与 v 在 CQ_{n-1}^1 中至多有一个公共邻点。因此，u 和 v 在 CQ_n 中至多有两个公共邻点。由 u 和 v 的任意性，CQ_n 中任意两个不相邻的顶点至多有两个公共邻点。

引理 3.2 [8]： 交叉立方体 CQ_n 的连通度 $\kappa\left(CQ_n\right) = n \ (n \ge 1)$。

引理 3.3： 当 $n \ge 4$ 时，对任意的 $uv \in E\left(CQ_n\right)$，设 $A = \{u, v\}$ 且 $F = N_{CQ_n}(A)$，则 $\delta\left(CQ_n - (A \cup F)\right) \ge 1$。

证明： 要证 $\delta\left(CQ_n - (A \cup F)\right) \ge 1$，只需证明 $CQ_n - (A \cup F)$ 不含孤立点。当 $n = 4$ 时结论显然成立。用反证法证明 $n \ge 5$ 时结论也成立。假设 w 是 $CQ_n - (A \cup F)$ 中的孤立点，则 $N_{CQ_n}(w) \subset F$。因为 $A = \{u, v\}$ 和 $F = N_{CQ_n}(A)$，所以 $N_{CQ_n}(u) \subset F$ 和 $N_{CQ_n}(v) \subset F$。根据引理 3.1，可得 $\left|N_{CQ_n}(w) \cap N_{CQ_n}(u)\right| \le 2$ 和 $\left|N_{CQ_n}(w) \cap N_{CQ_n}(v)\right| \le 2$。于是，$\left|N_{CQ_n}(w) \cap F\right| \le 4$。因为 CQ_n 是 n 正则图，所以 $\left|N_{CQ_n}(w)\right| = n \ge 5$。因此，$w$ 至少存在一个邻点不在 F 中。这与 $N_{CQ_n}(w) \subset F$ 矛盾。所以 $CQ_n - (A \cup F)$ 不含孤立点。故 $\delta\left(CQ_n - (A \cup F)\right) \ge 1$。

引理 3.4： 交叉立方体 CQ_n 的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}\left(CQ_n\right) \le 2n - 2 (n \ge 4)$。

证明： 设 A 和 F 的定义与引理 3.3 相同，则 F 是一个割。因为 CQ_n 不包含三圈，所以 $|F| = 2n - 2$。根据引理 3.3，可得 $\delta\left(CQ_n - (A \cup F)\right) \ge 1$。又因为 $\delta\left(CQ_n[A]\right) = 1$。因此，$F$ 是一个 1 好邻割。故 $\kappa^{(1)}\left(CQ_n\right) \le |F| = 2n - 2$。

引理 3.5： 交叉立方体 CQ_n 的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}\left(CQ_n\right) \ge 2n - 2 (n \ge 4)$。

证明： 设 F 是 CQ_n 的任意的一个 1 好邻割。根据 1 好邻连通度的定义，要证 $\kappa^{(1)}\left(CQ_n\right) \ge 2n - 2$，只

需证明$|F|\ge 2n-2$。用反证法证明。假设$|F|\le 2n-3$。因为 F 是 1 好邻割，所以CQ_n-F没有孤立点且不连通。将 CQ_n 沿最高位分解成两个$n-1$维的子图CQ_{n-1}^0和CQ_{n-1}^1。则CQ_{n-1}^0和CQ_{n-1}^1同构于CQ_{n-1}。设$F_0=F\cap V\left(CQ_{n-1}^0\right)$，$F_1=F\cap V\left(CQ_{n-1}^1\right)$和$|F_0|\le|F_1|$，则$F=F_0\cup F_1$且$F_0\cap F_1=\varnothing$。因为$|F_0|\le|F_1|$，所以$|F_0|\le n-2$。根据引理 3.2，可得$\kappa\left(CQ_{n-1}\right)=n-1$。因此，$CQ_{n-1}^0-F_0$连通。设$CQ_{n-1}^1-F_1$是连通的。由于$2^{n-1}>2n-3(n\ge 4)$和在$CQ_{n-1}^0$与$CQ_{n-1}^1$间的交叉边是$CQ_n$的一个完美匹配，$CQ_n\left[V\left(CQ_{n-1}^0-F_0\right)\cup V\left(CQ_{n-1}^1-F_1\right)\right]$是连通的，即$CQ_n-F$是连通的。这个矛盾到$CQ_n-F$是不连通的。因此，设$CQ_{n-1}^1-F_1$是不连通的。由引理 3.2，$|F_1|\ge n-1$。设$B_1,\cdots,B_k\ (k\ge 2)$是$CQ_{n-1}^1-F_1$的分支。设$|V(B_i)|=1$和设$V(B_i)=\{u\}$。由于 F 是 1 好邻割，所以在$CQ_{n-1}^0-F_0$中存在一点 v 使得$uv\in E\left(CQ_n-F\right)$。即，$CQ_n\left[V\left(CQ_{n-1}^0-F_0\right)\cup V\left(B_i\right)\right]$是连通的。设$\left|V\left(B_j\right)\right|\ge 2$和设$ab\in E\left(B_j\right)$。设在$CQ_{n-1}^0-F_0$中存在一点，它相邻到 a 和 b 中至少一个。则$CQ_n\left[V\left(CQ_{n-1}^0-F_0\right)\cup V\left(B_i\right)\right]$是连通的。设在$CQ_{n-1}^0-F_0$中不存在一点，它相邻到$a$和$b$两个。由于在$CQ_{n-1}^0$与$CQ_{n-1}^1$间的交叉边是$CQ_n$的一个完美匹配，所以$|F_0|\ge 2$。由于$n\ge 4$，所以$2\le|F_0|\le n-2$。由于$|F|\le 2n-3$，所以$n-1\le|F_1|\le 2n-5$。注意到$\left|N_{CQ_{n-1}^1}\left(\{a,b\}\right)\right|=2(n-1)-2=2n-4$。由于$\left|N_{CQ_{n-1}^1}\left(\{a,b\}\right)\right|=2n-4>2n-5\ge|F_0|-2+|F_1|$，所以在$CQ_{n-1}^0-F_0$中存在一点，它相邻到 a，b 邻集中一点，即$CQ_n\left[V\left(CQ_{n-1}^0-F_0\right)\cup V\left(B_j\right)\right]$是连通的。因此，$CQ_n\left[V\left(CQ_{n-1}^0-F_0\right)\cup V\left(CQ_{n-1}^1-F_1\right)\right]$是连通的，即，$CQ_n-F$是连通的。这个矛盾到$CQ_n-F$是不连通的。

结合引理 3.4 和引理 3.5 可得以下定理：

定理 3.6： 交叉立方体 CQ_n 的 1 好邻连通度$\kappa^{(1)}\left(CQ_n\right)=2n-2(n\ge 4)$。

4. CQ_n 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度

定理 4.1 [4]： 一个系统$G=(V,E)$在 PMC 模型下是 g 好邻 t-可诊断的当且对于 V 中任意两个不同的顶点数至多为 t 的 g 好邻故障集 F_1，F_2，存在$u\in V\setminus\left(F_1\cup F_2\right)$和$v\in F_1\Delta F_2$，使得$uv\in E$ (如图 2)。

引理 4.2： 最小度为 1 的图至少有两个顶点。

引理 4.3： 交叉立方体 CQ_n 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度$t_1\left(CQ_n\right)\le 2n-1(n\ge 4)$。

证明： 对任意的$uv\in E\left(CQ_n\right)$，设$A=\{u,v\}$，$F_1=N_{CQ_n}(A)$和$F_2=A\cup F_1$。因为CQ_n不包含三圈，所以$|F_1|=2n-2$和$|F_2|=2n$。根据引理 3.3，可得$\delta\left(CQ_n-F_2\right)\ge 1$。又因为$\delta\left(CQ_n[A]\right)=1$，所以 F_1，F_2 是 CQ_n 的两个 1 好邻故障集。因为$F_1\Delta F_2=A$，所以在$V\left(CQ_n\right)\setminus\left(F_1\cup F_2\right)$和$F_1\Delta F_2$之间没有边。由定理 4.1，$CQ_n$ 不是 1 好邻 $2n$-可诊断的。因此，$t_1\left(CQ_n\right)\le 2n-1$。

引理 4.4： 交叉立方体 CQ_n 在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度$t_1\left(CQ_n\right)\ge 2n-1(n\ge 4)$。

证明： 根据 1 好邻诊断度的定义，需要证明 CQ_n 是 1 好邻$(2n-1)$-可诊断的。根据定理 4.1，等价于证明任意两个不同的 1 好邻故障集 F_1，F_2，其中$|F_1|\le 2n-1$和$|F_2|\le 2n-1$，存在$u\in V\left(CQ_n\right)\setminus\left(F_1\cup F_2\right)$和$v\in F_1\Delta F_2$，使得$uv\in E\left(CQ_n\right)$。反证法。假设存在两个不同的 1 好邻故障集 F_1，F_2，其中$|F_1|\le 2n-1$和$|F_2|\le 2n-1$，对任意的$u\in V\left(CQ_n\right)\setminus\left(F_1\cup F_2\right)$和$v\in F_1\Delta F_2$都有$uv\notin E\left(CQ_n\right)$。不失一般性，假设$F_2\setminus F_1\ne\varnothing$。分以下两种情况进行讨论：

情形 1： $V\left(CQ_n\right)=F_1\cup F_2$。

$2^n=\left|V\left(CQ_n\right)\right|=|F_1|+|F_2|-|F_1\cap F_2|\le|F_1|+|F_2|\le 2n-1+2n-1=4n-2$。当$n\ge 4$时，上述不等式矛盾。

情形 2： $V\left(CQ_n\right)\ne F_1\cup F_2$。

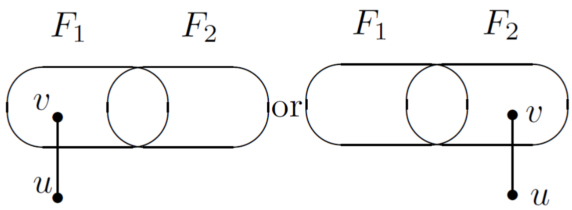


Figure 2. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the PMC model
图 2. 在 PMC 模型下可区分对(F_1, F_2)

根据假设$V(CQ_n)\setminus(F_1\cup F_2)$与$F_1\Delta F_2$之间没有边和$F_1$是 1 好邻条件故障集，可得$\delta(CQ_n-F_1\cup F_2)\ge 1$和$\delta(CQ_n[F_2\setminus F_1])\ge 1$。同理，若$F_1\setminus F_2\ne\varnothing$，$\delta(CQ_n[F_1\setminus F_2])\ge 1$。因此，$F_1\cap F_2$也是 1 好邻条件故障集。又因为$V(CQ_n)\setminus(F_1\cup F_2)$与$F_1\Delta F_2$之间没有边，所以$CQ_n-F_1-F_2$不连通。故$F_1\cap F_2$是$CQ_n$的 1 好邻割。根据定理 3.6，可得$|F_1\cap F_2|\ge 2n-2$。根据引理 4.2，可得$|F_2\setminus F_1|\ge 2$。因此，$|F_2|=|F_2\setminus F_1|+|F_1\cap F_2|\ge 2+2n-2=2n$。这与$|F_2|\le 2n-1$相矛盾。

由于以上两种情况都产生矛盾，故CQ_n是 1 好邻$(2n-1)$-可诊断的。于是，$t_1(CQ_n)\ge 2n-1$。

结合引理 4.3 和引理 4.4，可得以下定理：

定理 4.5： 交叉立方体$CQ_n\,(n\ge 4)$在 PMC 模型下的 1 好邻诊断度$t_1(CQ_n)=2n-1(n\ge 4)$。

5. CQ_n在 MM*模型下的 1 好邻诊断度

定理 5.1 [4]**：** 一个系统$G=(V,E)$在 MM*模型下是g好邻t-可诊断的当且仅当对V中任意两个不同的顶点数至多为t的g好邻故障集F_1，F_2，满足以下其中一个条件(如图 3)：

(1) 存在$u,w\in V\setminus(F_1\cup F_2)$和$v\in F_1\Delta F_2$满足$uw,vw\in E$。

(2) 存在$u,v\in F_1\setminus F_2$和$w\in V\setminus(F_1\cup F_2)$满足$uw,vw\in E$。

(3) 存在$u,v\in F_2\setminus F_1$和$w\in V\setminus(F_1\cup F_2)$满足$uw,vw\in E$。

引理 5.2： 交叉立方体CQ_n在 MM*模型下的 1 好邻诊断度$t_1(CQ_n)\le 2n-1(n\ge 4)$。

证明： 对任意的$uv\in E(CQ_n)$，设$A=\{u,v\}$，$F_1=N_{CQ_n}(A)$和$F_2=A\cup F_1$。因为CQ_n不包含三圈，所以$|F_1|=2n-2$和$|F_2|=2n$。由引理 3.3，可得$\delta(CQ_n-F_1)\ge 1$和$\delta(CQ_n-F_2)\ge 1$。因此，F_1，F_2是CQ_n的两个 1 好邻故障集且$|F_1|\le 2n$，$|F_2|\le 2n$。因为$F_1\Delta F_2=A$，$V(CQ_n)\setminus(F_1\cup F_2)=V(CQ_n)\setminus F_2$且$A$与$V(CQ_n)\setminus F_2$之间没有边，所以$F_1$，$F_2$不满足定理 5.1 中的(1)~(3)。因此，$CQ_n$不是 1 好邻条件$2n$可诊断的。故$t_1(CQ_n)\le 2n-1$。

引理 5.3： 交叉立方体CQ_n在 MM*模型下的 1 好邻诊断度$t_1(CQ_n)\ge 2n-1(n\ge 5)$。

证明： 根据 1 好邻诊断度的定义，需要证明CQ_n是 1 好邻$(2n-1)$-可诊断的。反证法。根据定理 5.1，假设$V(CQ_n)$中存在两个不同的顶点数至多为$2n-1$的故障集F_1,F_2不满足定理 5.1 中的(1)~(3)。不失一般性，假设$F_2\setminus F_1\ne\varnothing$。分以下两种情况进行讨论：

情形 1： $V(CQ_n)=F_1\cup F_2$。

证明同引理 4.4 的情形 1。

情形 2： $V(CQ_n)\ne F_1\cup F_2$。

断言 1： $CQ_n-F_1-F_2$没有孤立点。

反证法。假设$CQ_n-F_1-F_2$至少有一个孤立点w。因为F_1是一个 1 好邻故障集，所以至少存在一点$u\in F_2\setminus F_1$使得$uw\in E(CQ_n)$。因为F_1，F_2不满足定理 5.1 中的(3)，所以至多存在一点$u\in F_2\setminus F_1$使得$uw\in E(CQ_n)$。因此仅有一点$u\in F_2\setminus F_1$使得$uw\in E(CQ_n)$。同理，当$F_1\setminus F_2\ne\varnothing$时，仅有一点$v\in F_1\setminus F_2$使

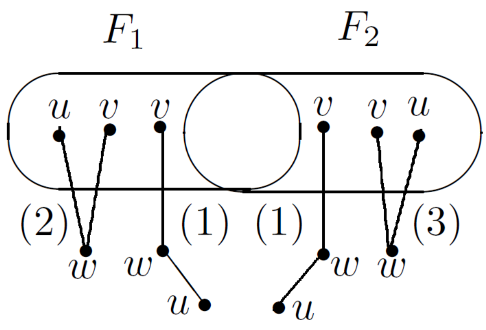


Figure 3. A distinguishable pair (F_1, F_2) under the MM* model

图 3. 在 MM*模型下可区分对(F_1, F_2)

得 $vw \in E(CQ_n)$。设 W 是 $CQ_n[V(CQ_n)\setminus(F_1\cup F_2)]$ 中的孤立点集，$H = CQ_n[V(CQ_n)-F_1-F_2-W]$。因此，当 $F_1\setminus F_2 \neq \varnothing$ 时，对任意的 $w\in W$，存在 $(n-2)$ 个邻点在 $F_1\cap F_2$ 中。由于 $|F_2|\le 2n-1$，故 $\sum_{w\in W}\left|N_{CQ_n[(F_1\cap F_2)\cup W]}(w)\right| \le |W|(n-2) \le \sum_{v\in F_1\cap F_2} d_{CQ_n}(v) \le |F_1\cap F_2| n \le (|F_2|-1)n \le (2n-2)n = 2n^2-2n$。因为 $n\ge 5$，所以 $|W| < 2n+4$。假设 $V(H)=\varnothing$，有

$2^n = |V(CQ_n)| = |F_1\cup F_2| + |W| = |F_1| + |F_2| - |F_1\cap F_2| + |W| < 2(2n-1)-(n-2)+2n+4 = 5n+4$。当 $n\ge 5$ 时，上式矛盾。所以，$V(H)\neq\varnothing$。因为 F_1，F_2 不满足定理 5.1 中的(1)且 $V(H)$ 的任意一点在 H 中不是孤立点，所以 $V(H)$ 与 $F_1\Delta F_2$ 之间不存在边相连。因此，$F_1\cap F_2$ 是 CQ_n 的点割且 $\delta(CQ_n-(F_1\cap F_2))\ge 1$，即 $F_1\cap F_2$ 是 CQ_n 的一个 1 好邻割。根据定理 3.6，$|F_1\cap F_2|\ge 2n-2$。因为 $|F_1|\le 2n-1$，$|F_2|\le 2n-1$ 且 $F_1\setminus F_2$ 和 $F_2\setminus F_1$ 都非空，所以 $|F_1\setminus F_2| = |F_2\setminus F_1| = 1$。于是，设 $F_1\setminus F_2=\{v_1\}$ 和 $F_2\setminus F_1=\{v_2\}$。故对于任意的 $w\in W$ 满足 $wv_1, wv_2\in E(CQ_n)$。根据引理 3.1，v_1 与 v_2 至多有两个公共邻点。因此，$CQ_n-F_1-F_2$ 至多有两个孤立点。

假设 $CQ_n-F_1-F_2$ 中恰有一个孤立点 v，则 $vv_1, vv_2\in E(CQ_n)$ 和 $N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$。因为 CQ_n 不包含三圈，所以 $N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v\}\subseteq F_1\cap F_2$，$N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v\}\subseteq F_1\cap F_2$，$[N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}]\cap[N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v\}]=\varnothing$ 和 $[N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}]\cap[N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v\}]=\varnothing$。根据引理 3.1，$v_1$ 与 v_2 至多有两个公共邻点，所以 $[N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v\}]\cap[N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v\}]\le 1$。因此，

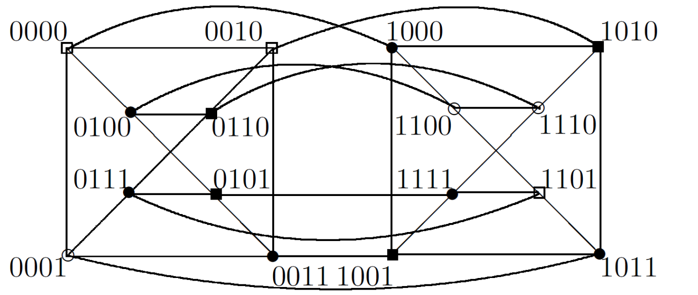
$|F_1\cap F_2| \ge |N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}| + |N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v\}| + |N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v\}| - 1 = (n-2)+(n-1)+(n-1)-1 = 3n-5$。于是，$|F_2| = |F_2\setminus F_1| + |F_1\cap F_2| \ge 1+3n-5 = 3n-4 > 2n-1$ $(n\ge 5)$。这与 $|F_2|\le 2n-1$ 矛盾。

假设 $CQ_n-F_1-F_2$ 中恰有两个孤立点 v 和 v' 则 $vv_1, vv_2, v'v_1, v'v_2\in E(CQ_n)$，$N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$ 和 $N_{CQ_n}(v')\setminus\{v_1,v_2\}\subseteq F_1\cap F_2$。因为 CQ_n 不包含三圈，所以 $N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v,v'\}\subseteq F_1\cap F_2$ 和 $N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v,v'\}\subseteq F_1\cap F_2$。又因为任意两点至多有两个公共邻点，所以 $N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}$，$N_{CQ_n}(v')\setminus\{v_1,v_2\}$，$N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v,v'\}$ 和 $N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v,v'\}$ 中任意两个集合在 $F_1\cap F_2$ 中都没有公共点。因此

$|F_1\cap F_2| \ge |N_{CQ_n}(v)\setminus\{v_1,v_2\}| + |N_{CQ_n}(v')\setminus\{v_1,v_2\}| + |N_{CQ_n}(v_1)\setminus\{v,v'\}| + |N_{CQ_n}(v_2)\setminus\{v,v'\}| = 4(n-2) = 4n-8$ 于是，$|F_2| = |F_2\setminus F_1| + |F_1\cap F_2| \ge 1+4n-8 = 4n-7 > 2n-1(n\ge 5)$，这与 $|F_2|\le 2n-1$ 矛盾。

若 $F_1\setminus F_2=\varnothing$，则 $F_1\subseteq F_2$。因为 F_2 是一个 1 好邻故障集，所以 $CQ_n-F_2 = CQ_n-F_1-F_2$ 没有孤立点。断言 1 证明完毕。

设 $u\in V(CQ_n)\setminus(F_1\cup F_2)$。根据断言 1，$u$ 在 $CQ_n-F_1-F_2$ 中至少有一个邻点。因为 F_1，F_2 不满足定理 5.1，根据定理 5.1(1)，所以对于任意一对相邻的点 $u,w\in V(CQ_n)\setminus(F_1\cup F_2)$，不存在 $v\in F_1\Delta F_2$ 使得



□: $F_1 \setminus F_2$ ■: $F_1 \cap F_2$ ○: $F_2 \setminus F_1$ ●: $W = V \setminus (F_1 \cup F_2)$

Figure 4. CQ_4 is not 1-good-neighbor 7-diagnosable
图 4. CQ_4 不是 1 好邻 7-可诊断的

$uw \in E(CQ_n)$ 和 $wv \in E(CQ_n)$。因此，u 在 $F_1 \Delta F_2$ 中没有邻点。由 u 的任意性，$V(CQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 中间没有边。因为 F_1 是一个 1 好邻故障集且 $F_2 \setminus F_1 \neq \varnothing$，所以 $\delta(CQ_n[F_2 \setminus F_1]) \geq 1$。根据引理 4.5，$|F_2 \setminus F_1| \geq 2$。因为 F_1 和 F_2 都是 1 好邻故障集且 $V(CQ_n) \setminus (F_1 \cup F_2)$ 与 $F_1 \Delta F_2$ 之间没有边，所以 $F_1 \cap F_1$ 是 CQ_n 的一个 1 好邻割。根据定理 3.6，$|F_1 \cap F_2| \geq 2n-2$。因此，$|F_2| = |F_2 \setminus F_1| + |F_1 \cap F_2| \geq 2 + 2n - 2 = 2n$。这与 $|F_2| \leq 2n-1$ 矛盾。于是，CQ_n 是一个 1 好邻 $(2n-1)$-可诊断的。故 $t_1(CQ_n) \geq 2n-1$。

结合引理 5.2 和引理 5.3 可得以下定理：

定理 5.4： 交叉立方体 CQ_n 在 MM*模型下的 1 好邻诊断度 $t_1(CQ_n) = 2n-1 (n \geq 5)$。

下面的例子说明当 $n = 4$ 时，CQ_4 在 MM*模型下不是 1 好邻 7-可诊断的。设 $F_1 = \{0000, 0010, 1101, 0110, 0101, 1001, 1010\}$ 和 $F_2 = \{0001, 1100, 1110, 0110, 0101, 1001, 1010\}$。容易验证 F_1 和 F_2 不满足定理 5.1 中的(1)~(3) (如图 4)，所以 CQ_4 在 MM*模型下不是 1 好邻 7-可诊断的。

6. 结束语

连通度和诊断度是互联网络容错的重要指标，本文研究了交叉立方体的 1 好邻连通度 $\kappa^{(1)}(CQ_n) = 2n-2 (n \geq 4)$ 和 1 好邻诊断度 $t_1(CQ_n) = 2n-1$。它是交叉立方体传统诊断度的两倍，意味着系统能够诊断出更多的故障结点。此外，本文还证明了在 MM*模型下 CQ_4 不是 1 好邻 7-可诊断的。这为今后进一步研究交叉立方体网络的 g 好邻连通度、诊断度和相关诊断算法提供了理论基础。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(61370001)，教育部博士点基金(博导类)资助项目(20111401110005)。

参考文献 (References)

[1] Preparata, F., Metze, G. and Chien, R.T. (1968) On the Connection Assignment Problem of Diagnosable Systems. *IEEE Transactions on Electronic Computers*, **12**, 848-854.

[2] Maeng, J. and Malek, M. (1981) A Comparison Connection Assignment for Self-Diagnosis of Multiprocessor Systems. *Proceeding of* 11*th International Symposium on Fault-Tolerant Computing*, 173-175.

[3] Lai, P.-L., Tan, J.J.M., Chang, C.-P. and Hsu, L.-H. (2005) Conditional Diagnosability Measures for Large Multiprocessor Systems. *IEEE Transactions on Computers*, **54**, 165-175. http://dx.doi.org/10.1109/TC.2005.19

[4] Peng, S.-L., Lin, C.-K., Tan, J.J.M. and Hsu, L.-H. (2012) The g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of Hypercube under the PMC Model. *Applied Mathematics Computation*, **218**, 10406-10412. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2012.03.092

[5] Yuan, J., Liu, A.X., Ma, X., Liu, X.L., Qin, X. and Zhang, J.F. (2015) The g-Good-Neighbor Conditional Diagnosability of k-Ary n-Cubes under the PMC Model and MM* Model. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **26**, 1165-1177. http://dx.doi.org/10.1109/TPDS.2014.2318305

[6] Wang, M.J.S., Guo, Y.B. and Wang, S.Y. (2015) The 1-Good-Neighbor Diagnosability of Cayley Graphs Generated by

Transposition Trees under the PMC Model and MM* Model. *International Journal of Computer Mathematics*.

[7] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (2007) Graph Theory. Springer, New York.

[8] Efe, K. (1992) The Crossed Cube Architecture for Parallel Computation. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, **3**, 513-524. http://dx.doi.org/10.1109/71.159036