Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 375-380
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53046

Symmetry Reduction and Its Numerical Solution to the Boundary Value Problem of a Nonlinear Partial Differential Equation

Yanqing Han, Bilige Sudao*

College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot Inner Mongolia
Email: *inmathematica@126.com

Received: Jul. 27th, 2016; accepted: Aug. 15th, 2016; published: Aug. 18th, 2016

Abstract

We study the applications of the symmetry method on the boundary value problem for nonlinear partial differential equation. Firstly, the multi-parameter symmetry of a given boundary value problem for nonlinear partial differential equation is determined based on differential characteristic set algorithm. Secondly, by using the symmetry, the boundary value problem for nonlinear partial differential equation is reduced to an initial value problem of the original differential equation. Finally, we numerically solve the initial value problem of the original differential equations by using Runge-Kutta method.

Keywords

Boundary Value Problem for Nonlinear Partial Differential Equation, Differential Characteristic Set Algorithm, Symmetry Method, Runge-Kutta Method

一个非线性偏微分方程边值问题的对称约化及其数值解

韩雁清，苏道毕力格*

内蒙古工业大学理学院，内蒙古 呼和浩特

*通讯作者。

文章引用: 韩雁清，苏道毕力格. 一个非线性偏微分方程边值问题的对称约化及其数值解[J]. 应用数学进展，2016, 5(3): 375-380. http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53046

Email: *inmathematica@126.com

收稿日期：2016年7月27日；录用日期：2016年8月15日；发布日期：2016年8月18日

摘 要

本文研究了微分方程对称方法在非线性偏微分方程边值问题中的应用。首先，基于微分特征列集算法确定了给定非线性偏微分方程边值问题的多参数对称；其次，利用对称将非线性偏微分方程边值问题化为常微分方程初值问题；最后，利用龙格-库塔法求解了常微分方程初值问题的数值解。

关键词

非线性偏微分方程边值问题，微分特征列集算法，对称方法，龙格－库塔法

1. 引言

Lie 对称是公认的普适性方法之一，它以诸多传统方法为其特例，如：分离变量法、行波变换、相似变换等[1]。对称理论在现代数学、物理和力学等科学中有重要的理论和实际意义，并且已有了广泛的应用[2] [3]。但是除了在文[1] [4] [5]中研究者做了一些对称群在边值问题的应用外，这方面的研究还很少，所以利用对称群研究偏微分方程(简记为 PDEs)边值问题是对称理论应用新的研究领域。在诸多求解非线性的问题中，常常利用相似变换对 PDEs 进行约化或降阶。我们知道 PDEs 的 Lie 变换群可以产生更一般形式的相似变换，并且这些变换有更多的数学和物理意义，所以利用对称方法研究非线性 PDEs 边值问题比直接用相似变换更有其优越性。

最近我们基于微分特征列集算法[6] [7]研究了对称方法在非线性 PDEs 边值问题中的应用，并且将对称方法、对称分类与数值方法、同伦分析方法进行结合解决了非线性 PDEs 边值问题[8]-[11]。也有研究者基于微分特征列集算法，将对称方法与变分迭代法、同伦摄动法结合，求解了 PDEs 边值问题[12] [13]。本文中，我们将基于微分特征列集算法，有效结合对称方法和数值方法求解一个非线性 PDEs 边值问题。

2. 一个非线性 PDEs 边值问题的对称约化及其数值解

考虑一个如下非线性 PDEs 边值问题

$$\begin{cases} p_x + w_y = 0 \\ pp_x + wp_y = ap_{yy} \end{cases} \tag{1}$$

其中 a 为常数。相应的边界条件为

$$w(x,0) = B_1(x),\quad p(x,0) = B_2(x)，若\ y = 0 \tag{2}$$

$$p_y(x,0) = B_3(x)，若\ y = 0 \tag{3}$$

下面引入流函数 u

$$p = u_y, w = -u_x \tag{4}$$

将上面的关系代入(1)~(3)，得到

$$u_y u_{xy} - u_x u_{yy} - au_{yyy} = 0 \tag{5}$$

满足边界条件

$$u_x(x,0)=-B_1(x)，\quad u_y(x,0)=B_2(x)，\text{若 } y=0 \tag{6}$$

$$u_{yy}(x,0)=B_3(x)，\text{若 } y=0 \tag{7}$$

其中函数 $B_i(x)$， $i=1,2,3$ 在后面根据边界条件在对称作用下的不变性来确定。

2.1. 边值问题的对称约化

下面利用对称方法约化边值问题(5)~(7)。

第一步：确定 PDE 边值问题(5)~(7)的多参数对称。

假设非线性 PDE(5)的对称的无穷小向量为

$$X=\xi(x,y,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,y,u)\frac{\partial}{\partial y}+\eta(x,y,u)\frac{\partial}{\partial u}$$

其中 $\xi(x,y,u)$， $\tau(x,y,u)$， $\eta(x,y,u)$ 为该对称的无穷小生成函数。

1) 产生关于无穷小生成函数的确定方程组。

根据 Lie 算法，利用产生确定方程组的算法[7]可得到方程(5)的对称的确定方程组，但是难于人工求解。我们可以利用微分特征列集程序包进行计算得到与确定方程组等价的特征列集对应的方程组，即

$$\eta_y=\eta_x=0,\xi_u=\xi_y=0,\xi_{xx}=0,\tau_u=0,\eta_u-\xi_x+\tau_y=0,\tau_{yy}=\tau_{xy}=0 \tag{8}$$

2) 确定多参数对称。

通过求解方程组(8)，得到无穷小生成函数

$$\xi=c_1x+c_2,\tau=c_3y+c(x),\eta=(c_1-c_3)u+c_4$$

即可得到对称的无穷小向量为

$$X=(c_1x+c_2)\frac{\partial}{\partial x}+\left[c_3y+c(x)\right]\frac{\partial}{\partial y}+\left[(c_1-c_3)u+c_4\right]\frac{\partial}{\partial u} \tag{9}$$

其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数， $c(x)$ 为任意函数。

第二步：约化边值问题。利用对称(9)将边值问题(5)~(7)约化为常微分方程初值问题。

对称(9)的特征方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{c_1x+c_2}=\frac{\mathrm{d}y}{c_3y+c(x)}=\frac{\mathrm{d}u}{(c_1-c_3)u+c_4}$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{c_1x+c_2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{c_3y+c(x)}$， 得到不变量

$$\xi=-(c_2+c_1x)^{-\frac{c_3}{c_1}}\left[-y+(c_2+c_1x)^{\frac{c_3}{c_1}}\int_1^x c(z)(c_2+c_1z)^{-1-\frac{c_3}{c_1}}\mathrm{d}z\right]$$

同理可从特征方程得到

$$u=\frac{c_4}{-c_1+c_3}+(c_2+c_1x)^{\frac{c_1-c_3}{c_1}}f(\xi) \tag{10}$$

将(10)代入方程(5)，可得到常微分方程

$$(c_1-2c_3)f'(\xi)^2+(-c_1+c_3)f(\xi)f''(\xi)-af'''(\xi)=0 \tag{11}$$

根据 PDEs 边值问题的边界条件在对称群作用下的不变性[1]知，边界条件(6)，(7)在对称(9)的延拓作用下不变，故有

$$X^{(1)}\left[u_x(x,y)+B_1(x)\right]=0\text{，当 }u_x(x,0)=-B_1(x) \tag{12}$$

$$X^{(1)}\left[u_y(x,y)-B_2(x)\right]=0\text{，当 }u_y(x,0)=B_2(x) \tag{13}$$

$$X^{(2)}\left[u_{yy}(x,y)-B_3(x)\right]=0\text{，当 }u_{yy}(x,0)=B_3(x) \tag{14}$$

其中 $X^{(1)}$ 为对称 X 的一阶延拓的无穷小向量， $X^{(2)}$ 为对称 X 的二阶延拓的无穷小向量，即

$$X^{(1)}=X-\left[c_3u_x+c'(x)u_y\right]\frac{\partial}{\partial u_x}+\left[(c_1-2c_3)u_y\right]\frac{\partial}{\partial u_y}$$

$$X^{(2)}=X^{(1)}-\left[(c_1+c_3)u_{xx}+c''(x)u_y+2c'(x)u_{xy}\right]\frac{\partial}{\partial u_{xx}}-2\left[2c_3u_{xy}+c'(x)u_{yy}\right]\frac{\partial}{\partial u_{xy}}$$
$$+\left[(c_1-3c_3)u_{yy}\right]\frac{\partial}{\partial u_{yy}}$$

由关系式(12)，(13)，(14)可以确定函数 $B_1(x),B_2(x),B_3(x)$，即

$$B_1(x)=b_1(c_2+c_1x)^{-\frac{c_3}{c_1}}+(c_2+c_1x)^{-\frac{c_3}{c_1}}\int_1^x b_2(c_2+c_1z)^{-\frac{c_3}{c_1}}c'(z)\mathrm{d}z$$

$$B_2(x)=b_2(c_2+c_1x)^{\frac{c_1-2c_3}{c_1}}\text{，}\quad B_3(x)=b_3(c_2+c_1x)^{\frac{c_1-3c_3}{c_1}}$$

其中 b_1,b_2,b_3 为任意常数。

为了对应边界条件(6)和(7)，取 $c(x)=0$，故有

当 $y=0$ 时， $\xi=0$

根据边界条件(6)，(7)和关系(10)，得到初值条件

$$f(0)=\frac{b_1}{c_3-c_1},\ f'(0)=b_2,\ f''(0)=b_3 \tag{15}$$

2.2. 边值问题的数值解

下面我们利用四阶龙格－库塔法求解常微分方程初值问题(11)，(15)的数值解。

为了使用龙格－库塔法，首先将(11)，(15)化为一阶常微分方程初值问题。令

$$y_1=f,\ y_2=f',\ y_3=f''$$

则(11)，(15)可以化为

$$y_1'=y_2,\ y_2'=y_3,\ y_3'=\frac{c_1-2c_3}{a}y_2^2+\frac{-c_1+c_3}{a}y_1y_3 \tag{16}$$

相应的有初值条件

$$y_1(0)=\frac{b_1}{c_3-c_1},\ y_2(0)=b_2,\ y_3(0)=b_3 \tag{17}$$

令

$$f_1=y_2,\ f_2=y_3,\ f_3=\frac{c_1-2c_3}{a}y_2^2+\frac{-c_1+c_3}{a}y_1y_3$$

其中 f_1, f_2, f_3 都是 ξ, y_1, y_2, y_3 的函数，那么可以建立龙格－库塔公式

$$y_{i,n+1} = y_{in} + \frac{h}{6}\left(k_{i1} + k_{i2} + k_{i3} + k_{i4}\right), i = 1,2,3$$

$$k_{i1} = f_i\left(\xi_n, y_{1n}, y_{2n}, y_{3n}\right)$$

$$k_{i2} = f_i\left(\xi_n + \frac{h}{2}, y_{1n} + \frac{h}{2}k_{11}, y_{2n} + \frac{h}{2}k_{21}, y_{3n} + \frac{h}{2}k_{31}\right)$$

$$k_{i3} = f_i\left(\xi_n + \frac{h}{2}, y_{1n} + \frac{h}{2}k_{12}, y_{2n} + \frac{h}{2}k_{22}, y_{3n} + \frac{h}{2}k_{32}\right)$$

$$k_{i4} = f_i\left(\xi_n + h, y_{1n} + hk_{13}, y_{2n} + hk_{23}, y_{3n} + hk_{33}\right)$$

其中 $\xi_0 = 0, \xi_n = \xi_0 + nh$， h 为步长。

常微分方程(16)中的常数 a 和初始条件(17)中的 b_1, b_2, b_3, c_1, c_3 取其不同值时，我们也可以得到相应的数值解。下面我们取 $b_1 = -2, b_2 = 2, b_3 = 1$，并且 $a = 1, c_1 = 1, c_3 = 2, h = 0.1$ 时，借助 Mathematica 符号系统可以得到函数 $f(\xi)$ 在区间 $[0,2]$ 上的数值解，如图 1 所示。

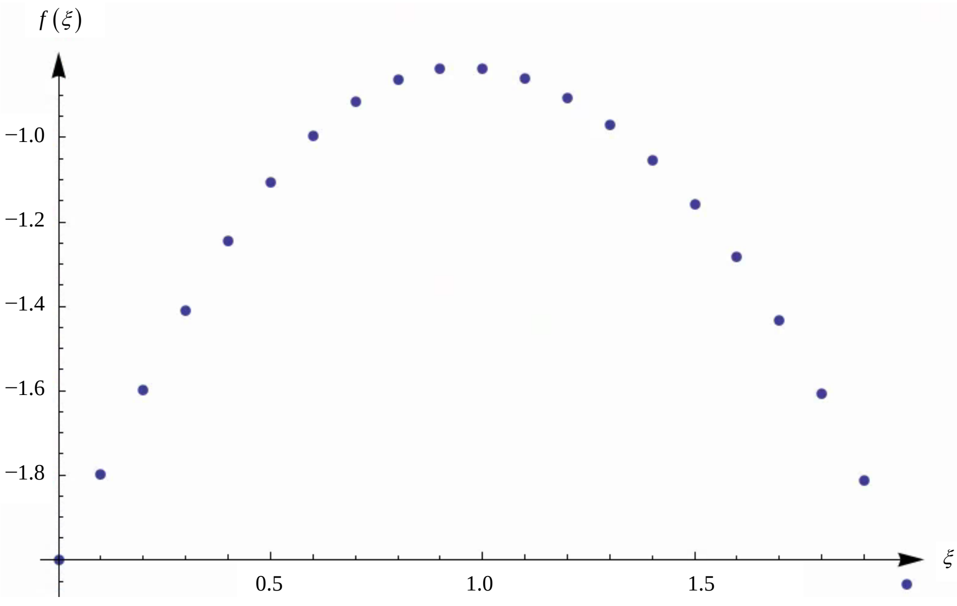

Figure 1. Nomerical solution of $f(\xi)$ in $[0,2]$

图 1. $f(\xi)$ 在 $[0,2]$ 上的数值解

3. 结论

本文研究了微分方程对称方法在非线性 PDE 边值问题中的应用，也探索了利用对称方法与数值方法的有效结合求解 PDE 边值问题的新途径。我们首先基于微分特征列集算法确定了给定非线性 PDE 边值问题的多参数对称，并利用对称将非线性 PDEs 边值问题约化为常微分方程初值问题。其次我们充分考虑到对称方法与数值方法的彼此互补性，借助于 Mathematica 符号系统利用四阶龙格－库塔法求解了上一步得到的常微分方程初值问题的数值解。得到的结果充分体现了对称方法在偏微分方程应用中的优越性，并且我们在本文中有效结合对称方法和数值方法求解了边值问题，这项研究也推广了对称方法的应用范围。

基金项目

本文由国家自然科学基金项目(11661060，11571008)，内蒙古自治区自然科学基金(2014MS0114)资助。

参考文献 (References)

[1] Bluman, G.W. and Kumei, S. (1989) Symmetries and Differential Equations. Spring-Verlag, New York, Berlin.

[2] Bluman, G., Cheviakov, A.F. and Anco, S.C. (2010) Applications of Symmetry Methods to Partial Differential. Spring-Verlag, New York.

[3] Ibragimov, N.H. and Ibragimov, R.N. (2012) Applications of Lie Group Analysis to Mathematical Modelling in Natural Sciences. *Mathematical Modelling of Natural Phenomena*, **7**, 52-65. http://dx.doi.org/10.1051/mmnp/20127205

[4] Seshadri, R. and Na, T.Y. (1985) Group Invariance in Engineering Boundary Value Problems. Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg Tokyo.

[5] Yürüsoy M,Pakdemirli M,Noyan O F. (2001) Lie Group Analysis of Creeping Flow of a Second Grade Fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **36**, 955-960. http://dx.doi.org/10.1016/S0020-7462(00)00060-3

[6] 朝鲁. 微分方程(组)对称向量的吴－微分特征列集算法及其应用[J]. 数学物理学报, 1999, 19(3): 326-332.

[7] 特木尔朝鲁, 白玉山. 基于吴方法的确定和分类(偏)微分方程古典和非古典对称新算法理论[J]. 中国科学: A 辑, 2010, 40(4): 1-18.

[8] 苏道毕力格. 一些求解偏微分方程解析解方法的研究[D]: [博士学位论文]. 呼和浩特: 内蒙古工业大学, 2011.

[9] 王晓民, 苏道毕力格, 特木尔朝鲁. 对称方法在非线性偏微分方程边值问题中的应用[J]. 内蒙古大学学报(自然科学版), 2013,44(2): 129-132.

[10] 苏道毕力格，王晓民，乌云莫日根. 对称分类在非线性偏微分方程组边值问题中的应用[J]. 物理学报，2014, 63(4): 040201.

[11] 苏道毕力格，王晓民，鲍春玲. 利用对称方法求解非线性偏微分方程组边值问题的数值解[J]. 应用数学，2014, 27(4): 10-15.

[12] Lu, L. and Temuer, C. (2011) A New Method for Solving Boundary Value Problems for Partial Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **61**, 2164-2167. http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2010.09.002

[13] Eerdunbuhe and Temuerchaolu (2012) Approximate Solution of the Magneto-Hydrodynamic Flow over a Nonlinear Stretching Sheet. *Chinese Physics B*, **21**, 035201. http://dx.doi.org/10.1088/1674-1056/21/3/035201