

The Constraints on the Generalized $f(R)$ Gravitational Model by the Generalized Second Law of Thermodynamics

Yueyue Zhao, Yanyan Qin, Lijun Feng, Hong Li

Department of Basic, Dalian Naval Academy, Dalian Liaoning
Email: zhaoyueyue198737@163.com

Received: May 8th, 2016; accepted: May 23rd, 2016; published: May 30th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

The generalized $f(R)$ gravity with curvature-matter coupling is studied in this paper. The generalized second law of thermodynamics (GSL) can be given by considering the FRW universe filled only with ordinary matter enclosed by the dynamical apparent horizon with the Hawking temperature. Furthermore, as a concrete example, by utilizing the GSL, the constraints on the gravitational model are also discussed.

Keywords

$f(R)$ Gravity, Coupling, Thermodynamics

热力学第二定律对广义 $f(R)$ 引力模型的限制

赵月月, 覃艳艳, 冯立军, 李红

海军大连舰艇学院基础部, 辽宁 大连
Email: zhaoyueyue198737@163.com

收稿日期: 2016年5月8日; 录用日期: 2016年5月23日; 发布日期: 2016年5月30日

摘要

本文构建广义的 $f(R)$ 引力即物质与曲率耦合的 $f(R)$ 引力理论, 在以动态表观视界为边界、其内部充满具

有霍金温度的普通物质的FRW宇宙背景下, 由广义 $f(R)$ 引力的场方程可推导出广义热力学第二定律, 并利用广义热力学第二定律对具体模型参数进行限制。

关键词

$f(R)$ 引力, 耦合, 热力学

1. 引言

众所周知, 最近的观测数据分析表明我们目前的宇宙是平坦的且正在经历加速膨胀的阶段。在原则上, 解释现阶段宇宙加速膨胀可分为两个方面: 一方面是根据最近的 WMAP 数据和普朗克数据表明, 占据了宇宙物质总成分的四分之三的暗能量, 具有大的负压强可导致宇宙的加速膨胀; 另一方面, 宇宙的加速膨胀可以通过引力的红外修正得到, 也就是修正引力理论。对爱因斯坦广义相对论的修正方法有很多, $f(R)$ 引力是极具竞争力的候选者, $f(R)$ 引力修正理论的显著特点是不需要引入暗能量, 通过对时空曲率的修正就能实现当前宇宙的加速膨胀。暗能量和修正引力理论都能够解释现阶段宇宙的加速膨胀, 然而它们却存在本质的区别, 前者意味着新成分的出现, 后者意味着新引力论的诞生。

本文以修正引力理论为立足点, 构建广义的 $f(R)$ 引力即物质与曲率耦合的 $f(R)$ 引力理论; 在以动态表现视界为边界、其内部充满具有霍金温度的普通物质的 FRW 宇宙背景下, 利用广义 $f(R)$ 引力的场方程推导出广义热力学第二定律; 运用广义热力学第二定律对具体的引力模型参数进行限制。

2. 时空背景

考虑 $(n+1)$ 维空间均匀、各向同性的 FRW 宇宙, 其度规形式如下

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega_{n-1}^2 \right), \quad (1)$$

其中 $a(t)$ 为随宇宙时间 t 变化的宇宙的尺度因子, $d\Omega_{n-1}^2$ 是 $(n-1)$ 维单位半径球面的度规, 空间曲率常数 $k = 1, 0$ 和 -1 分别对应闭合的、平直的和开放的宇宙。

物质与曲率耦合的广义 $f(R)$ 引力的拉格朗日量为

$$L = \frac{1}{16\pi G} f_1(R) + B(L_m) f_2(R), \quad (2)$$

对其作用量变分可得到相应的场方程:

$$\begin{aligned} & F_1(R) R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} f_1(R) g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu} \Delta - \nabla_\mu \nabla_\nu) F_1(R) \\ & = 8\pi G \left\{ -2B(L_m) F_2(R) R_{\mu\nu} - 2(g_{\mu\nu} \Delta - \nabla_\mu \nabla_\nu) B(L_m) F_2(R) \right. \\ & \quad \left. - f_2(R) [K(L_m) L_m - B(L_m)] g_{\mu\nu} + f_2(R) K(L_m) T_{\mu\nu}^m \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $T_{\mu\nu}^m = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta L_m}{\delta g^{\mu\nu}}$ 是物质场的能量动量张量, ∇ 表示由度规的 Levi-Civita 联络定义的协变导数,

$\Delta = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$, $F_i(R) = df_i(R)/dR$ ($i=1, 2$), $K(L_m) = dB(L_m)/dL_m$, $R_{\mu\nu}$ 是里奇张量。考虑宇宙空间充满理想流体, 其能量动量张量有如下形式:

$$T_{\mu\nu}^m = (\rho + P) U_\mu U_\nu + P g_{\mu\nu}, \quad (4)$$

式中 U_μ 是流体的四维速度。

3. 热力学第二定律

根据广义热力学第二定律，视界内部物质的熵与视界表面熵的总和不应随时间而减少。考虑 $(n+1)$ 维 FRW 宇宙充满了理想流体，并进一步假设宇宙的边界是由具有霍金温度的动力学表观视界封闭起来的。表观视界的霍金温度表述如下：

$$T_A = \frac{1}{2\pi\tilde{r}_A} \left(1 - \frac{\dot{\tilde{r}}_A}{2H\tilde{r}_A} \right). \quad (5)$$

视界内部物质的熵可由吉布斯方程给出[1]

$$T_A dS_m = dE_m + P_m dV, \quad (6)$$

其中 $E_m = \rho_m V$ ， $V = \frac{4\pi}{3} \tilde{r}_A^3$ 是包含物质的体积，其半径为动力学表观视界半径 \tilde{r}_A 。将(6)对时间求导并利用能量方程[2]可以发现

$$T_A \dot{S}_m = (\rho_m + P_m)(\dot{V} - nHV) + 2V \frac{(f_2 \dot{K} + f_2 \dot{K})}{f_2 K} \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \Big|_{g^{00}}. \quad (7)$$

这时需要知道 ρ_m 和 P_m 的表达式。将度规(1)代入场方程(3)得到广义 $f(R)$ 引力的弗雷德曼方程：

$$\rho_m = \frac{1}{8\pi G f_2 K} \left[\frac{f_1}{2} - 3(H^2 + \dot{H})F_1 + nH\dot{F}_1 \right] - \frac{1}{f_2 K} \left[6BF_2(H^2 + \dot{H}) - 2nH(\dot{B}F_2 - B\dot{F}_2) + f_2(KL_m - B) \right] \quad (8)$$

$$P_m = \frac{1}{8\pi G f_2 K} \left[-\frac{f_1}{2} + \left(\dot{H} + 3H^2 + \frac{2k}{a^2} \right) F_1 - (n-1)H\dot{F}_1 - \ddot{F}_1 \right] - \frac{1}{f_2 K} \left[2BF_2 \left(\dot{H} + 3H^2 + \frac{2k}{a^2} \right) - 2(n-1)(\dot{B}F_2 - B\dot{F}_2) - 2(\ddot{B}F_2 + 2\dot{B}\dot{F}_2 + B\ddot{F}_2) + f_2(KL_m - B) \right], \quad (9)$$

其中 $R = 6 \left(\dot{H} + 2H^2 + \frac{k}{a^2} \right)$ 。然后将(8)和(9)代入(7)有

$$T_A \dot{S}_m = \frac{1}{f_2 K} \left\{ \frac{\tilde{r}_A^2}{2G} \left(\dot{\tilde{r}}_A - \frac{n}{3} H \tilde{r}_A \right) \left[\left(\frac{2k}{a^2} - 2\dot{H} \right) F_1 + H\dot{F}_1 - \ddot{F}_1 \right] + 4\pi \tilde{r}_A^2 \left(\dot{\tilde{r}}_A - \frac{n}{3} H \tilde{r}_A \right) \left[4BF_2 \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) + 2H(\dot{B}F_2 + B\dot{F}_2) - 2(\ddot{B}F_2 + 2\dot{B}\dot{F}_2 + B\ddot{F}_2) \right] + \frac{8\pi}{3} \tilde{r}_A^3 (f_2 \dot{K} + f_2 \dot{K}) \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \Big|_{g^{00}} \right\}. \quad (10)$$

广义 $f(R)$ 引力理论中视界面上的熵有下面的形式[2]：

$$S_A = \frac{A(F_1 + 16\pi G B F_2)}{4G f_2 K}. \quad (11)$$

将其对时间求导并利用(5)，视界面熵随时间的演化为

$$T_A \dot{S}_A = \frac{1}{4f_2 KGH} (2H\tilde{r}_A - \dot{\tilde{r}}_A) \left[2\frac{\dot{\tilde{r}}_A}{\tilde{r}_A} F_1 + \dot{F}_1 + 16\pi G \left(2\frac{\dot{\tilde{r}}_A}{\tilde{r}_A} BF_2 + \dot{B}F_2 + B\dot{F}_2 \right) - \frac{(\dot{f}_2 K + f_2 \dot{K})}{f_2 K} (F_1 + 16\pi GBF_2) \right]. \quad (12)$$

经过复杂运算, 得到广义 $f(R)$ 引力的广义热力学第二定律

$$\begin{aligned} T_A \dot{S}_{tot} = & \frac{1}{f_2 K} \left\{ \frac{1}{4G} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-\frac{5}{2}} \left\{ 2H \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) \left[\left(3 - \frac{2n}{3} \right) \frac{k}{a^2} + \left(2 - \frac{2n}{3} \right) H^2 - \dot{H} \right] F_1 \right. \right. \\ & + \left[2H^2 \left(\left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) - \frac{n}{3} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right) + \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \left(2H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right) \right] \dot{F}_1 \\ & + 2H \left[\frac{n}{3} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) - \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) \right] \ddot{F}_1 \left. \right\} + \frac{8\pi}{3} \tilde{r}_A^3 (f_2 K + f_2 \dot{K}) \frac{\partial L_m}{\partial g^{\mu\nu}} \Big|_{g^{00}} \\ & + 4\pi \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-\frac{5}{2}} \left\{ 2H \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) \left[\left(3 - \frac{2n}{3} \right) \frac{k}{a^2} + \left(2 - \frac{2n}{3} \right) H^2 - \dot{H} \right] BF_2 \right. \\ & + \left[2H^2 \left(\left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) - \frac{n}{3} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \right) + \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \left(2H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right) \right] (\dot{B}F_2 + B\dot{F}_2) \\ & + 2H \left[\frac{n}{3} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) - \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) \right] (\ddot{B}F_2 + 2\dot{B}\dot{F}_2 + B\ddot{F}_2) \left. \right\} \\ & - \frac{1}{4G} \frac{\dot{f}_2 K + f_2 \dot{K}}{f_2 K} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(2H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right) (F_1 + 16\pi GBF_2) \left. \right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $S_{tot} = S_m + S_A$ 。这也就是说当 $T_A \dot{S}_{tot} \geq 0$ 时广义热力学第二定律是有效的, 它依赖具体的 $f(R)$ 引力模型。

4. 热力学第二定律对模型的限制

现在我们考虑四维时空 ($n=3$) 中一类具体的模型 $B(L_m) = L_m$, $f_1(R) = R + \alpha R^l$ ($\alpha \geq 0$, $0 < l < 1$) [3] 且 $f_2(R) = R^m$, 广义热力学第二定律表述为

$$\begin{aligned} T_A \dot{S}_{tot} = & \frac{1}{R^m} \left\{ \frac{1}{4G} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-\frac{5}{2}} \left\{ 2H \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right) (1 + \alpha l R^{l-1}) + \alpha l (l-1) R^{l-2} \dot{R} \right. \right. \\ & \times \left[\frac{k}{a^2} \left(3H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right) - \dot{H}H^2 \right] + 2H (H^2 + \dot{H}) \alpha l (l-1) \\ & \times \left[(l-2) R^{l-3} \dot{R}^2 + R^{l-2} \ddot{R} \right] \left. \right\} + 4\pi \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-\frac{5}{2}} \left\{ 2H \left(\frac{k}{a^2} - \dot{H} \right)^2 m L_m R^{m-1} \right. \\ & + \left[\frac{k}{a^2} \left(3H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right) - \dot{H}H^2 \right] (m \dot{L}_m R^{m-1} + m(m-1) L_m R^{m-2} \dot{R}) \\ & + 2H (H^2 + \dot{H}) (m \ddot{L}_m R^{m-1} + 2m(m-1) \dot{L}_m R^{m-2} \dot{R} \\ & + m(m-1)(m-2) L_m R^{m-3} \dot{R}^2 + m(m-1) L_m R^{m-2} \ddot{R}) \left. \right\} \\ & - \frac{1}{4G} \frac{m\dot{R}}{R} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(2H^2 + \dot{H} + \frac{k}{a^2} \right) (1 + \alpha n R^{n-1} + 16\pi Gm L_m R^{m-1}) \left. \right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (14)$$

此式即为这类引力模型是否满足广义热力学第二定律的判据。

进一步, 取 $L_m = -\rho$ 、 $\rho(t) \propto a^{-3}$ 、 $a = t^p$ (这里 p 是一个常数, 且 $p > 1$) [4], 并令 $k = 0$, (14)式可改写为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12G} \cdot 6^{-m} \left(\frac{p}{t}\right)^{-3} \left(\frac{p(2p-1)}{t^2}\right)^{-(1+m)} \cdot t^{-3(3+p)} \left\{ -8\pi Gm \cdot 6^m \left(\frac{p(2p-1)}{t^2}\right)^m t^6 \right. \\ & \times \left[-4 + 8m^2(p-1) + 4m(p-1)(7p-3) + p(26 + 3p(6p-13)) \right] \\ & + t^{3p} \left[6p^2(2p-1)(1+m(2p-1))t^4 + 648m\alpha(1-2p)^4 p^4 \right. \\ & \left. \left. + 6^l \left(\frac{p(2p-1)}{t^2}\right)^l \cdot t^6 \cdot \alpha l (-2 + 4p + 6l - 7pl + 4(p-1)l^2) \right] \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

那么, 广义热力学第二定律(15)式对此模型的参数 m 和 p 的限制可由图 1 来说明, 为了不失一般性, 我们取 $\alpha = 1$ 、 $t_0 = 13.7$ Gyr。根据图 1 不难发现, 对于 α 和 l 取定值时, 模型参数 m 和 p 的取值范围分别为 $15 \leq m \leq 40$ 和 $1 < p \leq 9$ 。此外, 比较 1(a) 和 1(b), 我们发现满足广义热力学第二定律($T_A \dot{S}_{tot} \geq 0$)几乎不依赖具体的 l 而只是要求 $0 < l < 1$ 。更深入的研究也表明要满足广义热力学第二定律也不依赖 α , 这也就是说取不同的 α 和 l 得到的结果都是相同的。而且, 我们也做出了 $T_A \dot{S}_{tot}$ 的对数对于固定的 p 随参数 m 的演化图像(图 2)。从图 2 不难发现 $T_A \dot{S}_{tot}$ 的对数随参数 m 的演化轨迹为倾斜的直线, p 越小斜率越大。那也就是说对于固定的 p , $T_A \dot{S}_{tot}$ 随 m 是呈指数演化的, p 越小 $T_A \dot{S}_{tot}$ 随 m 的变化越剧烈。

另外, 如果我们考虑爱因斯坦带有一般耦合的情况, 即 $\alpha = 0$, 在 $L_m = -\rho$ 且 $\rho(t) = \text{const}$ (由于目前加速膨胀的宇宙, 真空能可视作暗能量)的情况下, (15)式变为 $T_A \dot{S}_{tot} = 0$, 这意味着在此时总熵不随时间变化, 广义热力学第二定律是有效的。

5. 结束语

文章构建了广义的 $f(R)$ 引力即物质与曲率耦合的 $f(R)$ 引力理论, 在以动态表观视界为边界、其内部充满具有霍金温度的普通物质的 FRW 宇宙背景下, 由广义 $f(R)$ 引力的场方程推导出了广义热力学第二定律, 在满足广义热力学第二定律的熵增加条件下, 得到了具体模型 $f_1(R) = R + \alpha R^l$ 及 $f_2(R) = R^m$ 的参数合理范围。

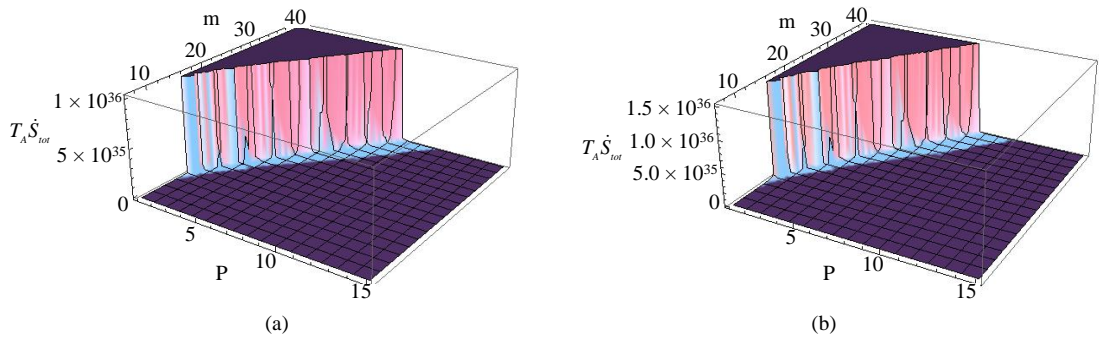


Figure 1. The constraints of the GSL on the parameters m and p in the model with $f_1(R) = R + \alpha R^l$ and $f_2(R) = R^m$. (a) corresponds to $\alpha = 1$ and $l = 0.8$ and (b) corresponds to $\alpha = 1$ and $l = 0.2$, respectively

图 1. 对于模型 $f_1(R) = R + \alpha R^l$, $f_2(R) = R^m$, 广义热力学第二定律对参数 m 和 p 的限制。(a) $\alpha = 1$ 、 $l = 0.8$; (b) $\alpha = 1$ 、 $l = 0.2$

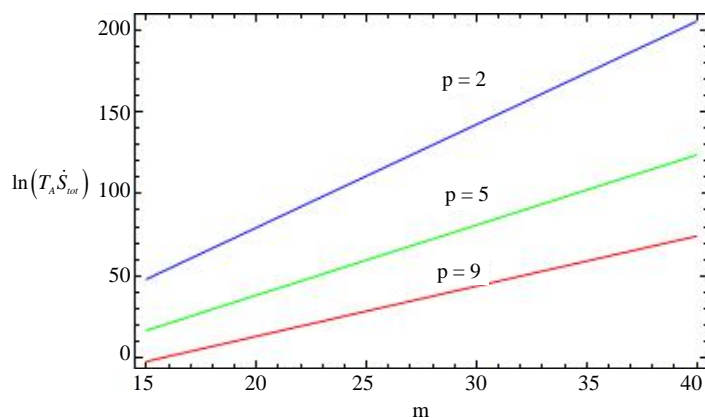


Figure 2. Curve: The evolutions of the logarithm of $T_A \dot{S}_{tot}$ with m when taking $p = 2$, $p = 5$ and $p = 9$, respectively

图 2. 当取 $p = 2$ 、 $p = 5$ 、 $p = 9$ 时 $T_A \dot{S}_{tot}$ 的对数随 m 的演化

众所周知，物理学是一门实验学科，物理规律必须经得起实验的检验。探讨广义 $f(R)$ 引力框架下的扰动理论，分析宇宙的密度扰动、速度扰动的演化方程、寻求修正引力下宇宙大尺度结构形成的物理规律，同时利用高精度的观测数据对修正引力模型参数加以限制，选出模型的优胜者或至少排出不合理的模型，这些是未来研究工作的又一个重要方向。

基金项目

海军大连舰艇学院科研发展基金资助项目(DJYKYKT2015-02)。

参考文献 (References)

- [1] Izquierdo G, Pavon, D. Phys. Lett. B, 2006, 639: 1. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2006.05.082>
- [2] Wu Y B, Zhao Y Y, Lu J B, Zhang X, Tong H D, Yang H. Sic China-Phys Mech Astron, 2012, 55: 2331. <http://dx.doi.org/10.1007/s11433-012-4927-y>
- [3] Amendola L, Gannouji R, Polarski D, Tsujikawa S. Phys. Rev. D, 2007, 75: 083504. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.75.083504>
- [4] Wang J, Wu, Y B, et al. Eur. Phys. J. C, 2010, 69: 541. <http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-010-1419-y>