

# Discussion on Noise Design of Random Signal Analysis Course

Mingqian Liu, Bingbing Li, Wanli Guo

School of Telecommunications Engineering, Xidian University, Xi'an Shaanxi  
Email: mqliu@mail.xidian.edu.cn

Received: Oct. 24<sup>th</sup>, 2015; accepted: Nov. 7<sup>th</sup>, 2015; published: Nov. 10<sup>th</sup>, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

Noise and its generation are important contents in the teaching of random signal analysis. The generation of the noise involves the theory of spectrum analysis and the minimum phase system, students tend to make mistakes in the design of white noise and color noise. This paper firstly analyzes the characteristics of the noise, and then analyzes the generation of color noise and white noise. Finally, this paper takes design experiments as examples. This paper has some guidance to the teaching of the noise generation design, and it is helpful for the students to understand and apply it.

## Keywords

Random Signal Analysis, Color Noise, White Noise, Whitening Filter

---

# “随机信号分析”中噪声产生设计的研讨

刘明骞, 李兵兵, 郭万里

西安电子科技大学, 通信工程学院, 陕西 西安  
Email: mqliu@mail.xidian.edu.cn

收稿日期: 2015年10月24日; 录用日期: 2015年11月7日; 发布日期: 2015年11月10日

---

## 摘要

噪声及其产生是随机信号分析教学中的重要内容。由于噪声的产生涉及到谱分析和最小相位系统的理论,

从而导致学生在设计白噪声和色噪声时容易产生错误。本文首先分析噪声的特性, 然后分别对色噪声和白噪声的产生进行分析, 最后以实验为例设计噪声的产生。文章对于噪声产生设计的教学有一定的指导作用, 并且有助于学生更好地理解和应用。

## 关键词

随机信号分析, 色噪声, 白噪声, 白化滤波器

## 1. 引言

噪声以及噪声的产生是“随机信号分析”课程[1]教学中的重要部分, 并对于工程应用中噪声的产生设计[2] [3]有着重要的指导意义。

关于噪声的教学, 重点在于理解噪声的定义和性质、掌握白噪声和色噪声的产生机理及其运用。在理论教学和实验教学中, 学生普遍反映白噪声和有色噪声的产生设计是难以掌握和应用的。因此, 笔者认为, 在噪声内容教学中不能脱离实际的工程应用背景, 并根据以往的教学和科研经验, 展开对“随机信号分析”课程中有色噪声的产生以及白化滤波器的设计进行研讨。

## 2. 白噪声及色噪声

在信息与信号处理领域, 在信息的传输过程中不可避免地存在噪声。噪声是一种在理论上无法预测的信号, 也是一种典型的随机过程。在“随机信号分析”课程中, 首先需要根据定义和性质, 让学生能够很好地区分白噪声和色噪声。在随机过程中, 通常可按它的概率密度和功率谱密度的函数形式进行分类。

均值为零而功率谱密度  $S_N(\omega)$  为非零常数, 即

$$S_N(\omega) = \frac{1}{2} N_0, \quad -\infty < \omega < +\infty \quad (1)$$

的平稳随机过程  $N(t)$  称为白噪声过程, 简称白噪声, 其中  $N_0$  为一正实常数, 系数 1/2 中的因子 2 表明为双边谱密度。利用维纳—辛钦定理[1], 可以得到白噪声的自相关函数为:

$$R_N(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_N(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2} N_0 \delta(\tau) \quad (2)$$

白噪声的自相关函数和功率谱密度如图 1 所示。

我们把除了白噪声以外的所有噪声均统称为有色噪声, 简称色噪声, 其功率谱密度和自相关函数见图 2 所示。通过上述分析, 学生们便能够区分出白噪声和色噪声, 从而进一步地学习和应用。

## 3. 色噪声产生的设计

色噪声产生的设计一直是学生难以理解的部分, 为了让学生能够理解, 在此重点阐述。白噪声产生的设计其实质为: 设计一个线性系统, 当它的输入为单位功率谱密度的白噪声时, 其输出为特定功率谱密度的色噪声, 其实现原理框图如图 3 所示。

由于输入的是单位功率谱密度, 则输出的功率谱表示为:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) H(\omega) H(-\omega) = S_x(\omega) |H(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 \quad (3)$$

可见, 输出功率谱由系统的传递函数  $|H(\omega)|^2$  所决定, 则其功率谱密度不再为常数, 即为色噪声。

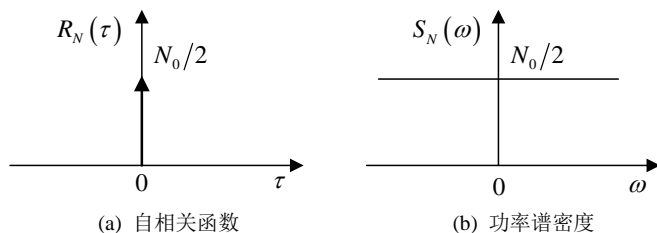


Figure 1. Autocorrelation function and power spectral density of white noise  
图 1. 白噪声的自相关函数和功率谱密度

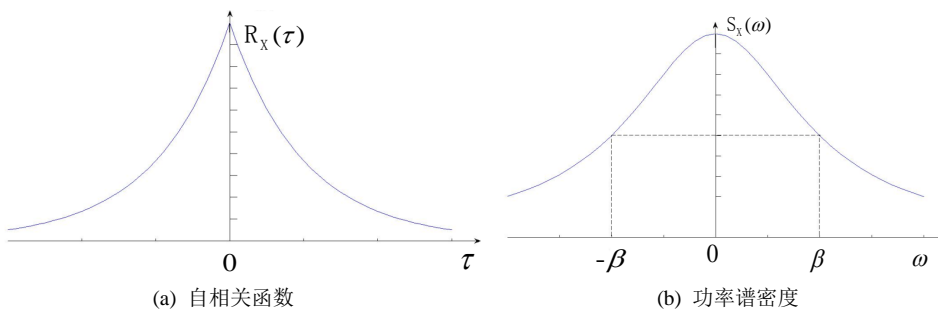


Figure 2. Autocorrelation function and power spectral density of colored noise  
图 2. 色噪声的自相关函数和功率谱密度

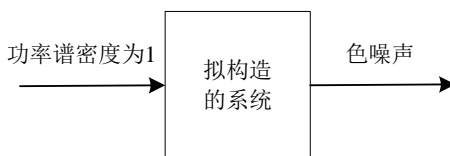


Figure 3. The diagram of colored noise generation  
图 3. 色噪声产生的原理框图

式(3)可改写出复频域的形式, 其表示为:

$$S_Y(s) = H(s)H(-s) \quad (4)$$

其中,  $H(s)$  和  $H(-s)$  的零极点在  $S$  平面中关于  $Y$  轴对称。

根据谱分解定理[4], 可将  $S_Y(s)$  分解为:

$$S_Y(s) = S_Y^-(s)S_Y^+(s) \quad (5)$$

根据最小相位系统的定义[5],  $S_Y^-(s)$  包括所有  $S$  平面中左半平面的零极点, 则拟构造的物理可实现系统的传递函数为:

$$H(s) = S_Y^-(s) \quad (6)$$

为了便于学生能够理解掌握其过程, 教师应该针对此内容, 帮助学生进行归纳总结, 给出色噪声产生的设计步骤, 则具体步骤如下:

步骤 1: 将色噪声改写成拉氏变换或  $Z$  变化的形式;

步骤 2: 将色噪声分解成  $S_Y(s) = S_Y^-(s)S_Y^+(s)$  或  $S_Y(z) = S_Y^-(z)S_Y^+(z)$  形式, 且  $S_Y^-(s)$  包括  $S$  平面中左半平面的零极点或  $S_Y^-(z)$  包括所有单位圆内的零极点;

步骤 3: 所拟构造的物理可实现的系统的传递函数为  $H(s) = S_Y^-(s)$  或  $H(z) = S_Y^-(z)$ 。

#### 4. 白化滤波器的设计

在讲述色噪声产生的设计之后，引出白化滤波器的设计内容，这样学生很容易地接受。白化滤波器的设计就是要设计一个线性系统，当它的输入为色噪声时，则其输出为单位功率谱密度的白噪声，其实现原理框图如图4所示。

由图4可以明显地看出，白化滤波器的设计原理和色噪声产生的原理是互为逆过程。因此，学生们只要熟练掌握色噪声的产生原理，则白化滤波器的设计就容易了。

同样地，线性系统输出的功率谱密度表达式可写出S变换或Z变换的形式，即：

$$S_Y(s) = H(s)H(-s)S_X(s) \quad (7)$$

$$\text{或 } S_Y(z) = H(z)H(z^{-1})S_X(z) \quad (8)$$

由于输出功率谱密度为1，则

$$S_X(s) = \frac{1}{H(s)H(-s)} \text{ 或 } S_X(z) = \frac{1}{H(z)H(z^{-1})} \quad (9)$$

同理，根据谱分解定理和最小相位系统的定义，输入色噪声可以分解成  $S_X(s) = S_X^-(s)S_X^+(s)$  或  $S_X(z) = S_X^-(z)S_X^+(z)$  形式，且  $S_X^-(s)$  包括所有S平面中左半平面的零极点或  $S_X^-(z)$  包括所有单位圆内的零极点，这时可求得物理可实现的线性系统的传递函数为：

$$H(s) = \frac{1}{S_X^-(s)} \text{ 或 } H(z) = \frac{1}{S_X^-(z)} \quad (10)$$

#### 5. 噪声产生的设计实验

学生在学习噪声的定义和性质，以及色噪声产生和白化滤波器的设计理论的过程中，往往希望教师能够给予在工程上或科研实际中的应用，从而实现理论与实际的结合。

在此，给出一个噪声产生的设计实验，其内容包含色噪声的产生和白化滤波器的设计，以便于学生能够学以致用。

实验系统框图如图5所示，该实验内容分为三部分：第一部分为随机产生高斯白噪声  $x(t)$ ；第二部分为设计低通型衰减滤波器，产生色噪声  $n(t)$ ；第三部分为白化滤波器的设计，产生白化信号  $y(t)$ ，该仿真实验可以自选MATLAB [6]或C/C++ [7]仿真软件之一编写程序和仿真。

通过在MATLAB平台上实现仿真实验，可得该实验的仿真图。高斯白噪声  $x(t)$  的时域波形和频谱图如图6所示，图7为色噪声  $n(t)$  的时域图和功率谱密度，通过白化滤波器的设计之后所产生的白化信号  $y(t)$  的时频域图如图8所示。

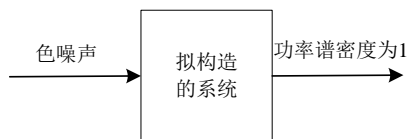


Figure 4. The diagram of the whitening filter  
图4. 白化滤波器的原理框图

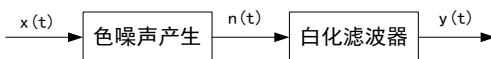


Figure 5. The diagram of experimental system  
图5. 实验系统框图

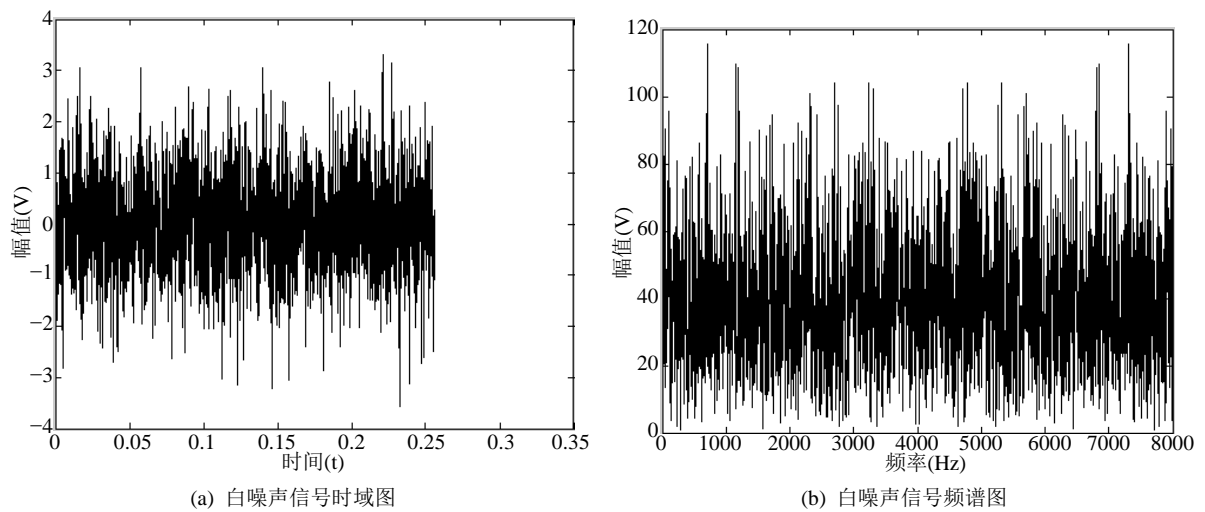


Figure 6. Time and frequency domain graphs of Gaussian white noise  
图 6. 高斯白噪声的时频域图

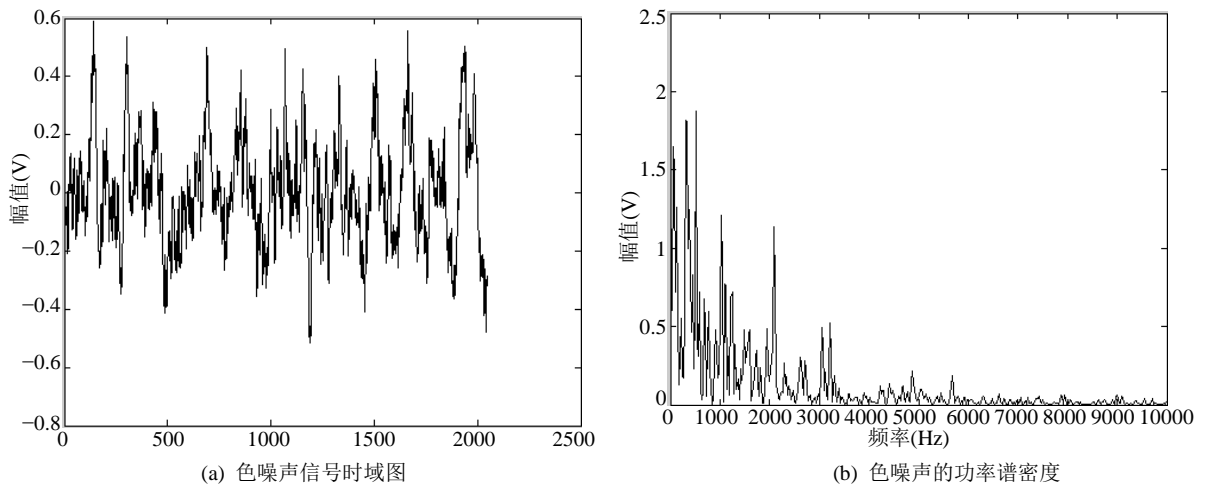


Figure 7. Time and frequency domain graphs of colored noise  
图 7. 色噪声的时频域图

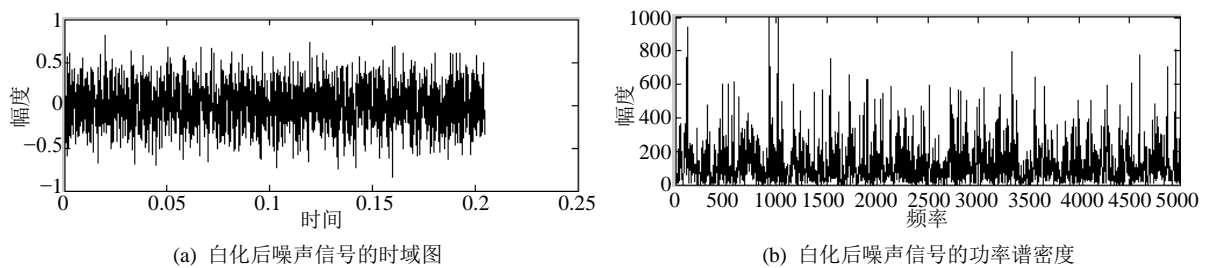


Figure 8. Time and frequency domain graphs of whitened signal  
图 8. 白化信号的时频域图

## 6. 结语

本文分析了噪声的特性以色噪声和白噪声的产生原理。由本文的分析可见，噪声的设计与谱分解定理和最小相位系统理论有关。噪声产生内容教学中，不但需要联系到因果稳定系统的分析，而且需要加

强实验举例, 让学生能够学以致用, 从而能够对理论内容进行理解和应用。

## 基金项目

受陕西省资源共享课、信息工程拔尖人才培养模式创新实验区和西安电子科技大学教学质量提升计划项目资助。

## 参考文献 (References)

- [1] 李兵兵, 马文平, 田红心, 等. 随机信号分析教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 2012.
- [2] 赵剡, 张春晓. 改进的基于白化滤波器的降晰函数尺寸估计方法[J]. 天津: 红外与激光工程, 2010, 39(5): 896-901.
- [3] 张文龙, 黄振华. 低漂移有色高斯噪声的产生[J]. 上海: 上海师范大学学报(自然科学版), 2009, 38(4): 398-401.
- [4] 叶怀安. 自共轭算子谱分解定理的简证及教学实践[J]. 合肥: 教育与现代化, 1995(4): 21-24.
- [5] 高西全, 丁玉美. 数字信号处理 [M]. 第3版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2008.
- [6] 楼顺天. 基于 MATLAB7.X 的系统分析与设计——信号处理[M]. 第二版. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2005.
- [7] 谭浩强. C 程序设计[M]. 第4版. 北京: 清华大学出版社, 2010.