

# Minimal Nontoroidal Graphs on Eight Vertices\*

Fugang Chao, Han Ren

Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai  
Email: chaofugang@126.com, hren@math.ecnu.edu.cn

Received: Jun. 28<sup>th</sup>, 2013; revised: Jul. 30<sup>th</sup>, 2013; accepted: Aug. 10<sup>th</sup>, 2013

Copyright © 2013 Fugang Chao, Han Ren. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** Using the technique of embedding, we prove that the graphs obtained from  $K_8$ , the complete graph on eight vertices, by deleting the edges of  $K_3$ , a triangle, or  $K_{2,3}$ , the complete bipartite graph with 2 vertices and 3 vertices, or  $K_2 \cup K_2 \cup P_3$ , the disjoint union of two paths of length one and one path of length two, are minimal nontoroidal graphs.

**Keywords:** Embedding; Genus; Minimal Nontoroidal Graph

## 八个点的极小非环面图\*

晁福刚, 任 韩

华东师范大学数学系, 上海  
Email: chaofugang@126.com, hren@math.ecnu.edu.cn

收稿日期: 2013 年 6 月 28 日; 修回日期: 2013 年 7 月 30 日; 录用日期: 2013 年 8 月 10 日

**摘 要:** 借助于嵌入的技巧, 证明了由  $K_8$ , 八个点的完全图, 去掉  $K_3$ , 三角形, 或  $K_{2,3}$ , 部集的点数分别为 2 和 3 的完全二部图, 或  $K_2 \cup K_2 \cup P_3$ , 长度为 1 的两条路和长度为 2 的一条路的不交并, 中得到的图是极小的非环面图。

**关键词:** 嵌入; 亏格; 极小非环面图

### 1. 引言

图  $G$  是由有限的点集  $V(G)$  和称之为边的无序的点对的集合  $E(G)$  构成。如果边  $xy$  表现, 我们称  $x$  和  $y$  相邻或者相连,  $x$  和  $y$  是邻点。点  $x$  的度是指其邻点的数目, 记作  $d(x)$ 。如果所有的点的度数都是  $r$ , 那么  $G$  是  $r$ -正则的。如果  $H$  是  $G$  的一个子图, 称  $G(H)$  是  $H$  的诱导子图, 它是由  $H$  及  $G$  中连接  $H$  的两个点的所有边组成。我们定义  $G-H = G(V(G)-V(H))$ 。如果  $v$  是图  $G$  中的一个点, 那么  $N(v)$  是  $G$  的由  $v$  的邻点诱导的子图。

图  $G$  中的一条迹是指一个点的序  $x_1x_2 \cdots x_n$ , 使得  $x_i$  和  $x_{i+1}$  是邻点对  $i=1, 2, \dots, n-1$  成立。如果所有的点都是不同的, 称这条迹为一条路或一条  $n$  路, 记作  $P_n$ 。  $n$ -圈  $C_n$  是由  $P_n$  添加  $x_nx_1$  得到的。如果  $C$  是图中的一个圈,  $e$  是连结  $C$  两个不连续点的边, 那么  $e$  是  $C$  的一条弦。 $G$  中的一个圈  $C$  是一个 Hamilton 圈, 如果  $V(C) = V(G)$ 。 $K_n$  是  $n$  个点的完全图; 也就是说,  $K_n$  的所有点的度数是  $n-1$ 。

曲面  $S$  是一个没有边界的、紧的、连通的 2-维流形。曲面分类定理<sup>[1]</sup>告诉我们: 每个曲面或者同胚于  $S_g$ ,

\*资助信息: 国家自然科学基金项目(11171114)。

添加了  $g$  个手柄的球, 或者同胚于  $N_k$ , 添加了  $k$  个叉帽的球。当  $S = S_g$  时, 曲面  $S$  的 Euler 亏格为  $\gamma = 2g$ , 当  $S = N_k$  时, 曲面  $S$  的 Euler 亏格为  $\gamma = k$ 。特别地,  $S_0 = N_0$  是球,  $S_1$  是环面,  $N_1$  是射影平面,  $N_2$  是克莱因瓶。  $S_1$  同胚于一个由平面上的三角形粘贴得到的一个曲面。记  $n$ 、 $e$ 、 $f$  分别为图  $G$  的边数、点数和面数, 经典的 Euler 公式告诉我们:  $n - e + f = 2 - \gamma$ , 其中  $\gamma$  为图  $G$  的 Euler 亏格。

曲面  $S$  上的一个嵌入图是嵌入到  $S$  上的一个图, 使得所有的边, 除了一个共同点, 都是不交的多边形的弧。和点  $v$  关联的边构成它的一个顺时针序。嵌入图的一个面是这个曲面的弧连通分支减去这个图。我们假定每个面同胚于一个圆盘。一个面迹是由在每个点严格向左拐得到的。如果这个迹长度为  $k$ , 我们说这是一个  $k$ -面。一个面圈是一个圈同时也是一个面迹。如果  $G$  是嵌入到  $S_1$  上的图,  $H$  是  $G$  的一个子图, 那么  $H$  也可以嵌入到  $S_1$  上。我们称之为诱导嵌入。如果  $C$  是  $H$  的一个以同胚于一个圆盘的面为边界的一个面迹, 那么这个面是  $C$  的内部, 记作  $\text{int}(C, H)$ , 或仅记作  $\text{int}(C)$ 。外部  $\text{ext}(C, H)$  可以类似地定义。  $G$  的在  $\text{int}(C, H)$  内的点也说成在  $C$  的内部。如果  $C$  是  $G$  的分离  $S_1$  成不同分支的圈, 其中之一同胚于一个圆盘, 那么  $C$  是可收缩的。否则,  $C$  是不可收缩的。一个三角剖分是指一个嵌入图使得每个面以一个三角形为边界 3-圈。一个平面的近三角剖分图是指平面上的一个图, 使得每个面, 除了可能的一个外面, 都以一个 3-圈为边界。外面以一个圈为边界, 也就是外圈。一个图是平面的, 或环面的, 如果它分别可以嵌入到  $S_0$  或  $S_1$  上。

称一个图  $G$  是极小非环面的, 如果它不能嵌入到环面上, 但任意去掉它的一条边后, 就可以嵌入到环面上。在这里, 我们借助于嵌入的技巧, 先将  $K_7$  嵌入到环面  $S_1$  上, 然后去掉一些边, 在一个很小的范围内改动原来的嵌入方式, 再添加一些点和这个点与其它点之间的边, 使得新图也可以嵌入到环面  $S_1$  上。

本文研究的图都是简单连通无向图, 所有的专业术语均可参考文献<sup>[2]</sup>。

## 2. 主要定理及其证明

图  $G$  的一个剖分图是指把  $G$  的边进行一系列的剖分而得到的一个图。经典的 Kuratowski<sup>[3]</sup>定理告诉我们: 一个图是平面图当且仅当它不包含  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的剖分图。事实上, 去掉  $K_5$  或  $K_{3,3}$  的任意一条边, 都可以把得到的图嵌入到平面上, 所以  $K_5$  和  $K_{3,3}$  是极小的非平面图。一个自然而然的问题是, 极小的非环面图有什么样的刻画。我们的主要结果给出了一类极小非环面图的构造方法。先来看两个曲面拓扑学中的简单的观察结果。

**命题 1.1:** 如果一个图  $G$  嵌入到一个固定的曲面  $S$  上, 那么  $G$  一定与  $S$  上的每条不可收缩的闭曲线(不可收缩圈)有交点。

**命题 1.2:** 如果一个图  $G$  的子图  $H$  可以嵌入到一个固定的曲面  $S$  上, 那么  $G$  也可以嵌入到曲面  $S$  上。

在平面图的四色猜想还有解决的时候, 数学家为了研究这个猜想, 对曲面嵌入图的色数进行了探究。Heawood<sup>[4]</sup>证明了: 如果  $S$  不是球, 那么嵌入到  $S$  上的每个图至多使用  $h(\gamma) = \left\lfloor \frac{1}{2}(7 + \sqrt{24\gamma + 1}) \right\rfloor$  种不同的颜色, 其中  $\gamma$  为  $S$  的 Euler 亏格。Ringel 和 Youngs<sup>[5]</sup>证明了这个结果对除了克莱因瓶以外的所有曲面都是最好可能的。嵌入到克莱因瓶上的图仅需 6 种颜色, 而 Heawood 的界告诉我们克莱因瓶上的嵌入图的最大色数为 7, 这个结果是由 Franklin<sup>[6]</sup>得到的。作为地图染色定理的一个副产品, Ringel<sup>[7]</sup>得到了下述定理所描述的完全图的亏格计算公式。

**命题 1.3:** 如果  $n \geq 3$ , 那么  $g(K_n) = \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rfloor$ , 其中  $g(K_n)$  为完全图  $K_n$  的可定向亏格。如果  $n \geq 3$  且  $n \neq 7$ , 那么  $\tilde{g}(K_n) = \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rfloor$ , 其中  $\tilde{g}(G)$  为完全图  $K_n$  的不可定向亏格。

由上面的公式, 我们可以知道, 完全图  $K_8$  的可定向亏格为 2。在下面定理的证明中, 我们会数次使用这个基本的事实。另外, 我们的证明还借助于完全图  $K_7$  在环面  $S_1$  上的嵌入。下面的图 1 给出了完全图  $K_7$  在环面  $S_1$  的一种嵌入方式。

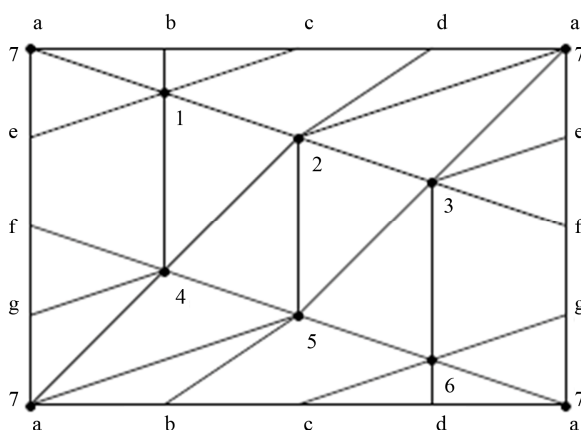


Figure1. Embedding of  $K_7$  on the torus  
图 1.  $K_7$  在环面上嵌入

**定理 1.4:** 图  $G_1 = K_8 - K_3$ 、 $G_2 = K_8 - K_{2,3}$ 、 $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$  是八个点的极小的非环面图。

**证明:** 考虑图  $G_1 = K_8 - K_3$ ，其中  $K_3$  是一个三角形。我们断言  $g(G_1) = g(K_8 - K_3) = 2$ 。这是因为  $G_1 = K_8 - K_3 \subseteq K_8$ ，由命题 1.2 和命题 1.3 知， $g(G_1) = g(K_8 - K_3) \leq g(K_8) = 2$ 。记  $n, e, f$  分别为图  $G$  的点数、边数和面数，Euler 公式告诉我们： $n - e + f = 2 - 2g$ ，其中  $g$  为图  $G$  的亏格。因为嵌入是 2-胞腔的，所以有  $2e \geq 3f$ ，等号成立当且仅当这个嵌入是一个三角剖分嵌入。将  $2e \geq 3f$  代入  $n - e + f = 2 - 2g$ ，可以推出  $e \leq 3n - 6 + 6g$ 。将  $n = 8$ 、 $e = 25$  代入上式得， $6g(G_1) = 6g(K_8 - K_3) \geq 7$ ，即  $g(G_1) = g(K_8 - K_3) \geq 2$ ，所以  $G_1 = K_8 - K_3$  不能嵌入到环面  $S_1$  上。

下证再去掉  $K_8 - K_3$  中的任意一条边  $e$ ，得到的图  $G_1 = K_8 - K_3 - \{e\}$  有一个环面嵌入。图  $G_1 = K_8 - K_3 - \{e\}$  有 24 条边，由环面上的 Euler 公式  $n - e + f = 0$ ，得  $f = 16$ ，所以有  $2e = 3f$ ，它是环面上的一个三角剖分图。去掉这 24 条边中的任意一条，在同构的意义下，仅有两种可能，一种是去掉与这个三角形相关联的一条边，另一种是去掉与这个三角形不相关联的一条边。仅需给出  $G_1 = K_8 - K_3 - \{e\}$  在环面上的一种嵌入方式。以下分两种情况讨论。

**情形 1:** 如果去掉的是三角形和与这个三角形关联的一条边。先将  $K_7$  嵌入到环面上，如图 1 所示。将点  $v_8$  放到面  $v_2v_3v_5$  中。不妨设去掉的边为  $v_2v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_2v_4$ ，这样就形成了一个 7 面  $v_1v_4v_5v_6v_3v_7v_2v_1$ 。连接  $v_8v_1, v_8v_2, v_8v_3, v_8v_4, v_8v_5, v_8v_6, v_8v_7$ ，就得到了  $G_1 = K_8 - K_3 - \{e\}$  在环面上的一种嵌入，其中  $e$  是  $v_2v_3v_5$  关联的一条边。

**情形 2:** 如果去掉的是三角形和与这个三角形不相关联的一条边。先将  $K_7$  嵌入到环面上，如图 1 所示。将点  $v_8$  放到面  $v_2v_3v_5$  中。不妨设去掉的边为  $v_2v_3, v_3v_5, v_5v_2, v_6v_7$ ，这样就形成了一个 6 面  $v_2v_4v_5v_6v_3v_7v_2$ 。连接  $v_8v_2, v_8v_4, v_8v_5, v_8v_6, v_8v_3, v_8v_7$ 。改变  $v_2v_5$  的嵌入方式，将  $v_8$  连接到  $v_1$ 。具体方法如下：将边  $v_2v_4$  改为由左边  $ga$  中间的一点出来，由右边  $ga$  中间的一点进入，由下边  $da$  中间的一点出来，再由上边  $da$  中间的一点进入，连接到点  $v_4$ 。添加边  $v_8v_1$ ，就得到了  $G_1 = K_8 - K_3 - \{e\}$  在环面上的一种嵌入，其中  $e$  是与  $v_2v_3v_5$  不相关联的一条边。

再考虑图  $G_2 = K_8 - K_{2,3}$ 。我们断言  $g(G_2) = g(K_8 - K_{2,3}) = 2$ ，其中  $K_{2,3}$  是一个完全二部图。记  $V(K_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ 。令  $G_2 = K_8 - K_{2,3}$  是由  $K_8$  删除边  $v_1v_4, v_1v_8, v_2v_4, v_2v_8, v_3v_4, v_3v_8$  得到的图。因为  $G_2 = K_8 - K_{2,3} \subseteq K_8$ ，所以  $1 \leq g(G_2) = g(K_8 - K_{2,3}) \leq g(K_8) = 2$ 。反证法，假设它有一种在环面上的嵌入  $\Pi$ ，即  $g(G_2) = g(K_8 - K_{2,3}) = 1$ 。考查图  $G_2 = K_8 - K_{2,3}$  中的三角形  $v_2v_5v_8, v_4v_6v_8, v_4v_7v_8$ 。因为这三个三角形中的每一个都包含边  $v_4v_8$ ，且都不是可分离的三角形，所以这三个三角形中至少有一个是不可收缩的三角形。我们假定  $v_4v_5v_8$  是不可收缩的三角形。再根据由点  $\{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7\}$  诱导的子图是五个点的完全图，且是与  $v_4v_5v_8$  点不交的子图，由命题 1.1 知， $\{v_1, v_2, v_3, v_6, v_7\}$  诱导的子图只能位于  $v_4v_5v_8$  的一侧，也就是说这个图可以嵌入到平面上，这与  $K_5$

不能嵌入到平面上矛盾。这样就证明了  $g(G_2) = g(K_8 - K_{2,3}) = 2$ 。

下证  $G_2 = K_8 - K_{2,3}$  再去掉任意一条边都可以嵌入到环面上。设  $V(K_{2,3}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_8\}$ ,  $E(K_{2,3}) = \{v_1v_4, v_1v_8, v_2v_4, v_2v_8, v_3v_4, v_3v_8\}$ 。完全图  $K_8$  有 28 条边, 去掉  $K_{2,3}$  中的边, 还有 22 条边, 这些边在同构的意义下, 可以分成三类。以下我们三种情形进行讨论。

**情形 3:** 如果去掉的边是  $v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_8$  中的一条, 那么得到的图是  $K_8$  去掉  $K_3$  及与其关联的一条边得到的图的一个子图。由情形 1 知,  $G'_2 = K_8 - K_{2,3} - \{e\}$  可以嵌入到环面上, 其中  $\{e\}$  是  $v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_4v_8$  中的一条边。

**情形 4:** 如果去掉的边是  $v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_2v_5, v_2v_6, v_2v_7, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7$  中的一条边, 那么得到的图是  $K_8$  去掉  $K_2$  和  $P_4$  的不交并得到的图的一个子图。下面我们给出  $K_8$  去掉  $K_2$  和  $P_4$  的不交并得到的图的一个环面嵌入。先将  $K_7$  嵌入到环面上, 如图 1 所示。去掉边  $v_2v_3, v_2v_5, v_5v_6, v_1v_7$ , 将点  $v_8$  放到面  $v_2v_4v_5v_3v_7$  中, 添加边  $v_8v_2, v_8v_4, v_8v_5, v_8v_3, v_8v_7$ , 再将边  $v_3v_5$ , 改为由左边  $ae$  中间的一点出来, 由右边  $ae$  中间的一点进入, 由上边  $ab$  中间的一点出来, 再由下边  $ab$  中间的一点进入, 连接到点  $v_5$ 。添加边  $v_8v_6$ 。经过下边和上边  $bc$  中间的一点添加边  $v_8v_1$ , 这样就得到了  $G'_2 = K_8 - K_{2,3} - \{e\}$  在环面上的嵌入, 其中  $\{e\}$  是  $v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_2v_5, v_2v_6, v_2v_7, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_5v_6, v_5v_7, v_6v_7$  中的一条边。

**情形 5:** 如果去掉的边是  $v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7, v_5v_8, v_6v_8, v_7v_8$  中的一条边, 那么得到的图是  $K_8$  去掉  $P_3$  和  $P_3$  的不交并得到的图的一个子图。先将  $K_7$  嵌入到环面上, 如图 1 所示。去掉边  $v_1v_6, v_6v_7, v_2v_3, v_2v_5$ , 将点  $v_8$  放到面  $v_2v_4v_5v_3v_7$  中, 添加边  $v_8v_2, v_8v_4, v_8v_5, v_8v_3, v_8v_7$ , 再将边  $v_2v_4$  和边  $v_3v_5$  分别按照情形 2 和情形 4 中的方法改变嵌入的方式, 添加边  $v_8v_1$  和边  $v_8v_6$ 。这样就得到了  $G'_2 = K_8 - K_{2,3} - \{e\}$  在环面上的嵌入, 其中  $\{e\}$  是  $v_4v_5, v_4v_6, v_4v_7, v_5v_8, v_6v_8, v_7v_8$  中的一条边。

最后考虑图  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$ , 其中  $K_2$  是一条边,  $P_3$  是一条长度为 2 的路。我们断言:  $g(G_3) = g(K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)) = 2$ 。设  $V(K_8) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ 。令  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$  是由  $K_8$  删除边  $v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_7v_8$  得到的图。由点  $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  诱导的子图是五个点的完全图, 由 Kuratowski 定理知, 它不能嵌入到平面上。又因为  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3) \subseteq K_8$ , 所以  $1 \leq g(G_3) = g(K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)) \leq g(K_8) = 2$ 。反证法, 假设它有一种在环面上的嵌入  $\Pi$ , 即  $g(G_3) = g(K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)) = 1$ 。因为图  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$  有 24 条边, 由环面上的 Euler 公式  $n - e + f = 0$ , 得  $f = 16$ , 所以有  $2e = 3f$ , 它是环面上的一个三角剖分图。考查以  $v_2$  为顶点的三角形, 这样的三角形有  $v_2v_4v_6, v_2v_4v_7, v_2v_4v_8, v_2v_5v_6, v_2v_5v_7, v_2v_5v_8, v_2v_6v_7, v_2v_6v_8$ 。因为点  $v_6$  在  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$  中的度数为 7, 所以上述的 8 个三角形中有两个以  $v_6$  为另一个顶点的三角形是可收缩的。还有 4 个三角形  $v_2v_4v_7, v_2v_4v_8, v_2v_5v_7, v_2v_5v_8$ 。又因为点  $v_2$  在  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$  中的度数为 5, 以  $v_2$  为顶点的可收缩的三角形的个数为 5 个, 且没有可分离的三角形, 所以上述的 4 个三角形中一定有一个是不可收缩的三角形。我们假定  $v_2v_4v_8$  是不可收缩的三角形。再根据由点  $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  诱导的子图是五个点的完全图, 且是与  $v_2v_4v_8$  点不交的子图, 由命题 1.1 知, 由点  $\{v_1, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  诱导的子图只能位于  $v_2v_4v_8$  的一侧, 也就是说这个图可以嵌入到平面上, 这与  $K_5$  不能嵌入到平面上矛盾。这样就证明了  $g(G_3) = g(K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)) = 2$ 。

下证再去掉  $G_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3)$  中的任意一条边  $e$ , 得到的图  $G'_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3) - \{e\}$  有一个环面嵌入。设  $V(K_2 \cup K_2 \cup P_3) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_7, v_8\}$ ,  $E(K_2 \cup K_2 \cup P_3) = \{v_1v_2, v_2v_3, v_4v_5, v_7v_8\}$ 。完全图  $K_8$  有 28 条边, 去掉  $K_2 \cup K_2 \cup P_3$  中的边, 还有 24 条边, 这些边在同构的意义下, 可以分成四类。以下分四种情况进行讨论。

**情形 6:** 如果去掉的边是  $v_2v_6, v_2v_7, v_2v_8$  中的一条边, 那么得到的图是  $K_8$  去掉  $K_2$  和  $S_{1,3}$  的不交并得到的图的一个子图, 其中  $S_{1,3}$  是由一个点连接到三个独立的点得到的一个星图。将点  $v_8$  放到面  $v_2v_3v_5$  中, 设去掉的边为  $v_2v_3, v_2v_4, v_2v_5, v_1v_7$ , 添加边  $v_8v_1, v_8v_4, v_8v_5, v_8v_3, v_8v_7, v_8v_2$ 。将边  $v_3v_5$  按照情形 4 的方法改变嵌入的方式, 连接点  $v_8$  和点  $v_6$ 。这样就得到了  $G'_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3) - \{e\}$  在环面上的嵌入, 其中  $e$  是  $v_2v_6, v_2v_7, v_2v_8$  中的一条边。

**情形 7:** 如果去掉的边是  $v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_3v_8$  中的一条边, 按照情形 4 的方法, 可以将  $G'_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3) - \{e\}$  嵌入到环面上, 其中  $e$  是  $v_1v_4, v_1v_5, v_1v_6, v_1v_7, v_1v_8, v_3v_4, v_3v_5, v_3v_6, v_3v_7, v_3v_8$  中的一条边。

**情形 8:** 如果去掉的边是  $v_4v_6, v_4v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_6v_7, v_6v_8$  中的一条边, 按照情形 5 的方法, 可以将  $G'_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3) - \{e\}$  嵌入到环面上, 其中  $e$  是  $v_4v_6, v_4v_7, v_4v_8, v_5v_6, v_5v_7, v_5v_8, v_6v_7, v_6v_8$  中的一条边。

**情形 9:** 如果去掉的边是  $v_1v_3$ , 那么得到的图是  $K_8$  去掉  $K_2$  和  $K_3$  的不交并得到的图的一个子图。按照情形 2 的方法, 可以将  $G'_3 = K_8 - (K_2 \cup K_2 \cup P_3) - \{e\}$  嵌入到环面上, 其中  $e$  是  $v_1v_3$  中的一条边。

综上所述, 定理成立。

我们上面的工作实际上是计算了一类图的亏格。Thomassen<sup>[8]</sup>已经注意到亏格的计算是 NP 问题中的一类, 所以是非常困难的一件事。在这里我们借助于嵌入的技巧。先将它的子图嵌入到一个固定的曲面上, 去掉一些边, 并在一个很小的范围内改动原来的嵌入方式, 再添加一些点和这个点与其它点之间的边, 使得新图也可以嵌入到这个固定的曲面上。不仅如此, 我们的工作还和 Thomassen<sup>[9-11]</sup>关于临界图的工作有着密切的关系, 可以用来发现小亏格表面上的点数较少的临界图。Thomassen<sup>[9]</sup>找到了环面上的 6-色临界图的确切个数并给出了相关构造。图  $G$  和图  $H$  的联图  $G+H$  是由图  $G \cup H$  添加图  $G$  和图  $H$  的所有点之间的边得到的图。如果  $G_1$  和  $G_2$  是有公共点  $v_0$ , 和  $G_1$  中的一条边  $v_0v_1$  和  $G_2$  中的一条边  $v_0v_2$  的图, 由这两个图经过 Hajós 构造得到的图是指是具有顶点集  $V(G_1) \cup V(G_2)$  和边集  $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{v_1v_2\} \setminus \{v_0v_1, v_0v_2\}$  的图。Thomassen<sup>[9]</sup>证明了: 环面上的嵌入图是 5-色的, 除非它包含或者  $K_6$ , 六个点的完全图, 或者  $C_3 + C_5$ , 长度为 3 和 5 的两个圈的联图, 或者  $K_2 + H_7$ ,  $K_2$  和  $H_7$  的联图, 其中  $H_7$  是由在  $K_4$  的两个拷贝上应用 Hajós 构造得到的, 或者环面上有 11 个点的三角剖分图  $T_{11}$ , 它是由长度为 11 的圈添加圈上的距离为 2 和 3 点之间的边得到的图。一个有趣的问题是: 其它的表面上的临界图是否有类似的结果? Chenette、Postle、Streib、Thomas 和 Yerger<sup>[12]</sup>、Kawarayabashi、Král、Kynčl 和 Lidický<sup>[13]</sup>使用不同的方法得到了克莱因瓶上的 6-色临界图完全列表。

## 参考文献 (References)

- [1] Thomassen, C. (1992) The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *American Mathematical Monthly*, **99**, 116-130.
- [2] Mohar, B. and Thomassen, C. (2001) *Graphs on surfaces*. Johns Hopkins University Press, London.
- [3] Kuratowski, C. (1930) Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fundamenta Mathematicae*, **15**, 271-283.
- [4] Heawood, P.J. (1890) Map colour theorem. *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, **24**, 332-338.
- [5] Ringel, G. and Youngs, J.W.T. (1968) Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **60**, 438-455.
- [6] Franklin, P. (1934) A six color problem. *Journal of Mathematical Physics*, **13**, 363-369.
- [7] Ringel, G. (1974) *Map color theorem*. Springer, Berlin.
- [8] Thomassen, C. (1989) The graph genus problem is NP-complete. *Journal of Algorithms*, **10**, 568-576.
- [9] Thomassen, C. (1993) Five-coloring maps on surfaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **59**, 89-105.
- [10] Thomassen, C. (1997) Color-critical graphs on a fixed surface. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **70**, 67-100.
- [11] Thomassen, C. (2003) The chromatic number of a graph of girth 5 on a fixed surface. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **87**, 38-71.
- [12] Chenette, N., Postle, L., Streib, N. and Thomas, R. (2012) Five-colorings graphs on the Klein bottle. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **102**, 1067-1098.
- [13] Kawarayabashi, K.I., Král, D., Kynčl, J. and Lidický, B. (2009) 6-critical graphs on the Klein bottle. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **23**, 372-383.