

An Approximation Algorithm for Average Path Length in A Small-World Network Model

Ke Zhang¹, Haixing Zhao², Feng Li²

¹Department of Mathematics, Qinghai Normal University, Xining

²School of Computer Science, Qinghai Normal University, Xining

Email: hbsanli@163.com, h.x.zhao@163.com

Received: Dec. 29th, 2013; revised: Jan. 30th, 2014; accepted: Feb. 7th, 2014

Copyright © 2014 Ke Zhang et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. In accordance of the Creative Commons Attribution License all Copyrights © 2014 are reserved for Hans and the owner of the intellectual property Ke Zhang et al. All Copyright © 2014 are guarded by law and by Hans as a guardian.

Abstract: Deterministic small-world network is an important branch of study of complex networks. In 2008, Zhang et al. in Eur.Phys.J.B 63 have offered detailed topological characteristics of the deterministic uniform recursive tree from the viewpoint of complex network. They derived topological characteristics of the deterministic uniform recursive tree. It shows a logarithmic scaling with the size of the network, however, its clustering coefficient is zero. In 2012, Lu, et al. in Physica A 391, based on the deterministic uniform recursive tree, by a simple rule to add some edges, got a deterministic small-world network model. In this paper, using an approximation algorithm based on the network construction, we show explicitly the average path length of the model constructed in Physica A 391.

Keywords: Graph Theory; Small-World Network; Average Path Length

一种确定性小世界网络模型平均路径长度的逼近方法

张 科¹, 赵海兴², 李 峰²

¹青海师范大学数学系, 西宁

²青海师范大学计算机学院, 西宁

Email: hbsanli@163.com, h.x.zhao@163.com

收稿日期: 2013年12月29日; 修回日期: 2014年1月30日; 录用日期: 2014年2月7日

摘 要: 确定性小世界网络是复杂网络中的一个重要的研究分支。2008年, 章忠志等人(Eur.Phys.J.B 63)在复杂网络的视角下对确定性均匀递归树作了详尽地分析, 得到了其拓扑属性。尽管确定性均匀递归树的平均路径长度表现出了网络大小的对数规模, 但是它的聚类系数为零。2012年, 陆哲明等人(Physica A 391)通过在确定性均匀递归树的基础上以一个简单的规则添加一些边得到一个确定性小世界网络模型。本文根据网络模型的结构用分析的方法给出了文献 Physica A 391 中的模型的平均路径长度的逼近方法。

关键词: 图论; 平均路径长度; 小世界网络

1. 引言

很多现实生活网络都体现出了小世界效应^[1-4], 诸如交通网络、电力网络、选举网络和社会关系网络。小世界网络有两个典型的属性: 其一, 较短的平均路径长度。平均路径长度与网络顶点个数的对数成正比例关系。

其二，较高的聚类系数。高的聚类系数使网络包含一些块。

除度分布^[5,6]、中心性^[7]等以外，平均路径长度是一个基本的刻画复杂网络的度量。同时，网络的平均路径长度对其不同的动力学特性具有很大的影响，如疾病传播^[8]、随机游走^[9]、同步^[10]等。因为平均路径长度对于网络来说意义重大，所以说对它的研究引起了广泛的重视^[11-15]。

本文的研究所基于的网络模型源于均匀递归树^[16]。均匀递归树是 ER 随机网络之外的一个重要的随机模型。均匀递归树可以按如下的简单的方式生成：在每一次迭代中，一个新的顶点随机选择连接到一个已经存在的顶点上。确定性小世界网络是复杂网络中的一个重要的研究分支^[17]。在 2002 年，确定视角下的均匀递归树^[18]被构造出来去模仿现实生活网络，该网络的顶点数与时间步成指数关系。在 2008 年，章忠志等人^[19]在复杂网络的视角下对确定性均匀递归树作了详尽的分析。他们得出确定性均匀递归树的拓扑特性，如度分布、平均路径长度、介数分布、度相关性，并且计算出了 Laplacian 矩阵的特征值和特征向量。确定性均匀递归树的平均路径长度表现出网络大小的对数规模，然而，它的聚类系数为零。在 2012 年，陆哲明等人^[20]根据确定性均匀递归树得到一个小世界网络。通过在每一个迭代步以一种简单的规则添加一些边，从而可以获得一个高的聚类系数。此模型的构造是在树的结构的基础上得到二树的典型例子，使被构造的模型具有了小世界性。

本文用逼近的方法，计算了文献[20]中所构造的模型的平均路径长度。在研究复杂网络的结构属性时，有些属性难以精确计算，而用数据模拟又具有局限性，本文提供了一个有用的参考。

2. 模型及特性分析

确定性均匀递归树的生成过程非常简单^[18]。用 U_t 表示经过 t 步迭代后的确定性均匀递归树，并用 V_t 和 E_t 分别表示其顶点数和边数。其中， $t=0,1,2,\dots,T-1$ ， T 为迭代的总步数。如图 1(迭代的前四步)所示。确定性均匀递归树的生成过程可以描述如下：

第 0 步：初始状态。当 $t=0$ 时， U_0 为连接两个顶点的一条边，此时， $V_0=2$ ， $E_0=1$ 。

第 1 步： U_{t+1} 在 U_t 的基础上生成。对于 U_t 的每一个顶点都对应添加一个新的顶点并分别用一条边相连。从而有， $V_{t+1}=2V_t$ ， $E_{t+1}=E_t+V_t$ 。

第 2 步：若 $t < T-1$ ，令 $t=t+1$ 转第 1 步。否则，迭代停止。

上述的迭代进行 $T-1$ 次后，可以得到一个顶点数 $V_t=2^{t+1}$ 、边数 $E_t=2^{t+1}-1$ 的确定性树。

章忠志等人对确定性均匀递归树的几个重要的拓扑属性进行了研究^[19]，其主要结果为：1) 累积度分布 $UP_{cum}(k)=2^{-k+1}$ ，关于 k 呈单调递减的指数关系，即确定性均匀递归树是一个指数分布的网络，其度分布与随机性均匀递归树的度分布类似。2) 平均路径长路 $Ud_t=(t2^{t+1}+1)/(2^{t+1}-1)$ ，当 $t \rightarrow \infty$ 时， $Ud_t \rightarrow t = \ln V_t / \ln 2 - 1$ 。由此，其平均路径长度与网络顶点个数的对数成正比例关系，具有与均匀递归树和 WS 网络模型类似的小世界现象。3) 介数分布表现出底为 2 的指数函数关系，具有与均匀递归树相同的规模。4) 度相关性 $Uk_m(k)$ 正相关于 k 的线性函数，这表明确定性均匀递归树是对称的。尽管他们没有给出确定性均匀递归树的聚类系数，但很容易知道其聚类系数为 0，因为均匀递归树中不存在三角形。因此确定性均匀递归树不是小世界网络。

陆哲明等人^[20]在确定性均匀递归树生成规律的基础上调整添加边数的规则，使网络具有较大的聚类系数，从而具有小世界性。用 $G(t)$ 表示经过 t 步迭代后的小世界网络，并用 N_t 和 B_t 分别表示其顶点数和边数。其中， $t=0,1,2,\dots,T-1$ ， T 为迭代的总步数。随着时间步 t 的递增给每一个顶点标注一个自然数，则其生成过程

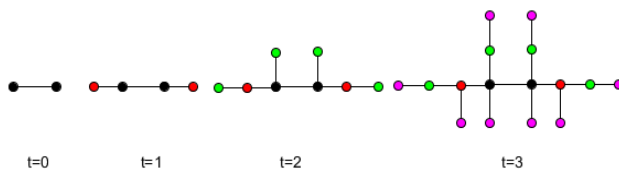


Figure 1. The first four iterations of the growth process of deterministic uniform recursive tree
图 1. 确定性均匀递归树的生成过程的前 4 步

可以描述如下:

第 0 步: 初始状态。当 $t=0$ 时, $G(0)$ 为连接两个顶点的一条边, 这两个顶点分别标记为“1”和“2”, 此时, $N_0=2, B_0=1$ 。

第 1 步: $G(t+1)$ 在 $G(t)$ 的基础上生成。这一步包含以下两个分步。

第 1.1 步: 生成确定性均匀递归树。 $G(t)$ 中标号为“ p ”的顶点和新增加的标号为“ N_t+p ”的顶点用一条边相连。其中, $p=1,2,\dots,N_t$ 。

第 1.2 步: 添加边。 $G(t+1)$ 中新添加的标号为“ N_t+p ”的顶点和 $G(t)$ 中标号为“ N_t-p+1 ”的顶点用一条边相连。其中, $p=1,2,\dots,N_t$ 。

显然, 经过这两个分步之后, 有 $N_{t+1}=2N_t, B_{t+1}=B_t+2N_t$ 。

第 2 步: 若 $t < T-1$, 令 $t=t+1$ 转第 1 步。否则, 迭代停止。

上述的迭代进行 $T-1$ 次后, 就可以得到一个高的聚类系数的确定性网络。如图 2(a)(迭代的前四步)所示。上述的迭代进行 $T-1$ 次后, 由顶点数和边数之间的关系 $N_{t+1}=2N_t, B_{t+1}=B_t+2N_t$ 及初始条件 $N_0=2, B_0=1$, 可以计算得出 $N_t=2^{t+1}, B_t=2^{t+2}-3$ 。

陆哲明等人对所构建的确定性小世界网络的几个重要的拓扑属性进行了研究^[20], 其主要结果为: 1) 度分布 $P(k) \propto 2^{-k/2}$, 关于 k 呈指数关系, 即构造的确定性小世界网络, 与包括 WS 网络模型在内的很多小世界网络的度分布的表现一致。2) 聚类系数 $C(t) = \frac{2^{-t+1}}{2t+1} + \sum_{n=1}^t \frac{2^{-n}}{n}$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $C(t) \rightarrow \ln 2$ 。由此, 其聚类系数较高,

符合小世界现象对聚类系数的要求。3) 直径 $D(t) = t+1 = \frac{\ln V_t}{\ln 2}$, 可知网络的直径与网络顶点个数的对数成正比关系, 而网络的直径不会大于其平均路径长度, 所以网络的平均路径长度增长得更缓慢。表现出小世界现象。

从所造网络的上述拓扑属性可以断言其为一个确定性小世界网络, 因为其具有高的聚类系数和小的平均路径长度, 符合小世界网络对于其拓扑属性的要求。

实际上, 整个过程是将树变成二树。图 2(a)中的曲线部分为新添加的边。这个巧妙的简单的迭代生成过程也可以换一个视角描述为: 初始状态 $t=0$ 时, 为连接两个顶点的一条边; $t=1$ 时, 在初始边的两侧各添加一个顶点, 并均与初始的两个顶点相连; $t=2$ 时, 在 $t=1$ 步新添加的边所围成的四边形中, 任选一组对边, 在此两边的两侧各添加一个顶点, 并均与相应的边上的两个顶点相连, 第 t 步的网络模型是在第 $t-1$ 步的基础上生成的: 在第 $t-1$ 步新添加的边所围成的四边形中, 任选一组对边按 $t=1$ 时的规则添加新的边, 直到网络达到所需要的规模。如图 2(b)(迭代的前四步)所示。比较图 2(a)和图 2(b), 可以看出, 后者将前者平面化了, 能清楚地看到此

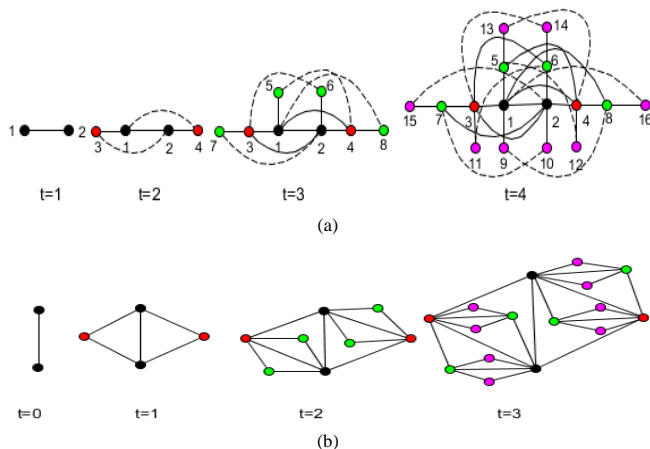


Figure 2. (a) The first four iterations of the growth process of the network proposed by Lu et al.; (b) The first four iterations of the growth process of the network proposed by Lu et al. on a new viewpoint

图 2. (a) 陆哲明等人所构造的小世界网络的生成过程的前 4 步; (b) 在新的视角下陆哲明等人所构造的小世界网络的生成过程的前 4 步

网络模型具有自相似性。可见，从图形的结构上审视它，更容易发现网络模型的生成规律。便于用分析的方法计算该确定性小世界网络的平均路径长度。

3. 平均路径长度的逼近方法

平均路径长度是一个重要的刻画网络特性的参数。平均路径长度定义为网络中任意两点间最短路径长度的平均值。在现实生活网络中，人们常常能注意到“小世界”现象，即短的平均路径长度。对于大多数网络，很难给出一个精确的计算平均路径长度的方法。很明显，该网络模型的平均路径长度与生成网络的迭代步数 t 有关。

根据图 3，下面给出了一种逼近的方法来计算该网络模型的平均路径长度。

用 $d_{i,j}$ 表示 $G(t)$ 中的顶点 i 与顶点 j 之间的最短路径长度，用 $V(t)$ 表示 $G(t)$ 中的所有顶点组成的集合，由定义 $G(t)$ 的平均路径长度可以表示如下：

$$\bar{d}_t = \frac{1}{|V(t)|(|V(t)|-1)/2} \sum_{i,j \in V(t)} d_{i,j} \quad (1)$$

其中

$$|V(t)| = N_t = 2^{t+1} \quad (2)$$

根据 $G(t)$ 的标准的迭代结构来获得 \bar{d}_t 的值。图 $G(t+1)$ 是在图 $G(t)$ 的两个拷贝（记为 $G_1(t)$ 、 $G_2(t)$ ）之间连三条边得到的。如图 3 所示。

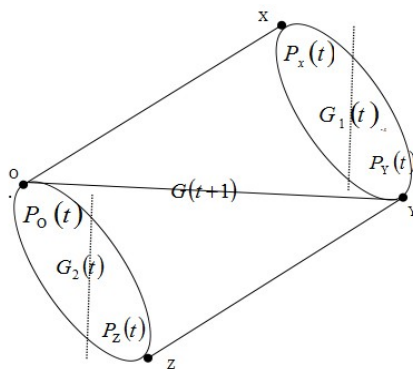


Figure 3. Schematic illustration of the recursive construction of the network proposed by Lu et al. on a new viewpoint

图 3. 在新的视角下陆哲明等人所构造的小世界网络的循环示意图

两个拷贝 $G_1(t)$ 和 $G_2(t)$ 相互之间通过 $G_1(t)$ 中的顶点集 $\{X, Y\}$ 和 $G_2(t)$ 中的顶点集 $\{Z, O\}$ 连接。 $G(t+1)$ 中其余的点称之为内点。

用 $\Delta_t^{1,2}$ 表示从 $G_1(t)$ 的内点到 $G_2(t)$ 的内点的所有最短路径长度之和。用 Δ_t 表示 $G_1(t)$ 的点到顶点集 $\{O, Z\}$ 及 $G_2(t)$ 的点到顶点集 $\{X, Y\}$ 的所有路径长度之和。

$G(t+1)$ 中任意两点之间的路径长度之和(即维纳指数)记为 $W(t+1) = \sum_{i,j \in V(t+1)} d_{i,j}$ ，则有

$$W(t+1) = 2W(t) + \Delta_t^{1,2} + \Delta_t \quad (3)$$

将 $G_1(t)$ 的内点分为两类 $P_x(t)$ 、 $P_y(t)$ ，则 $P_x(t)$ 中的内点经过点 X 路径长度最小， $P_y(t)$ 中的内点经过点 Y 路径长度最小。同样地我们把 $G_2(t)$ 中的点也分成了两部分 $P_z(t)$ 和 $P_o(t)$ 有

$$|P_x(t)| = |P_y(t)| = |P_z(t)| = |P_o(t)| = \frac{G(t)-2}{2} = 2^t - 1 \quad (4)$$

且易知

$$\sum_{i \in P_X(t)} d_{X,i} = \sum_{i \in P_Y(t)} d_{Y,i} = \sum_{i \in P_Z(t)} d_{Z,i} = \sum_{i \in P_O(t)} d_{O,i} \quad (5)$$

令 $\sum_{i \in P_X(t)} d_{X,i} = S(t)$ ，根据网络的结构

$$S(t) = S(t-1) + 2S(t-2) + 2^{t-1} \quad (6)$$

由(6)式可得

$$S(t) + S(t-1) = t \cdot 2^{t-1} \quad (7)$$

可以进一步得到

$$\begin{aligned} \Delta_t &= \sum_{i \in V_2(t) \setminus \{Z,O\}} d_{X,i} + \sum_{i \in V_2(t) \setminus \{Z,O\}} d_{Y,i} + \sum_{i \in V_1(t) \setminus \{X,Y\}} d_{Z,i} + \sum_{i \in V_1(t) \setminus \{X,Y\}} d_{O,i} + 5 \\ &= 6 \sum_{i \in P_O(t)} (d_{X,O} + d_{O,i}) + 2 \sum_{i \in P_Z(t)} (d_{X,Z} + d_{Z,i}) + 5 \end{aligned} \quad (8)$$

而

$$2^t - 1 + S(t) \leq \sum_{i \in P_Z(t)} (d_{X,Z} + d_{Z,i}) \leq 2(2^t - 1) + S(t) - 1 \quad (9)$$

由(8)式和(9)式，可以得到

$$8(2^t - 1) + 8S(t) + 5 \leq \Delta_t \leq 10(2^t - 1) + 8S(t) - 1 \quad (10)$$

另一方面，为了计算 $\Delta_t^{1,2}$ ，有

$$\Delta_t^{1,2} = \sum_{u \in P_X(t), v \in P_O(t)} d_{u,v} + \sum_{u \in P_Y(t), v \in P_Z(t)} d_{u,v} + \sum_{u \in P_Y(t), v \in P_O(t)} d_{u,v} + \sum_{u \in P_X(t), v \in P_Z(t)} d_{u,v} \quad (11)$$

由网络结构的自相似性，有

$$\sum_{u \in P_X(t), v \in P_O(t)} d_{u,v} = \sum_{u \in P_Y(t), v \in P_Z(t)} d_{u,v} = \sum_{u \in P_Y(t), v \in P_O(t)} d_{u,v} \quad (12)$$

根据(11)和(12)式，易知

$$\Delta_t^{1,2} = 3 \sum_{u \in P_X(t), v \in P_O(t)} d_{u,v} + \sum_{u \in P_X(t), v \in P_Z(t)} d_{u,v} \quad (13)$$

而

$$\begin{aligned} \sum_{u \in P_X(t), v \in P_O(t)} d_{u,v} &= \sum_{u \in P_X(t)} \sum_{v \in P_O(t)} d_{u,v} = \sum_{u \in P_X(t)} \sum_{v \in P_O(t)} (d_{u,X} + d_{X,O} + d_{O,v}) = \sum_{u \in P_X(t)} \left(\sum_{v \in P_O(t)} d_{u,X} + \sum_{v \in P_O(t)} d_{X,O} + \sum_{v \in P_O(t)} d_{O,v} \right) \\ &= \sum_{u \in P_X(t)} \left[(2^t - 1)d_{u,X} + (2^t - 1) + S(t) \right] = (2^t - 1)S(t) + (2^t - 1)^2 + (2^t - 1)S(t) \\ &= 2(2^t - 1)S(t) + (2^t - 1)^2 \end{aligned} \quad (14)$$

类似地，有

$$2(2^t - 1)S(t) + (2^t - 1)^2 \leq \sum_{u \in P_X(t), v \in P_Z(t)} d_{u,v} \leq 2(2^t - 1)S(t) + 2(2^t - 1)^2 - (2^t - 1) \quad (15)$$

因此，可以得到

$$8(2^t - 1)S(t) + 4(2^t - 1)^2 \leq \Delta_t^{1,2} \leq 8(2^t - 1)S(t) + 5(2^t - 1)^2 - (2^t - 1) \quad (16)$$

根据初始条件 $S(1)=7$ ，有

当 $\Delta_t = 8(2^t - 1) + 8S(t) + 5$ ， $\Delta_t^{1,2} = 8(2^t - 1)S(t) + 4(2^t - 1)^2$ 时，由(3)式有

$$W(t+1) = 2W(t) + 2^{t+3}S(t) + 4 \cdot 2^{2t} + 1 \quad (17)$$

计算得，

$$W(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} \cdot 2^{2t+2} - \frac{1}{9} \cdot 2^{2t+1} + \frac{4}{9} \cdot 2^{t+2} - 1, & t \text{ 为奇数} \\ \frac{t}{3} \cdot 2^{2t+2} + \frac{7}{9} \cdot 2^{2t+1} - \frac{11}{9} \cdot 2^{t+2} - 1, & t \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (18)$$

当 $\Delta_t = 10(2^t - 1) + 8S(t) + 3$ ， $\Delta_t^{1,2} = 8(2^t - 1)S(t) + 5(2^t - 1)^2 - (2^t - 1)$ 时，由(3)式有

$$W(t+1) = 2W(t) + 2^{t+3}S(t) + 5 \cdot 2^{2t} - 2^t - 1 \quad (19)$$

计算得，

$$W(t) = \begin{cases} \frac{t}{3} \cdot 2^{2t+2} + \frac{5}{18} \cdot 2^{2t+1} + \frac{5}{18} \cdot 2^t - t \cdot 2^{t-1} + 1, & t \text{ 为奇数} \\ \frac{t}{3} \cdot 2^{2t+2} + \frac{37}{18} \cdot 2^{2t} - \frac{115}{18} \cdot 2^t - t \cdot 2^{t-1} + 1, & t \text{ 为偶数} \end{cases} \quad (20)$$

根据前文的定义 $W(t) = \sum_{i,j \in V(t)} d_{i,j}$ ，由(1)式、(2)式、(18)式及(20)式，当 $t \rightarrow \infty$ 时，

$$\bar{d}_t \approx \frac{2}{3}t = \frac{2}{3}(\ln|V_t| - 1) \quad (21)$$

因此，对于大的网络，平均路径长度的增长与网络的大小规模的增长呈对数关系。并且，经过简单的计算

$\frac{t - \frac{2}{3}t}{t} = \frac{1}{3}$ ，可知对于大的 t ，按规则在均匀递归树的基础上填加一些边得到的确定性小世界网络的平均路径长度减小了三分之一。

4. 总结

现实生活中的很多网络都体现了小世界性。本文运用分析方法中的逼近方法计算出了一个经典的确定性小世界网络模型的平均路径长度，基于网络模型的结构，计算结果相对精确。发现当网络的规模趋近于无穷时，其平均路径长度和顶点数的关系为： $\bar{d}_t \sim \ln|V_t|$ 。本文提供的逼近方法可以作为一些复杂的网络属性的计算的参考。

项目基金

科技部 973 专项(No. 2010CB334708)、国家自然科学基金项目(No. 61164005)、教育部长江学者与创新团队支持计划(No. IRT1068)、青海省自然科学基金项目(No. 2012-Z-943)。

参考文献 (References)

- [1] Newman, M.E.J. (2000) Models of the small world. *Journal of Statistical Physics*, **101**, 819-941.
- [2] Albert, R. and Barabási, A.-L. (2002) Statistical mechanics of complex networks. *Reviews of Modern Physics*, **74**, 47-97.
- [3] Newman, M.E.J. (2003) The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, **45**, 167-256.
- [4] Yu, S., Huang, D., Singer, W. and Nikolic, D. (2008) A small world of neuronal synchrony. *Cerebral Cortex*, **18**, 2891-2901.
- [5] Chung, F. and Lu, L. (2002) The average distances in random graphs with given expected degrees. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **99**, 2576-2581.

Sciences of USA, **99**, 15879-15882.

- [6] Cohen, R. and Havlin, S. (2003) Scale-free networks are ultrasmall. *Physical Review Letters*, **90**, Article ID: 058701.
- [7] Dorogovtsev, S.N., Mendes, J.F.F. and Oliveira, J.G. (2006) Degree-dependent intervertex separation in complex networks. *Physical Review E*, **73**, Article ID: 056122.
- [8] Watts, D.J. and Strogatz, S.H. (1998) Collective dynamics of “small-world” networks. *Nature*, **393**, 440-442.
- [9] Condamin, S., Benichou, O., Tejedor, V., Voituriez, R. and Klafter, J. (2007) First-passage times in complex scale-invariant media. *Nature*, **450**, 77-80.
- [10] Nishikawa, T., Motter, A.E., Lai, Y.-C. and Hoppensteadt, F.C. (2003) Heterogeneity in oscillator networks: Are smaller worlds easier to synchronize? *Physical Review Letters*, **91**, Article ID: 014101.
- [11] Dorogovtsev, S.N., Mendes, J.F.F. and Samukhin, A.N. (2003) Metric structure of random networks. *Nuclear Physics*, **653**, 307-338.
- [12] Lovejoy, W.S. and Loch, C.H. (2003) Minimal and maximal characteristic path lengths in connected sociomatrices. *Social Networks*, **25**, 333-347.
- [13] Fronczak, A., Fronczak, P. and Holyst, J.A. (2004) Average path length in random networks. *Physical Review E*, **70**, Article ID: 056110.
- [14] Holyst, J.A., Sienkiewicz, J., Fronczak, A., Fronczak, P. and Suchecki, K. (2005) Universal scaling of distances in complex networks. *Physical Review E*, **72**, Article ID: 026108.
- [15] Fekete, A., Vattay, G. and Posfai, M. (2009) Shortest path discovery of complex networks. *Physical Review E*, **79**, Article ID: 065101.
- [16] Smythe, R.T. and Mahmoud, H. (1995) A survey of recursive trees. *Theorya Imovirnosty ta Matematyka Statystika*, **51**, 1-27.
- [17] 章忠志, 周水庚, 方锦清 (2008) 复杂网络确定性模型研究的最新进展. *复杂系统与复杂性科学*, **4**, 29-46.
- [18] Jung, S., Kim, S. and Kahng, B. (2002) A geometric fractal growth model scale free networks. *Physical Review E*, **65**, Article ID: 056101.
- [19] Zhang, Z.Z., Zhou, S.G., Qi, Y. and Guan, J.H. (2008) Topologies and Laplacian spectra of a deterministic uniform recursive tree. *European Physical Journal B*, **63**, 507-513.
- [20] Lu, Z.M. and Guo, S.Z. (2012) A small-world network derived from the deterministic uniform recursive tree. *Physica A*, **391**, 87-92.