

A Fourth-Order Compact Finite Volume Scheme for 1D Sine-Gordon Equations

Angran Liu, Wei Gao, Hong Li

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia
Email: liuang_ran@163.com, gaow@imu.edu.cn, smslh@imu.edu.cn

Received: Jul. 29th, 2015; accepted: Aug. 11th, 2015; published: Aug. 18th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

In this work, we propose a compact finite volume method for solving the one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation. The third-order SSP Runge-Kutta (RK) scheme is used for temporal discretization. Numerical experiments show that the present scheme is an efficient algorithm for solving the one-dimensional Sine-Gordon equation.

Keywords

Sine-Gordon, Compact Method, Finite Volume Method, Runge-Kutta Method

一维Sine-Gordon方程四阶紧致有限体积方法

刘盎然, 高巍, 李宏

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特
Email: liuang_ran@163.com, gaow@imu.edu.cn, smslh@imu.edu.cn

收稿日期: 2015年7月29日; 录用日期: 2015年8月11日; 发布日期: 2015年8月18日

摘要

本文提出一个高阶方法来数值求解非线性Sine-Gordon方程。空间离散上应用四阶的紧致有限体积格式, 时间离散应用三阶SSP Runge-Kutta (RK)方法。数值实验表明该算法是求解一维Sine-Gordon方程的较为高效的方法。

关键词

Sine-Gordon, 有限体积紧格式, Runge-Kutta方法

1. 引言

一维 Sine-Gordon 方程是重要的非线性数学物理方程, 可以用来描述流体力学、气象学、场论等领域很多物理现象。例如, 传播中的磁通量子两个超导体之间的约瑟夫逊结[1], 严格的钟摆的运动在拉伸线[2]、固体物理、非线性光学、流体运动的稳定性。人们对此已经用一些方法作了研究。例如, 显式有限差分格式和隐格式离散能量守恒方法[3]。Strauss and Vázquez [4], 使用经典的有限差分格式[5] [6], 计算了 Klein-Gordon 方程。而[7]的作者提出了一个使用基函数的方法。Ramos [8]使用五点隐式有限差分方法。[9]提出了一种通用的解决 Sine-Gordon 方程的辛方法。Batiha *et al.* [10]给出了一个变分迭代法来获得 Sine-Gordon 方程的近似解。[11]是将 Sine-Gordon 方程转化为一阶非线性初值问题, 然后利用递归矩阵在时间和空间近似的二阶方法。Bratsos [12]提出了一种二阶的空间精度和四阶的时间精度的方法。

在本文中, 我们利用紧致四阶有限体积方法离散空间导数, 用稳定的三阶 Runge-Kutta 方法求解一阶常微分方程组。文章框架如下, 第一节为引言。第二节构造求解 Sine-Gordon 方程所使用的 4 阶紧致有限体积方法。第三节给出时间离散方法, 即 Runge-Kutta 方法; 第四节两个典型算例及计算结果讨论。

一维 Sine-Gordon 方程如下:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u, \quad x \in [L_1, L_2] \quad (1)$$

初始条件为

$$u(x, 0) = g_1(x), \quad u_t(x, 0) = g_2(x), \quad x \in [L_1, L_2] \quad (2)$$

边界条件为

$$u(L_1, t) = h_1(x), \quad u(L_2, t) = h_2(x), \quad t > 0 \quad (3)$$

为了方便研究能量守恒关系, 代入

$$u(x, t) = U(\omega), \quad \omega = x - ct \quad (4)$$

其中 C 是一个常数, 那么方程(1)可以变化为非线性常微分方程

$$\frac{1}{4}(1-c)^2 \left(\frac{dU}{d\omega} \right)^2 - \sin^2 \left(\frac{U}{2} \right) = 0, \quad c^2 < 1 \quad (5)$$

由文献[1]可知, 方程(1)的非平凡解为

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1} \left[\pm \exp(\pm \gamma(x - ct)) \right], \quad \gamma = (1 - c^2)^{-1/2} \quad (6)$$

我们常用孤立子方程的守恒性质来检验对方程数值离散的精度[13]。一个具体的孤立子波的能量表达式为

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 + u_t^2 + 2(1 - \cos u) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 4\gamma \operatorname{sech}^2 v dv = 8\gamma, \quad v = \gamma(x - ct) \quad (7)$$

2. 紧致有限体积方法

考虑计算区域为 $[a, b]$, 将其剖分成 N 个区域, 那么共有 $N+1$ 个结点, 每个小区间的长度为

$$h = x_i - x_{i-1} = (b-a)/N, \quad i=1, \dots, N$$

对(1)式在第 i 个小区间单元上对上式求积分, 并对等式两边同时除以 Δx , 可以得到

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x_{i+1/2}} - \frac{\partial u}{\partial x_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sin u dx \quad (8)$$

记 $\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u dx$, 称 \bar{u}_i 为 u 在第 i 个单元上的单元平均值, 那么(8)式可以简记为

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial u}{\partial x_{i+1/2}} - \frac{\partial u}{\partial x_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sin u dx$$

首先, 要□上式 $\frac{\partial u}{\partial x_{i+1/2}}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial x_{i-1/2}}$ □行估□, 通过参考文献我们可以得到如下的估计式

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_{i-1/2}} + \frac{\partial u}{\partial x_{i+1/2}} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_{i+3/2}} = \frac{a_2}{\Delta x} (\bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i) \quad (9)$$

对应 4 阶精度的系数为[14]

$$a_1 = \frac{1}{10}, \quad a_2 = \frac{6}{5}$$

这些系数的确定, 可以通过在点 $u_{i+1/2}$ 泰勒展开得到, 例如 \bar{u}_{i+2} 在点 $u_{i+1/2}$ 的泰勒展开为

$$\bar{u}_{i+2} = u_{i+1/2} + \frac{3}{2} \Delta x \frac{\partial u}{\partial x_{i+1/2}} + \frac{7}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2_{i+1/2}} + O(\Delta x^3)$$

并且在 Sine-Gordon 方程中对应的边界条件为 Dirichlet 边界条件, 那么对应的左边界处格式为

$$\frac{\partial u}{\partial x_{1/2}} + a_3 \frac{\partial u}{\partial x_{3/2}} = -\frac{1}{\Delta x} (a_4 u_{1/2} + a_5 \bar{u}_1 + a_6 \bar{u}_2 + a_7 \bar{u}_3) \quad (10)$$

通过 Taylor 展开计算出对应的系数为

$$a_3 = 6, \quad a_4 = \frac{5}{3}, \quad a_5 = \frac{89}{18}, \quad a_6 = -\frac{127}{18}, \quad a_7 = \frac{4}{9}$$

相应的右边界格式只是左边界格式的一个镜面映射。令

$$\frac{\partial U}{\partial x_{\bullet+1/2}} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_{1/2}}, \frac{\partial u}{\partial x_{3/2}}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_{N+1/2}} \right\}^T, \quad i=0, \dots, N$$

那么可以得到 $\frac{\partial U}{\partial x_{\bullet+1/2}}$ 和 \bar{U}_\bullet 之间的关系如下

$$A \frac{\partial U}{\partial x_{\bullet+1/2}} = B \bar{U}_\bullet + P_1 \quad (11)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_3 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_1 & 1 & a_1 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & a_1 & 1 & a_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_3 & 1 \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

$$B = -\frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} a_5 & a_6 & a_7 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_2 & a_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_2 & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & -a_7 & -a_6 & -a_5 \end{bmatrix}_{(N+1) \times N}, \quad P_1 = \frac{1}{\Delta x} \begin{bmatrix} a_4 u_{1/2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ -a_4 u_{N+1/2} \end{bmatrix}_{(N+1) \times 1}$$

这样, 我们就可以得到关于一阶导数离散格式为

$$\frac{\partial U}{\partial x}_{\bullet+1/2} = A^{-1} B \bar{U}_{\bullet} + A^{-1} P_1 \quad (12)$$

对于右端项的非线性项, 我们选取了常用的辛普森公式近似计算其定积分

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sin u dx = \frac{1}{6} \left[\sin(u_{i-1/2}) + 4 \sin(u_i) + \sin(u_{i+1/2}) \right] \quad (13)$$

此时仍需要对上式中的 u 利用单元平均值进行近似。对于 $u_{i-1/2}$ 和 $u_{i+1/2}$ 可以利用下面的格式近似

$$a_8 u_{i-1/2} + u_{i+1/2} + a_8 u_{i+3/2} = a_9 (\bar{u}_i + \bar{u}_{i+1}) \quad (14)$$

其中 4 阶格式的相应系数为[14]

$$a_8 = \frac{1}{4}, \quad a_9 = \frac{3}{4}$$

对于 Dirichlet 边界条件, 该格式也可以直接应用。下面令

$$U_{\bullet+1/2} = \{u_{3/2} \quad u_{5/2} \quad \cdots \quad u_{N+1/2}\}^T, \quad i = 1, \dots, N-1$$

那么在对于空间离散的过程中, 可以得到 $U_{\bullet+1/2}$ 和 \bar{U}_{\bullet} 之间的关系, 如下

$$C U_{\bullet+1/2} = D \bar{U}_{\bullet} + P_2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a_8 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_8 & 1 & a_8 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & a_8 & 1 & a_8 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_8 & 1 \end{bmatrix}_{(N-1) \times (N-1)}, \quad D = \begin{bmatrix} a_9 & a_9 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_9 & a_9 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & a_9 & a_9 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_9 & a_9 \end{bmatrix}_{(N-1) \times N}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} a_8 u_{1/2} \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ a_8 u_{N+1/2} \end{bmatrix}_{(N-1) \times 1}$$

得到空间离散格式为

$$U_{\bullet+1/2} = C^{-1} D \bar{U}_{\bullet} + C^{-1} P_2 \quad (15)$$

这样就将数值积分中的单元边界值处理完毕。下面要解决 u 在 i 点的数值近似, 其中一种方法就是利用上文已经处理的单元边界值对其进行近似, 从而得到一个 4 阶数值近似格式

$$a_{10} u_{i-1} + u_i + a_{10} u_{i+1} = a_{11} (u_{i-1/2} + u_{i+1/2}) \quad (16)$$

对应的 Dirichlet 边界条件的左边界格式为

$$u_1 + u_2 = a_{12} u_{1/2} + a_{13} u_{3/2} + a_{12} u_{5/2} \quad (17)$$

对应的系数为

$$a_{10} = \frac{1}{6}, \quad a_{11} = \frac{2}{3}, \quad a_{12} = \frac{1}{4}, \quad a_{13} = \frac{3}{2}$$

右边界也是类似的格式。我们令

$$U_{\bullet} = \{u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_N\}^T, \quad i = 1, \dots, N$$

$$\tilde{U}_{\bullet+i/2} = \{u_{1/2} \quad u_{3/2} \quad \cdots \quad u_{N+1/2}\}^T, \quad i = 0, \dots, N$$

那么可以得到 u_i 和 $u_{i+1/2}$ 之间的关系, 如下

$$EU_{\bullet} = F\tilde{U}_{\bullet+i/2}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{10} & 1 & a_{10} & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{10} & 1 & a_{10} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}_{N \times N}, \quad D = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{11} & a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{11} & a_{11} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & a_{12} & a_{13} & a_{12} \end{bmatrix}_{N \times (N+1)}$$

这样就可以得到空间离散格式为

$$U_{\bullet} = E^{-1}F\tilde{U}_{\bullet+i/2} \quad (18)$$

将整个离散后的右端项记为 $L(\bar{u}_i)$, 就有 $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = L(\bar{u}_i)$, 这是一个常微分方程, 从而空间离散完成。

3. Runge-Kutta 时间离散

在将右端项进行空间半离散之后, 再考虑初始条件和边界条件, 用 3 阶强稳定 Runge-Kutta (a third-order strong stability preserving Runge-Kutta, 即 SSP-RK3) 方法进行下一步处理。3 阶的 SSP-RK3 的一般形式为[15]

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \frac{h}{6}(L_1 + L_2 + 4L_3) \\ L_1 = f(t_n, u_n) \\ L_2 = f(t_n + \Delta t, u_n + \Delta t L_1) \\ L_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, u_n + \frac{1}{4}\Delta t L_1 + \frac{1}{4}\Delta t L_2\right) \end{cases} \quad (19)$$

对于 Sine-Gordon 方程, 需要将其转换成一阶常微分方程组, 再用 Runge-Kutta 方法进行时间离散。如下

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = R(\bar{v}_i), \quad \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} = P(\bar{u}_i)$$

R, P 分别定义为空间上的线性和非线性的微分算符。时间格式的选取依赖于所要的精度阶, 要考虑储存、计算、稳定性。尤其是当 R, P 是非线性的时候, 更没有依据说明全离散后的格式是稳定的, 这时就更需要强稳定时间格式, 常见的高阶稳定离散可见[16]。

2 阶方程对应初值问题的一般形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial t}\right), \quad y(x_0) = y_0 \\ \frac{\partial y(x_0)}{\partial t} = \frac{\partial y_0}{\partial t} \end{cases}$$

引进变量 z ，可化为 1 阶方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial t} = z, & y(x_0) = y_0 \\ \frac{\partial z}{\partial t} = f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial t}\right), & z(x_0) = \frac{\partial y_0}{\partial t} \end{cases} \quad (20)$$

(20)式对应的 Runge-Kutta 格式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + K_2 + 4K_3), \quad z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(L_1 + L_2 + 4L_3)$$

$$\begin{cases} K_1 = z_n \\ K_2 = z_n + hL_1 \\ K_3 = z_n + \frac{h}{4}L_1 + \frac{h}{4}L_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} L_1 = f(x_n, y_n, z_n) \\ L_2 = f\left(x_n + h, y_n + hK_1\right) \\ L_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{4}K_1 + \frac{h}{4}K_2\right) \end{cases} \quad (21)$$

4. 数值算例

例 1: 考虑如下的一维 sine-Gordon 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u \\ u(x, 0) = 4 \tan^{-1}[\exp(\gamma x)], \quad a \leq x \leq b \\ u_t(x, 0) = \frac{-4c\gamma \exp(\gamma x)}{1 + \exp(2\gamma x)} \end{cases} \quad (22)$$

将其改写为 1 阶方程组

$$\begin{cases} u_t = v \\ v_t = u_{xx} - \sin(u) \end{cases}$$

该方程的精确解为[17]

$$u(x, t) = 4 \tan^{-1}[\exp(\gamma(x - ct))]$$

通过下列的范数定义来计算所得的格式误差收敛阶，记

$$\|\bullet\|_{L_p} = \frac{\left(\sum_{i=0}^N |u(x_i) - u_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{N}, \quad \|\bullet\|_{L_\infty} = \max_{i \leq N} |u_i - u(x_i)|, \quad p = 1, 2$$

精度阶计算公式为

$$\text{order} = \log\left(\frac{e_1}{e_2}\right) / \log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)$$

在区间 $[-6, 6]$ 上求解方程(22)，取 $\Delta t = 0.001$ ， $T = 0.1$ ， $c = 0.5$ （见表 1）。图 1 为在 $N = 120$ 的时候精确解和数值解的曲线拟合情况。可以看到在不同的范数意义下，阶数都达到了 4 阶左右，从图像和误差上，都能看出准确解和数值解有着较好的吻合程度。

例 2: 一维 sine-Gordon 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u \\ u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 4 \operatorname{sech}(x) \end{cases} \quad (23)$$

精确解为

$$u(x,t) = 4 \tan^{-1} [t \operatorname{sech}(x)]$$

Table 1. Errors and orders for 4-order CFVM

表 1. 4 阶紧致有限体积方法下的误差和精度阶

Mesh	L_1 error	L_1 order	L_2 error	L_2 order	L_∞ error	L_∞ order
15	3.48E-004	-	1.81E-004	-	1.18E-004	-
30	4.17E-005	3.07	2.49E-005	2.87	2.35E-005	2.34
60	2.54E-006	4.05	1.64E-006	3.94	1.86E-006	3.67
120	1.80E-007	3.83	1.18E-007	3.81	1.66E-007	3.55

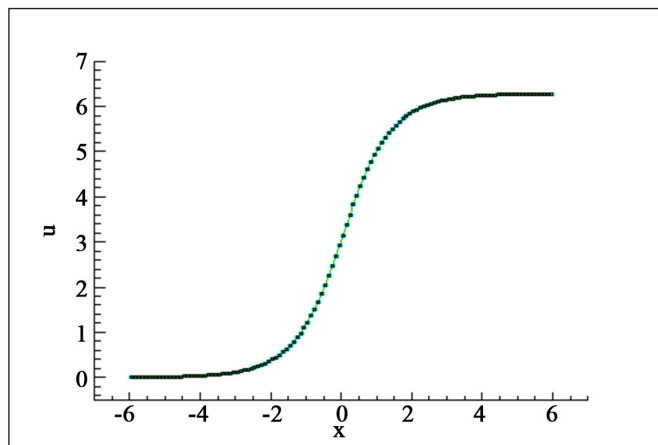


Figure 1. Curve: numerical and exact solution of the first experiment numerical (square); exact (solid line)

图 1. 例 1 数值解和精确解的比较

Table 2. Errors and orders for 4-order CFVM

表 2. 4 阶紧致有限体积方法下的误差和精度阶

Mesh	L_1 error	L_1 order	L_2 error	L_2 order	L_∞ error	L_∞ order
15	8.91E-005	-	5.63E-005	-	1.18E-004	-
30	5.84E-006	3.94	3.74E-006	3.93	2.35E-005	3.98
60	3.46E-007	4.09	2.38E-007	3.99	1.86E-006	3.51
120	2.30E-008	3.92	1.58E-008	3.93	1.66E-007	3.70

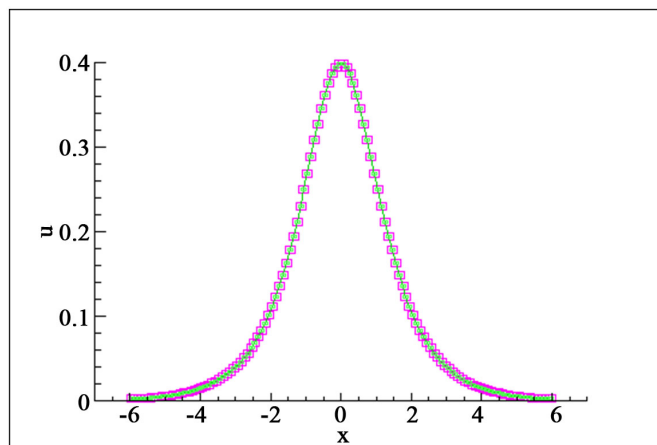


Figure 2. Curve: numerical and exact solution of the second experiment numerical (square); exact (solid line)

图 2. 例 2 数值解和精确解的曲线拟合

在区间 $[-6,6]$ 上求解方程(24), 取 $\Delta t = 0.001$, $T = 0.1$ (见表 2), 在 $N = 120$ 的时候精确解和数值解的曲线拟合情况(如图 2)。从图像和误差上, 准确解和数值解有着较好的吻合程度。因为初值条件相对于例 1 较为简单, 从而在误差和精度阶上有着更好的结果。

基金项目

本文由教育部科学技术研究重点项目(12024), 内蒙古自治区人才开发基金项目(12000-1300020240)和内蒙古自然科学基金(2015MS0101)支持。

参考文献 (References)

- [1] Perring, J.K. and Skyrme, T.H.R. (1962) A model unified field equation. *Nuclear Physics*, **31**, 550-555. [http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90774-5](http://dx.doi.org/10.1016/0029-5582(62)90774-5)
- [2] Whitham, G.B. (1999) *Linear and nonlinear waves*. Wiley-Interscience, New York. <http://dx.doi.org/10.1002/9781118032954>
- [3] Guo, B.Y., Pascual, P.J., Rodriguez, M.J. and Vazquez, L. (1986) Numerical solution of the sine-Gordon equation. *Applied Mathematics and Computation*, **18**, 1-14. [http://dx.doi.org/10.1016/0096-3003\(86\)90025-1](http://dx.doi.org/10.1016/0096-3003(86)90025-1)
- [4] Strauss, W.A. and Vázquez, L. (1978) Numerical solution of a nonlinear Klein-Gordon equation. *Journal of Computational Physics*, **28**, 271-278. [http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991\(78\)90038-4](http://dx.doi.org/10.1016/0021-9991(78)90038-4)
- [5] Dehghan, M. (2006) Finite difference procedures for solving a problem arising in modeling and design of certain optoelectronic devices. *Mathematics and Computers in Simulation*, **71**, 16-30. <http://dx.doi.org/10.1016/j.matcom.2005.10.001>
- [6] Dehghan, M. (2005) On the solution of an initial-boundary value problem that combines Neumann and integral condition for the wave equation. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **21**, 24-40. <http://dx.doi.org/10.1002/num.20019>
- [7] Dehghan, M. and Shokri, A. (2008) A numerical method for one-dimensional nonlinear sine-Gordon equation using collocation and radial basis functions. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, **24**, 687-698. <http://dx.doi.org/10.1002/num.20289>
- [8] Ramos, J.I. (2001) The Sine-Gordon equation in the finite line. *Applied Mathematics and Computation*, **124**, 45-93. [http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003\(00\)00080-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0096-3003(00)00080-1)
- [9] Lu, X. (2001) Symplectic computation of solitary waves for general sine-Gordon equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, **55**, 519-532. [http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754\(00\)00300-1](http://dx.doi.org/10.1016/S0378-4754(00)00300-1)
- [10] Batiha, B., Noorani, M.S.M. and Hashim, I. (2007) Numerical solution of sine-Gordon equation by variational iteration method. *Physics Letters A*, **370**, 437-440. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physleta.2007.05.087>

- [11] Bratsos, A.G. and Twizell, E.H. (1996) The solution of the Sine-Gordon equation using the method of lines. *International Journal of Computer Mathematics*, **61**, 271-292. <http://dx.doi.org/10.1080/00207169608804516>
- [12] Bratsos, A.G. (2008) A fourth order numerical scheme for the one-dimensional sine-Gordon equation. *International Journal of Computer Mathematics*, **85**, 1083-1095. <http://dx.doi.org/10.1080/00207160701473939>
- [13] Piller, M. and Stalio, E. (2004) Finite-volume compact schemes on staggered grids. *Journal of Computational Physics*, **197**, 299-340. <http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2003.10.037>
- [14] Li, S. and Vu-Quoc, L. (1995) Finite difference calculus invariant structure of a class of algorithms for the Klein-Gordon equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **32**, 1839-1875. <http://dx.doi.org/10.1137/0732083>
- [15] 李庆扬, 王能超 (2006) 数值分析. 第四版, 华中科技大学出版社, 武汉.
- [16] Gottlieb, S., Shu, C.-W. and Tadmor, E. (2001) Strong stability-preserving high-order time discretization methods. *SIAM Review*, **43**, 89-112. <http://dx.doi.org/10.1137/S003614450036757X>
- [17] Wei, G.W. (2000) Discrete singular convolution for the Sine-Gordon equation. *Physica D*, **137**, 247-259. [http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789\(99\)00186-4](http://dx.doi.org/10.1016/S0167-2789(99)00186-4)