Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2015, 4(4), 365-368
Published Online November 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44045

G-Design with Three Groups

Li Zhu, Jian Wang

Nantong Vocational University, Nantong Jiangsu
Email: ntzdwangjian@163.com

Received: Nov. 2nd, 2015; accepted: Nov. 19th, 2015; published: Nov. 26th, 2015

Abstract

As a special example of the candelabra systems (CQS), *G*-design is the extension of group divisible designs (*GD*), which plays an important role in quadruple systems' construction. With application of Stern and Lenz's result on one-factorization of graphs, by direct construction, it is given that the sufficient and necessary condition for the existence of the *G*-design with three groups $G_\lambda(3,r,4,3)$ is that $\lambda r^2 \equiv 0 \pmod{12}$.

Keywords

***t*-Designs, Quadruple Systems, Candelabra Systems, *G*-Design**

三个组的*G*-设计

朱　莉，王　建

南通职业大学，江苏　南通
Email: ntzdwangjian@163.com

收稿日期：2015年11月2日；录用日期：2015年11月19日；发布日期：2015年11月26日

摘　要

***G*-设计是可分组设计(*GD*)的推广，同时又是烛台型设计(CQS)的特例，它在四元系设计中起到重要作用。**

文章引用: 朱莉, 王建. 三个组的 *G*-设计[J]. 应用数学进展, 2015, 4(4): 365-368.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2015.44045

文章应用Stern和Lenz关于图因子分解的结论，通过直接构造法，得到具有三个组的*G*-设计$G_\lambda(3,r,4,3)$存在的充分必要条件：$\lambda r^2\equiv 0\pmod{12}$。

关键词

***t*-设计，四元系，烛台型设计，*G*-设计**

1. 引言

设λ,m,r,k和t是给定的正整数，*G*-设计(记为$G_\lambda(m,r,k,t)$)是一个三元组(X, A, B)，其中X是一个mr元点集，A构成X的一个划分，B是X的一些子集组成的一个子集族，X的元素叫点，A的元素叫组，B的元素叫区组，满足(1)对任意$A\in\mathcal{A}$，都有$|A|=r$；(2)对任意$B\in\mathcal{B}$，都有$|B|=k$；(3)对任意$A\in\mathcal{A}$与任意$B\in\mathcal{B}$，都有$|A\cap B|<t$；(4)对于X中每个t元子集T与任意$A\in\mathcal{A}$，如果$|A\cap T|<t$，则T恰好包含于B中λ个区组。$\lambda=1$时，$G_\lambda(m,r,k,2)$记为$G(m,r,k,t)$。

当$t=2$时，*G*-设计$G_\lambda(m,r,k,2)$就是大家熟知的可分组设计或*GD*设计(参见[1])。当$t=3,k=4$时，*G*-设计$G_\lambda(m,r,4,3)$是柄为0的烛台型四元系$CQS_\lambda(r^m:0)$，而烛台型四元系在四元系中起到相当重要的作用(参见[2])。Mills [3] [4]，Hartman [5] [6]研究了$G_\lambda(m,r,4,3)$，得到了一些结论。当$m=2$时，易知$G_\lambda(2,r,4,3)$存在的充分必要条件是：$\lambda r\equiv 0\pmod 2$(参见[4])。本文讨论当$m=3$时，$G_\lambda(3,r,4,3)$的存在性。我们给出$G_\lambda(3,r,4,3)$存在的充分必要条件是：$\lambda r^2\equiv 0\pmod{12}$。

文中用到的组合设计及图论方面的名词术语均参照著作[1]和[7]。

2. 预备知识

定理2.1 $G_\lambda(3,r,4,3)$存在的必要条件是：$\lambda r^2\equiv 0\pmod{12}$。

证明： $G_\lambda(3,r,4,3)$中有$3r$个点，不同的三元点集共有$r(3r-1)(3r-2)/2$个，其中能出现在区组中的有$r(3r-1)(3r-2)/2-r(r-1)(r-2)/2=r^2(4r-3)$，而一个区组含有四个三元集，一个三元集可出现在$\lambda$个区组中，所以，$G_\lambda(3,r,4,3)$中的区组数为$\lambda r^2(4r-3)/4$，因而，$\lambda r^2\equiv 0\pmod 4$。再设$x$是设计中给定的点，能和$x$组成三元集的点对共有$(3r-1)(3r-2)/2$个，其中能出现在区组中的有$(3r-1)(3r-2)/2-(r-1)(r-2)/2=r(4r-3)$个，且每个三元集可出现在$\lambda$个区组中，而一个区组中能和$x$组成三元集的点对有三个，所以，$\lambda r(4r-3)\equiv 0\pmod 3$。综上两点，可得$G_\lambda(3,r,4,3)$存在的必要条件是$\lambda r^2\equiv 0\pmod{12}$。

上述$G_\lambda(3,r,4,3)$存在的必要条件可分类等价于以下四种情形

1) $r\equiv 0(\bmod 6)$且$\lambda\ge 1$或
2) $r\equiv 0(\bmod 2)$且$r\equiv 0(\bmod 3)$或
3) $r\equiv 0(\bmod 3)$且$\lambda\equiv 0(\bmod 4)$或
4) $r\ge 2$且$r\equiv 0(\bmod 12)$。

为证$G_\lambda(3,r,4,3)$存在的充分性，我们需要图1-因子分解的有关知识。记G是具有个g点的图，其点集为$\{0,1,2,\cdots,g-1\}$。设$u<v$，图G的边$e=\{u,v\}$的差定义为$v-u$和$g-(v-u)$中小的一个。我们记图G的边$e=\{u,v\}$的差为$D_g(u,v)$或$D(u,v)$，也即是

$$D(e)=D(u,v)=\min\{v-u,g-(v-u)\}。$$

对于任何一个子集 $D\subseteq\{1,2,\cdots,\lfloor g/2\rfloor\}$（$\lfloor g/2\rfloor$ 表示不大于 $g/2$ 的最大整数），我们定义 $G(D,g)$ 是一个图，其点集为 $\{0,1,2,\cdots,g-1\}$，边集为 $\{\{u,v\}\mid D(u,v)\in D\}$，即包含所有差属于 D 的边。

图 G 的一个子图 H 如果包含了 G 的全部点，则 H 为 G 的生成子图。如果图 G 的一个生成子图 H 是 1-正则的，则称 H 是 G 的 1-因子。如果图 G 的边集可表示为它的某些 1-因子的并，则称 G 存在的 1-因子分解，或称 G 可 1-因子化。下面的引理来自 Stern 和 Lenz [8]，我们在第 3 节的证明中将会用到，其中 $\gcd(\{x,y\})$ 表示 x 和 y 的最大公约数。

引理 2.2 (Stern 和 Lenz)如果 D 包含一个元素 d 使得 $g/\gcd(\{d,g\})$ 是偶数，则图 $G(D,g)$ 存在 1-因子分解。

3. 主要结论

引理 3.1 如果 $G_\lambda(3,r,4,3)$ 存在，则对于任意正整数 s，$G_{s\lambda}(3,r,4,3)$ 存在。

证明：将 $G_\lambda(3,r,4,3)$ 的每个区组重复 s 倍，即得 $G_{s\lambda}(3,r,4,3)$。

由**引理 2.1** 结合**引理 3.1**，为证主要结论，我们只需考虑以下四种情形

1) $\lambda=1$ 且 $r\equiv 0(\mathrm{mod}\,6)$；
2) $\lambda=3$ 且 $r\equiv 2,4(\mathrm{mod}\,6)$；
3) $\lambda=4$ 且 $r\equiv 3(\mathrm{mod}\,6)$；
4) $\lambda=12$ 且 $r\equiv 1,5(\mathrm{mod}\,6)$。

引理 3.2 当 $r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 6)$ 时，$G(3,r,4,3)$ 存在。

证明：设 $r=6n$，记所需设计的点集 $\mathcal{X}=Z_{6n}\times Z_3$，组 A：$\{(x,i)：\ x\in Z_{6n}\}$ $(i\in Z_3)$。

区组 B：$\{(x,i)，\ (x-6j-3,i)，\ (y,i+1)，\ (z,i+2)\}$

$(x,y,z\in Z_{6n}，\ i\in Z_3，\ j\in Z_n，\ x+y+z\equiv 3(n-j)+i-3\,(\mathrm{mod}\ 6n))$；

$\{(x,i)，\ (y,i)，\ (z,i+1)，\ (w,i+1)\}$

(由**引理 2.2**，图 $G(\{1,2,\cdots,3n\}\setminus\{6j+3: j\in Z_n\},6n)$ 存在 1-因子分解，记 $\{F_1,F_2,\cdots,F_t\}$ 是 $G(\{1,2,\cdots,3n\}\setminus\{6j+3: j\in Z_n\},6n)$ 的 1-因子分解，$\{x,y\}\in F_k,\{z,w\}\in F_k,1\le k\le t$，$i\in Z_3$)。

引理 3.3 当 $r\equiv 3\,(\mathrm{mod}\ 6)$ 时，$G_4(3,r,4,3)$ 存在。

证明：设 $r=6n+3$，记所需设计的点集 $\mathcal{X}=Z_{6n+3}\times Z_3$，组 A：$\{(x,i)：\ x\in Z_{6n+3}\}$ $(i\in Z_3)$。

区组 B：$\{(x,i)，\ (x-6j-3,i)，\ (y,i+1)，\ (z,i+2)\}$

$(x,y,z\in Z_{6n+3}，\ i\in Z_3，\ j\in Z_{n-1}，\ x+y+z\equiv 3(n-j)+i-3\,(\mathrm{mod}\ 6n+3))$重复 4 次；

$\{(x,i)，\ (x-6n+3,i)，\ (y,i+1)，\ (z,i+2)\}$

$(x,y,z\in Z_{6n+3}，\ i\in Z_3，\ x+y+z\equiv i\,(\mathrm{mod}\ 6n+3))$重复 2 次；

$\{(x,i)，\ (x-1,i)，\ (y,i+1)，\ (z,i+2)\}$

$(x,y,z\in Z_{6n+3}，\ i\in Z_3，\ x+y+z\equiv 6n-3+2i\,(\mathrm{mod}\ 6n+3))$重复 2 次；

$\{(x,i)，\ (x-1,i)，\ (y,i+1)，\ (z,i+2)\}$

$(x,y,z\in Z_{6n+3}，\ i\in Z_3，\ x+y+z\equiv 6n+2i\,(\mathrm{mod}\ 6n+3))$重复 2 次；

$\{(x,i)，\ (x+6n-3,i)，\ (y,i+1)，\ (y+6n-3,i+1)\}(x,y\in Z_{6n+3}，\ i\in Z_3)$；

$\{(x,i)，(x+d,i)，(y,i+1)，(y+d,i+1)\}(d\in Z_{6n+3}\setminus\{0,\pm1,\pm(6j+3): j\in Z_n\}，\ x,y\in Z_{6n+3}，\ i\in Z_3)$。

引理 3.4 当 $r\equiv 0\,(\mathrm{mod}\ 2)$ 时，$G_3(3,r,4,3)$ 存在。

证明：设 $r=2n$，记所需设计的点集 $\mathcal{X}=Z_{2n}\times Z_3$，组 A：$\{(x,i)：\ x\in Z_{2n}\}$ $(i\in Z_3)$。

区组 B：$\{(x,i),(x-n-j,i),(y,i+1),(z,i+2)\}$ ($x,y,z\in Z_{2n}$，$i\in Z_3$，$j\in Z_n$，$x+y+z\equiv j \pmod{2n}$)；
$\{(x,i)$，$(x+d,i)$，$(y,i+1)$，$(y+d,i+1)\}$ ($d\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，$x,y\in Z_{2n}$，$i\in Z_3$)；
$\{(x,i)$，$(x+n,i)$，$(y,i+1)$，$(y+n,i+1)\}$ ($x,y\in Z_n$，$i\in Z_3$)。

引理 3.5 当 $r\equiv 1 \pmod 2$ 时，$G_{12}(3,r,4,3)$ 存在。

证明：设 $r=2n+1$，记所需设计的点集 $X=Z_{2n+1}\times Z_3$，组 A：$\{(x,i)$：$x\in Z_{2n+1}\}$ $(i\in Z_3)$。
区组 B：$\{(x,i)$，$(x-2j-1,i)$，$(y,i+1)$，$(z,i+2)\}$
($x,y,z\in Z_{2n+1}$，$i\in Z_3$，$j\in Z_{n-1}$，$x+y+z\equiv n-j-1 \pmod{2n+1}$)重复 4 次；
$\{(x,i)$，$(x-1,i)$，$(y,i+1)$，$(z,i+2)\}$
($x,y,z\in Z_{2n+1}$，$i\in Z_3$，$j\in Z_2$，$x+y+z\equiv 2n-1+j \pmod{2n+1}$)重复 2 次；
$\{(x,i)$，$(x-2,i)$，$(y,i+1)$，$(z,i+2)\}$
($x,y,z\in Z_{2n+1}$，$i\in Z_3$，$x+y+z\equiv 2n-1 \pmod{2n+1}$)重复 2 次；
$\{(x,i)$，$(x+d,i)$，$(y,i+1)$，$(y+d,i+1)\}$($d\in Z_{2n+1}\setminus\{0\}$，$x,y\in Z_{2n+1}$，$i\in Z_3$)；
$\{(x,i)$，$(x+d,i)$，$(y,i+1)$，$(y+d,i+1)\}$($d\in Z_{2n+1}\setminus\{0,1,2n-1,2j:j\in Z_{n+1}\}$，$x,y\in Z_{2n+1}$，$i\in Z_3$)
$\{(x,i)$，$(x+2,i)$，$(y,i+1)$，$(y+2,i+1)\}$($x,y\in Z_{2n+1}$，$i\in Z_3$)

定理 3.6 当 $\lambda r^2\equiv 0 \pmod{12}$ 时，$G_\lambda(3,r,4,3)$ 存在。

证明：由**引理 3.2~3.5**，结合**引理 3.1**，可得 $G_\lambda(3,r,4,3)$ 存在的充分条件。

结合**引理 2.1** 和**定理 3.6**，我们得到本文的主要结论。

定理 3.7 $G_\lambda(3,r,4,3)$ 存在的充分必要条件是 $\lambda r^2\equiv 0 \pmod{12}$。

基金项目

国家自然科学基金项目(11171248 和 11371207)。

参考文献 (References)

[1] 沈灏. 组合设计理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 2008.

[2] Mohacsy, H. and Ray-Chaudhuri, D.K. (2002) Candelabra Systems and Designs. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **106**, 419-448. http://dx.doi.org/10.1016/S0378-3758(02)00226-4

[3] Mills, W.H. (1981) A Covering of Triples by Quadruples. *Congr. Numer*, **33**, 253-260.

[4] Mills, W.H. (1990) On the Existence of H Designs. *Congr. Numer*, **79**, 129-141.

[5] Hartman, A. (1980) Tripling Quadruple Systems. *Ars Combinatoria*, **10**, 255-309.

[6] Hartman, A. (1994) The Fundamental Construction for 3-Designs. *Discrete Mathematics*, **124**, 107-132. http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(92)00055-V

[7] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Press, London.

[8] Stern, G. and Lenz, H. (1980) Sterner Triple Systems with Given Subspaces: Another Proof of the Doyen-Wilson Theorem. *Bollettino Unione Matematica Italiana* (*Ser. A*), **17**, 109-114.