Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(1), 41-44
Published Online February 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51006

A Sharp Parameter Value of a Positive Definite Inequality

Beiye Feng

Institute of Applied Mathematics, Chinese Academy of Sciences, Beijing
Email: fby@amss.ac.cn

Received: Jan. 30th, 2016; accepted: Feb. 20th, 2016; published: Feb. 23rd, 2016

Abstract

In this paper, we solved an open problem proposed in [1]. We get a sharp parameter value of a positive definite inequality by elementary method.

Keywords

Sharp Parameter Value, Positive Definite, Inequality

一个正定不等式的最佳参数

冯贝叶

中国科学院应用数学研究所，北京
Email: fby@amss.ac.cn

收稿日期：2016年1月30日；录用日期：2016年2月20日；发布日期：2016年2月23日

摘　要

本文解决了参考文献[1]中提出的一个公开问题，用初等方法确定了一个正定不等式成立的最佳参数值。

文章引用：冯贝叶．一个正定不等式的最佳参数[J]．应用数学进展, 2016, 5(1): 41-44.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.51006

关键词

最佳参数，正定，不等式

多项式的正定性条件及正定多项式是否能表示成平方和的问题是一个和Hilbert 17问题有关的有趣而又古老的问题，见[1]-[5]。

设 $t(x,y,r)=y^2-x^3+r\left(y^2-x^3-x\right)^2=x+g(x,y)+rg(x,y)^2$。其中 $g(x,y)=y^2-x^3-x$。Murray Marshall 在[1]中用微积分方法证明了如下断言：“Claim 1. When $r=\frac{1}{2}$, $t\geq 0$ on $\mathbb{R}^2$”。然后他做了一个注记；“$x+g(x,y)+rg(x,y)^2$ is ≥ 0 on $\mathbb{R}^2$ when $r\in\mathbb{R}$ is ‘large enough’. Claim 1. shows that $r=\frac{1}{2}$ is ‘large enough’ in this sense. There is no claim that $r=\frac{1}{2}$ is in any way optimal”。本文用初等方法证明了在 $\mathbb{R}^2$ 中使这一不等式成立的最佳参数是 $r=\frac{3\sqrt{3}}{16}$。

显然我们有 $\min\limits_{x,y\in\mathbb{R}^2} t(x,y)\geq \min\limits_{x\geq 0,y\geq 0} t(x,y)$，因此我们只需对 $x\geq 0, y\geq 0$ 的情况证明这一不等式成立即可。

引理 1. 当 $0\leq x\leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$ 时有 $\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)<1$，

证明：由计算直接得出引理 1 成立。

引理 2. $9x^4+18x^2-16\sqrt{3}x+9\geq 0$，等号仅在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时成立。

证明：从等式

$$9x^4+18x^2-16\sqrt{3}x+9=\left(\sqrt{3}x-1\right)^2\left(3x^2+2\sqrt{3}x+9\right)$$

可知引理 2 成立。

引理 3. $\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x}\leq 1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)$，等号仅在 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时成立

证明：

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x}\leq 1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)\\
&\Leftrightarrow 1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x\leq 1-\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(x^3+x\right)+\frac{27}{64}\left(x^3+x\right)^2\\
&\Leftrightarrow \sqrt{3}x\leq \frac{9}{16}\left(x^2+1\right)^2\\
&\Leftrightarrow 9x^4+18x^2-16\sqrt{3}x+9\geq 0\text{。}
\end{aligned}$$

因此不等式 $\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x}\leq 1-\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)$ 等价于不等式 $9x^4+18x^2-16\sqrt{3}x+9\geq 0$，从引理 2 即得引理 3 成立。

定理 在 $\mathbb{R}^2$ 中 $t\left(x,y,\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)=y^2-x^3+\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(y^2-x^3-x\right)^2\geq 0$，等号当且仅当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}, y=0$ 时成立，此

外在 $\mathbb{R}^2$ 中使不等式 $t(x,y,r)=y^2-x^3+r\left(y^2-x^3-x\right)^2\geq 0$ 成立的最佳参数为 $r=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$。

证明。考虑以下两种情况

1) $x\geq\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 在这种情况下，设 $g(x,y)=y^2-x^3-x$，那么

$$\begin{aligned}t\left(x,y,\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)&=y^2-x^3+\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(y^2-x^3-x\right)^2=\frac{3\sqrt{3}}{16}g^2+g+x\\&=\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(g+\frac{8\sqrt{3}}{9}\right)^2+x-\frac{4\sqrt{3}}{9}\geq 0\end{aligned}$$
。

要使上述不等式的等号成立，其充分必要条件是 $x=\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ 和 $g+\dfrac{8\sqrt{3}}{9}=0$ 同时成立，但是易于验证，这是不可能的，所以在这种情况下，上述不等式中的等号不可能成立。

2) $0\leq x\leq\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$。在这种情况下，设 $z=y^2$，那么

$$\begin{aligned}t\left(x,y,\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)&=y^2-x^3+\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(y^2-x^3-x\right)^2\\&=\frac{3\sqrt{3}}{16}z^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-1\right)z+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-x^3\end{aligned}$$
。

把上面的表达式看成是 z 的二次三项式，那么其判别式为

$$\Delta=\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-1\right)^2-4\cdot\frac{3\sqrt{3}}{16}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(x^3+x\right)^2-x^3\right)=1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x\geq 0。$$

因此，这个二次三项式有两个实根 $z_1(x),z_2(x)$，其中

$$z_1(x)=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-1-\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}},$$

$$z_2(x)=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-1+\sqrt{1-\frac{3\sqrt{3}}{4}x}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}}。$$

从引理 1 和引理 3 可知 $z_1(x)\leq z_2(x)\leq 0$，以及当且仅当 $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时 $z_2(x)=0$。因而

$$\begin{aligned}t\left(x,y,\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)&=y^2-x^3+\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(y^2-x^3-x\right)^2\\&=\frac{3\sqrt{3}}{16}z^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-1\right)z+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x^3+x\right)-x^3\\&=\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(z-z_1(x)\right)\left(z-z_2(x)\right)\\&=\frac{3\sqrt{3}}{16}\left(y^2-z_1(x)\right)\left(y^2-z_2(x)\right)\geq 0\end{aligned}$$
。

上述不等式中的等号当且仅当 $x=\frac{\sqrt{3}}{3}, y=0$ 时成立。

又设 $\varepsilon>0$ 是一个任意小的正常数，那么我们有

$$\begin{aligned} t\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{3\sqrt{3}}{16}-\varepsilon\right) &= t\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{3\sqrt{3}}{16}\right)-\varepsilon\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \\ &= 0-\varepsilon\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2<0 \end{aligned}$$

。

这就说明在 $\mathbb{R}^2$ 上使 $t\geq 0$ 成立的最佳参数为 $r=\frac{3\sqrt{3}}{16}$。

这就完成了定理的证明。

参考文献 (References)

[1] Marshall, M. (2008) Positive Polynomials and Sums of Squares. American Mathematical Society, SURV Vol. 146.

[2] Rajwade, A.R. (1993) London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, London. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511566028

[3] Scheiderer, C. (2000) Sums of Squares of Regular Functions on Real Algebraic Varieties. *Transactions of the American Mathematical Society*, **352**, 1039-1069. http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9947-99-02522-2

[4] Cassels, J.W.S. (1964) On the Representation of Rational Functions as Suns of Squares. *Acta Arithmetica*, **9**, 79-82.

[5] 冯贝叶. 四次函数实零点的完全判据和正定条件[J]. 应用数学学报, 2006, 29(3): 454-466.