Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 416-420
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53052

Hans汉斯

The Uniqueness of Positive Solutions for Higher Order Boundary Value Problem

Jie Wang, Chenxing Zhou

College of Mathematics, Changchun Normal University, Changchun Jilin
Email: mathcxzhou@163.com

Received: Jul. 28th, 2016; accepted: Aug. 19th, 2016; published: Aug. 25th, 2016

Abstract

In this paper, using the fixed-point theorem in partially ordered sets and the properties of the Green function, the uniqueness of positive solutions to the higher order boundary value problem is obtained. Our results make up the related conclusion in the existing literature.

Keywords

Higher Order Equation, Fixed-Point Theorem, Positive Solution, Uniqueness

高阶非线性分数次边值问题正解的唯一性

王　杰，周晨星

长春师范大学数学学院，吉林 长春
Email: mathcxzhou@163.com

收稿日期：2016年7月28日；录用日期：2016年8月19日；发布日期：2016年8月25日

摘　要

本文利用偏序集上的不动点定理结合相关格林函数的性质研究了一类高阶非线性分数次多点边值问题正解的唯一性，我们的结果弥补了已有文献中的相关结论。

文章引用: 王杰, 周晨星. 高阶非线性分数次边值问题正解的唯一性[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 416-420.
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53052

关键词

高阶方程，不动点定理，正解，唯一性

1. 引言

近年来，随着分数阶微分方程在物理、力学、化学、控制、工程等各个领域的重要应用[1]，对这类问题的研究也与日俱增[2]-[5]。从这些文献里可以发现，虽然一些作者已经给出关于非线性分数次多点边值问题解的存在性和多解性，但是对高阶分数次非线性多点边值解的存在性和唯一性的结果相对较少。为此，在本文中，我们将研究下列高阶分数次非线性边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+f\left(t,u(t)\right)=0,\quad 0<t<1,\quad n-1<\alpha\le n \tag{1}$$

$$u(0)=u'(0)=u''(0)=\cdots=u^{(n-2)}(0)=0,\quad u^{(n-2)}(1)=0 \tag{2}$$

其中 D_{0+}^{α} 是标准的 Riemann-Liouville 导数。

在本文中，我们将利用偏序集上的不动点定理证明问题(1)~(2)正解的存在性和唯一性。对于偏序集上的不动点定理，可以参考文献[6]-[8]。

下面我们给出偏序集上的不动点定理以供读者参考。

定理1.1. 设 $(E,\le)$ 是偏序集，在 E 中存在一个度量单位 d，则 (E,d) 是一个完备的度量空间。假设 E 满足下列条件：

如果 $\{x_n\}$ 在 E 中为一个单调非增数列，且 $x_n\to x$，

$$\text{那么 } x_n\le x,\quad \forall n\in N。 \tag{3}$$

设 $T:E\to E$ 为一个单调非增的映射，且

$$d(Tx,Ty)\le d(x,y)-\Psi\left(d(x,y)\right),\quad x\ge y,$$

其中 $\Psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是连续的且为单调非增的函数，Ψ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义且 $\Psi(0)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty}\Psi(t)=\infty$。如果存在 $x_0\in E$ 使得 $x_0\le T(x_0)$，那么 T 有一个不动点。

如果我们考虑 $(E,\le)$ 满足下面条件

$$\text{由于 } x \text{ 和 } y \text{ 是可以比较的，根据 } x,\ y\in E \text{ 且存在 } z\in E。 \tag{4}$$

我们可以得到下面的结果。

定理1.2 假设定理1.1的条件和(4)成立，则得到正解的唯一性。

2. 相关引理

引理2.1 如果 $h\in C[0,1]$，那么边值问题

$$D_{0+}^{\alpha}u(t)+h(t)=0,\quad 0<t<1,\quad n-1<\alpha\le n, \tag{5}$$

关于边值条件(2)有唯一的解

$$u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)\mathrm{d}s \tag{6}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\begin{cases} t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-n+1}-(t-s)^{\alpha-1}, 0\le s\le t\le 1, \\ t^{\alpha-1}(1-s)^{\alpha-n+1}, 0\le t\le s\le 1. \end{cases} \tag{7}$$

引理2.2 $G(t,s)$ 如(7)所给出给出，则

(i) $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上是一个连续函数，并且 $G(t,s)>0$；

(ii) $G(t,s)$ 关于第一个变量是严格的递增函数；

(iii) $L=\sup\limits_{t\in[0,1]}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s=\frac{n-2}{(\alpha-n+2)\Gamma(\alpha+1)}$。

3. 问题(1)~(2)非减正解的存在性和唯一性

在本部分中，运用偏序集上的不动点定理证明问题(1)~(2)中解的存在性和唯一性结果。此处使用的基本空间是 $E=C[0,1]$。E 是实的Banach空间，其范数为 $\|u\|=\max\limits_{0\le t\le 1}|u(t)|$。注意这个空间通过下列条件能定义偏序集

$$x,y\in C[0,1],\quad x\le y\Leftrightarrow x(t)\le y(t),\quad t\in[0,1]。$$

利用

$$d(x,y)=\sup_{0\le t\le 1}\{|x(t)-y(t)|\}$$

可以证明 $(C[0,1],\le)$ 完备的度量，满足定理1.1中的条件(3)。此外，对任意的 $x,y\in C[0,1]$，及函数 $\max\{x,y\}\in C[0,1]$，$(C[0,1],\le)$ 满足条件(4)。

定理3.1 边值问题(1)~(2)有唯一的正解 $u(t)$ 且这个解是严格递增的，如果下列条件成立：

(a) 当 $f(t,u(t))\ne 0$，其中 $t\in Z\subset[0,1]$，$\mu(Z)>0$ (μ 指的是测度)时，那么 $f:[0,1]\times[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 是关于第二个变量的单调非增的连续函数；

(b) 当 $u,v\in[0,+\infty)$，且 $u\ge v$，$t\in[0,1]$ 时，存在 $0<\lambda<L^{-1}$，使得

$$f(t,u)-f(t,v)\le\lambda\cdot\ln(u-v+1)。$$

证明：考虑锥

$$K=\{u\in C[0,1]:u(t)\ge 0\}。$$

则 K 是 $C[0,1]$ 中一个闭集且为完全的度量空间，距离 $d(u,v)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)-v(t)|$。

定义算子 T 为

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s,$$

通过引理2.2和条件(a)可知 $T(K)\subset K$。

下面我们将验证满足定理1.1和1.2所有的条件。

首先，当 $u,v\in K$ 且 $u\ge v$ 时，通过定理中的条件(a)我们有

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\ge\int_0^1 G(t,s)f(s,v(s))\mathrm{d}s=Tv(t)。$$

这就证明了 T 是单调非减的算子。

另一方面，当 $u\ge v$ 时，通过定理3.1中的条件(b)我们有

$$\begin{aligned} d(Tu,Tv) &= \sup_{0\le t\le 1}\left|(Tu)(t)-(Tv)(t)\right| = \sup_{0\le t\le 1}\left((Tu)(t)-(Tv)(t)\right) \\ &\le \sup_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\left(f(s,u(s))-f(s,v(s))\right)\mathrm{d}s \\ &\le \sup_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\lambda\cdot\ln\left(u(s)-v(s)+1\right)\mathrm{d}s \end{aligned}。$$

由于函数 $h(x)=\ln(x+1)$ 单调非减，通过条件(b)可知

$$\begin{aligned} d(Tu,Tv) &\le \lambda\ln\left(\|u-v\|+1\right)\sup_{0\le t\le 1}\int_0^1 G(t,s)\mathrm{d}s = \lambda\ln\left(\|u-v\|+1\right)\cdot L \\ &\le \|u-v\|-\left(\|u-v\|-\ln\left(\|u-v\|+1\right)\right) \end{aligned}。$$

设 $\psi(x)=x-\ln(x+1)$，显然在 $\psi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 上是连续函数且单调非减，在 $(0,+\infty)$ 上有 $\psi(0)=0$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=+\infty$。此外，当 $u\ge v$ 时，我们有

$$d(Tu,Tv)\le d(u,v)-\psi\left(d(u,v)\right)。$$

由于 $G(t,s)\ge 0$，$f\ge 0$，那么 $(T0)(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,0)\mathrm{d}s$。

由定理1.1可知问题(1)~(2)至少有一个正解。由于 $(K,\le)$ 满足条件(4)，则由定理1.2可知问题(1.1)~(1.2)有唯一的正解。

最后，我们将证明解 $u(t)$ 是一个严格的递增函数。因为 $u(0)=\int_0^1 G(0,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s$，且 $G(0,s)=0$，所以 $u(0)=0$。

此外，令 $t_1,t_2\in[0,1]$，且 $t_1<t_2$，我们考虑下列情形。

情形I：当 $t_1=0$ 时。在这种情况下，$u(t_1)=0$，由于 $u(t)\ge 0$，假定 $u(t_2)=0$，那么

$$0=u(t_2)=\int_0^1 G(t_2,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s。$$

其中 $G(t_2,s)\cdot f(s,u(s))=0$，由于 $G(t_2,s)\ne 0$，那么 $f(s,u(s))=0$。另外，f 是关于第二个变量是单调非增的，那么 $f(s,0)\le f(s,u(s))=0$ 与定理中的条件(a)当 $f(t,0)\ne 0$ 时，其中 $t\in Z\subset[0,1]\left(\mu(Z)\ne 0\right)$，那么 $u(t_1)=0<u(t_2)$ 矛盾。

情形II：当 $0<t_1$ 时。在这种情形中，令 t_2，$t_1\in[0,1]$ 且 $t_1<t_2$，那么

$$u(t_2)-u(t_1)=(Tu)(t_2)-(Tu)(t_1)=\int_0^1\left(G(t_2,s)-G(t_1,s)\right)f(s,u(s))\mathrm{d}s。$$

由引理2.2和 $f\ge 0$ 可知 $u(t_2)-u(t_1)\ge 0$。

如果 $u(t_2)=u(t_1)$，那么 $\int_0^1\left(G(t_2,s)-G(t_1,s)\right)f(s,u(s))\mathrm{d}s=0$，即

$$\left(G(t_2,s)-G(t_1,s)\right)f(s,u(s))=0$$

并且由引理2.2知 $f(s,u(s))=0$。类似情形I可得矛盾，那么 $u(t_1)=0<u(t_2)$。证毕

致　谢

本论文受国家自然科学基金(批准号：11301038)；吉林省科技厅自然科学基金(批准号：20160101244JC)；2015 年吉林省教育大学生创新创业训练计划项目资助。

参考文献 (References)

[1] Kilbas, A.A., Srivastava, H.M. and Trujillo, J.J. (2006) Theory and Applications of Fractional Differential Equations. North-Holland Mathematics Studies, Vol. 204. Elsevier, Amsterdam.

[2] Wang, L. and Zhang, X. (2014) Existence of Positive Solutions for a Class of Higher-Order Nonlinear Fractional Differential Equations with Integral Boundary Conditions and a Parameter. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **44**, 293-316. http://dx.doi.org/10.1007/s12190-013-0694-9

[3] Ji, Y., Guo, Y., Qiu, J. and Yang, L. (2015) Existence of Positive Solutions for a Boundary Value Problem of Nonlinear Fractional Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **13**, 1-11.

[4] Han, Z., Lu, H. and Zhang, C. (2015) Positive Solutions for Eigenvalue Problems of Fractional Differential Equation with Generalized p-Laplacian. *Applied Mathematics and Computation*, **257**, 526-536. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2015.01.013

[5] Henderson, J. and Luca, R. (2015) Nonexistence of Positive Solutions for a System of Coupled Fractional Boundary Value Problems. *Boundary Value Problems*, **2015**, 138. http://dx.doi.org/10.1186/s13661-015-0403-8

[6] Caballero Mena, J., Harjani, J. and Sadarangani, K. (2009) Existence and Uniqueness of Positive and Nondecreasing Solutions for a Class of Singular Fractional Boundary Value Problems. *Boundary Value Problems*, **2009**, Article ID: 421310. http://dx.doi.org/10.1155/2009/421310

[7] Harjani, J. and Sadarangani, K. (2009) Fixed Point Theorems for Weakly Contractive Mappings in Partially Ordered Sets. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **71**, 3403-3410. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2009.01.240

[8] Nieto, J.J. and Rodríguez-López, R. (2005) Contractive Mapping Theorems in Partially Ordered Sets and Applications to Ordinary Differential Equations. *Order*, **22**, 223-239. http://dx.doi.org/10.1007/s11083-005-9018-5