Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(3), 360-366
Published Online August 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53044

Optimal Control of a Size-Structured System in a Polluted Environment

Jiangbi Liu[1], Genquan Li[1,2]

[1]School of Mathematical Science, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou Gansu
[2]Zhuanglang No. 2 Middle School, Pingliang Gansu
Email: liujiangbi_2011@163.com

Received: Jul. 21st, 2016; accepted: Aug. 14th, 2016; published: Aug. 17th, 2016

Abstract

In this paper, we investigate the optimal harvesting for a class of size-structured population system in a polluted environment, making the maximum revenue by controlling the species harvest and inputting rates of the external toxin into the environment. Fixed point theory is used to obtain the existence and uniqueness of solution of the system. Optimality conditions are derived by means of tangent-normal cones and the technique of adjoint system. Some results in references are extended.

Keywords

Optimal Control, Size-Structure, Environment Pollution, Fixed Point Theory

环境污染下一类具有尺度结构种群系统的最优控制

刘江璧[1]，李根全[1,2]

[1]兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州
[2]庄浪县第二中学，甘肃 平凉
Email: liujiangbi_2011@163.com

收稿日期：2016年7月21日；录用日期：2016年8月14日；发布日期：2016年8月17日

文章引用：刘江璧，李根全．环境污染下一类具有尺度结构种群系统的最优控制[J]．应用数学进展，2016，5(3)：360-366. http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.53044

摘　要

本文首次研究了环境污染下一类具有尺度结构的种群系统的最优控制问题，通过控制种群的收获和外界毒素向环境的输入率使得人们的总收益最大。利用不动点定理得到了系统解的存在唯一性，借助法锥切锥理论结合共轭系统的技巧推导了收获控制为最优的必要条件，从而推广了一些文献中的已有结果。

关键词

最优控制，尺度结构，污染环境，不动点定理

1. 引言

众所周知，环境污染对种群的发展非常不利。因此，研究环境污染下种群的最优收获问题是十分有必要的。Hallam T G 在文[1]中首次提出了有关毒物对生物种群影响的数学模型，自此之后，关于毒素影响下的种群被广泛研究，相继出现了很多成果[2] [3]。虽然他们利用动力学的方法研究不同情形下种群持续生存或绝灭的阈值，但他们讨论的指标泛函中没有考虑种群个体的年龄因素，这不太符合实际问题。最近，雒志学在[4] [5]中将年龄结构的种群系统与环境污染下的种群系统有机的结合起来，考虑了在环境污染下具有年龄结构的种群系统的最优收获问题。但是相比年龄结构，尺度结构在种群演化过程中更为重要，因此，尺度结构的种群模型被广泛研究[6]-[9]。

到目前为止，对毒素作用下具有尺度结构的种群问题还没有研究，为了弥补这一缺陷，本文首次研究一类在环境污染下具有尺度结构种群的最优控制问题。我们首先提出最优控制问题 Maximize $J(u,v)$，而

$$J(u,v)=\int_0^T\int_0^m\left[f(s,t)u(s,t)p(s,t)-\frac{1}{2}c_1\left[u(s,t)\right]^2\right]\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^T c_2\left[v(t)\right]^2\mathrm{d}t \tag{OH}$$

其中 $f(s,t)$ 表示种群的销售价格，c_1 为收获种群的成本，c_2 为治理环境污染所需费用，而 p,c_0,c_e 为下列系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial\left[g(s)p\right]}{\partial s}=\mu\left(s,c_0(t)\right)p-u(s,t)p,\\ \dfrac{\mathrm{d}c_0(t)}{\mathrm{d}t}=kc_e(t)-gc_0(t)-mc_0(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}c_e(t)}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e(t)P(t)+g_1c_0(t)P(t)-hc_e(t)+v(t),\\ p(0,t)=\int_0^m\beta\left(s,c_0(t)\right)p(s,t)\mathrm{d}s,\\ p(s,0)=p_0(s),\\ P(t)=\int_0^m p(s,t)\mathrm{d}s,(s,t)\in Q,\end{cases} \tag{1.1}$$

的解，其中 $Q=(0,m)\times(0,T)$，$p(s,t)$ 表示在 t 时刻尺度为 s 的种群密度，$P(t)$ 为时刻 t 种群的总数量，$g(s)$ 为种群的个体增长率，μ 和 β 分别为种群的死亡率和出生率，常数 m 为种群个体的最大尺度，控制函数 u 代表收获努力度，生物体内毒素的浓度为 $c_0(t)$，环境中毒素的浓度为 $c_e(t)$，而 k,k_1,g,g_1,m 均为常数。$kc_e(t)$ 表示 t 时刻个体对环境中毒素浓度的吸收率；$v(t)$ 表示外界输入到环境的毒素，也为控制函

数，$gc_0(t)$ 表示 t 时刻个体体内毒素的排泄率；$mc_0(t)$ 表示由于新陈代谢等因素作用 t 时刻个体体内毒素的净化率。

为方便后文，现作如下假设：

(H_1) $\beta(s,c_0(t))\in L^\infty_{loc}(Q), 0\le\beta(s,c_0(t))\le\beta^0$， β^0 为常数。

(H_2) $\mu(s,c_0(t))\in L^\infty_{loc}(Q), 0\le\mu(s,c_0(t))\le\mu^0, \int_0^m \mu(\Psi^{-1}(\Psi(m)-s),x)\mathrm{d}s=+\infty$ 。

(H_3) $v(\cdot)\in L^2[0,T], 0\le v(t)\le v_1\le+\infty, 0\le p_0(s)\le p^0$， p^0 为常数。

(H_4) $\forall x\in R^+, |\beta(s,x_1)-\beta(s,\bar{x}_1)|\le L_\beta|x_1-\bar{x}_1|, |\mu(s,x_1)-\mu(s,\bar{x}_1)|\le L_\mu|x_1-\bar{x}_1|$ 。

(H_5) $g(s)\in C^1(0,m), 0\le g_0\le g(s)\le g^*$， g_0 和 g^* 均为正常数，其中

$$\frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s}\le 0, \frac{\mathrm{d}g(s)}{\mathrm{d}s}+\mu+u\ge 0, \Psi(s)=\int_0^s\frac{1}{g(z)}\mathrm{d}z, 0\le s\le m \text{ 。}$$

定义 1.1 控制集

$$U=\left\{(u,v)\in L^\infty(Q)\times L^\infty(0,T)\,|\,0\le u(s,t)\le H_1\ a.e.\ Q;\ 0\le v(t)\le H_2\ a.e.[0,T]\right\} \text{ 。}$$

定义 1.2 解空间

$$X=\Big\{(p,c_0,c_e)\in L^\infty(Q)\times\left(L^\infty(0,T)\right)^2\,|\,0\le c_0(t)\le 1, 0\le c_e(t)\le 1,$$
$$0\le\int_0^m p(s,t)\mathrm{d}s\le M\ a.e.\ Q\Big\} \text{。}$$

定义 1.3 系统(1.1)中 p 的解是指 $p\in L^\infty(Q;R)$ 在每条特征线 $t-\Psi(s)=k$ 上绝对连续且满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial t}+\dfrac{\partial[g(s)p]}{\partial s}=\mu(s,c_0(t))p-u(s,t)p,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}p(\Psi^{-1}(\varepsilon),t+\varepsilon)=\int_0^m\beta(s,c_0(t))p(s,t)ds,\\ \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}p(\Psi^{-1}(\Psi(s)+\varepsilon),\varepsilon)=p_0(s),\\ P(t)=\int_0^m p(s,t)\mathrm{d}s, (s,t)\in Q,\end{cases}$$

应用特征线法和常数变易法，系统(1.1)的解可表示为：

$$p(s,t)=\begin{cases}p_0(\Psi^{-1}(\Psi(s)-t))\Pi(\Psi(s),t,t;P), & \Psi(s)\ge t,\\ B(t-\Psi(s);P)\Pi(\Psi(s),t,\Psi(s);P), & \Psi(s)<t,\end{cases}\tag{1.2}$$

其中 $B(t)=p(0,t)$，

$$\Pi(\Psi(s),t,\tau;P)=\exp\left[-\int_0^\tau\left[g'(\Psi^{-1}(\Psi(s)-\theta))+\mu(\Psi^{-1}(\Psi(s)-\theta),c_0(t-\theta))+u(\Psi(s)-\theta,t-\theta)\right]\mathrm{d}\theta\right],$$

由常数变易法知

$$c_0(t)=c_0(0)\exp\{-(g+m)t\}+k\int_0^t c_e(s)\exp\{(s-t)(g+m)\}\mathrm{d}s,\tag{1.3}$$

$$c_e(t)=c_e(0)\exp\left\{-\int_0^t(k_1P(\tau)+h)\mathrm{d}\tau\right\}+\int_0^t(g_1c_0(s)P(s)+v(s))\exp\left\{\int_t^s(k_1P(\tau)+h)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s,\tag{1.4}$$

引理 1.1 [10]对于系统(1.1)，如果 $g\le k\le g+m, v_1\le h$，那么对 $\forall t\in[0,T]$ 有 $0\le c_0(t)\le 1$，$0\le c_e(t)\le 1$。

定理 1.1 如果(H_1)~(H_5)成立，系统(1.1)有唯一的非负解$\left(p(s,t),c_0(t),c_e(t)\right)$使得

1) $\left(p(s,t),c_0(t),c_e(t)\right)\in L^\infty(Q)\times L^\infty(0,T)\times L^\infty(0,T)$，

2) $0\le c_0(t)\le 1,\ 0\le c_e(t)\le 1$。

证明：首先在 X 中定义映射 $G:X\to X$，则

$$G(p,c_0,c_e)=\left(G_1(p,c_0,c_e),G_2(p,c_0,c_e),G_3(p,c_0,c_e)\right)$$

其中

$$G_1(p,c_0,c_e)=\begin{cases}p_0\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-t\right)\right)\Pi\left(\Psi(s),t,t;P\right), & \Psi(s)\ge t,\\ B\left(t-\Psi(s);P\right)\Pi\left(\Psi(s),t,\Psi(s);P\right), & \Psi(s)<t,\end{cases}$$

$$G_2(p,c_0,c_e)=c_0(0)\exp\left\{-(g+m)t\right\}+k\int_0^t c_e(\tau)\exp\left\{(\tau-t)(g+m)\right\}\mathrm{d}s,$$

$$G_3(p,c_0,c_e)=c_e(0)\exp\left\{-\int_0^t\left(k_1P(\tau)+h\right)\mathrm{d}\tau\right\}+\int_0^t\left(g_1c_0(\tau)P(\tau)+v(\tau)\right)\exp\left\{\int_t^\tau\left(k_1P(\tau)+h\right)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}s,$$

容易证明 $G(p,c_0,c_e)\in X$。事实上

$$\begin{aligned}\int_0^m G_1(p,c_0,c_e)\mathrm{d}s&=\int_0^{\Psi^{-1}(t)}G_1(p,c_0,c_e)\mathrm{d}s+\int_{\Psi^{-1}(t)}^m G_1(p,c_0,c_e)\mathrm{d}s\\&\le\beta^0\int_0^{\Psi^{-1}(t)}\int_0^m p\left(r,t-\Psi(s)\right)\mathrm{d}r\mathrm{d}s+\int_0^m p_0\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-t\right)\right)\mathrm{d}s\\&\le mp^0+\beta^0\int_0^t\int_0^m p(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau,\end{aligned}$$

利用 Gronwall 引理，则有

$$\int_0^m G_1(p,c_0,c_e)\mathrm{d}s\le mp^0\exp\left\{\beta^0p\right\}:=M。$$

令 $x^i=\left(p^i,c_0^i,c_e^i\right),i=1,2$。当 $0<t<m$ 时，则有

$$\begin{aligned}&\int_0^m\left|G_1\left(x^1\right)-G_1\left(x^2\right)\right|(s,t)\mathrm{d}s\\&=\int_0^{\Psi^{-1}(t)}\left|B\left(t-\Psi(s);P^1\right)\Pi\left(\Psi(s),t,\Psi(s);P^1\right)-B\left(t-\Psi(s);P^2\right)\Pi\left(\Psi(s),t,\Psi(s);P^2\right)\right|\mathrm{d}s\\&\quad+\int_{\Psi^{-1}(t)}^m\left|p_0\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-t\right)\right)\left(\Pi\left(\Psi(s),t,t;P^1\right)-\Pi\left(\Psi(s),t,t;P^2\right)\right)\right|\mathrm{d}s\\&\le\int_0^{\Psi^{-1}(t)}\int_0^m\left|\beta\left(r,c_0^1\left(t-\Psi(s)\right)\right)p^1\left(r,t-\Psi(s)\right)-\beta\left(r,c_0^2\left(t-\Psi(s)\right)\right)p^2\left(r,t-\Psi(s)\right)\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}s\\&\quad+\beta^0M\int_0^t\int_0^{\Psi(s)}\left|\mu\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-\theta\right),c_0^1(t-\theta)\right)-\mu\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-\theta\right),c_0^2(t-\theta)\right)\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\\&\quad+p^0\int_{\Psi^{-1}(t)}^m\int_0^t\left|\mu\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-\theta\right),c_0^1(t-\theta)\right)-\mu\left(\Psi^{-1}\left(\Psi(s)-\theta\right),c_0^2(t-\theta)\right)\right|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}s\\&\le\beta^0\int_0^t\int_0^m\left|p^1(s,\tau)-p^2(s,\tau)\right|\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s+\left(ML_\beta+ML_\mu T+L_\mu p^0m\right)\int_0^t\left|c_0^1(\tau)-c_0^2(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\\&\le M_1\left(\int_0^t\int_0^m\left|p^1(s,\tau)-p^2(s,\tau)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\int_0^t\left|c_0^1(\tau)-c_0^2(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\right),\end{aligned}\tag{1.5}$$

其中 $M_1=\max\left\{\beta^0,ML_\beta+ML_\mu T+L_\mu p^0m\right\}$ 为正数。当 $m\le t\le T$ 时，上式仍然成立。

$$
\begin{aligned}
&\left|G_2\left(x^1\right)-G_2\left(x^2\right)\right|(t)\\
&=\left|k\int_0^t c_e^1(\tau)\exp\{(\tau-t)(g+m)\}\mathrm{d}\tau-k\int_0^t c_e^2(\tau)\exp\{(\tau-t)(g+m)\}\mathrm{d}\tau\right| \\
&\le k\int_0^t\left|c_e^1(\tau)-c_e^2(\tau)\right|\mathrm{d}\tau,
\end{aligned} \tag{1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|G_3\left(x^1\right)-G_3\left(x^2\right)\right|(t)=&\left|c_e^1(0)\exp\left\{-\int_0^t\left(k_1P^1(\tau)+h\right)\mathrm{d}\tau\right\}-c_e^2(0)\exp\left\{-\int_0^t\left(k_1P^2(\tau)+h\right)\mathrm{d}\tau\right\}\right|\\
&+\left|\int_0^t\left(g_1c_0^1(\tau)P^1(s)+v(\tau)\right)\exp\left\{\int_t^\tau\left(k_1P^1(\tau)+h\right)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\tau\right.\\
&\left.-\int_0^t\left(g_1c_0^2(\tau)P^2(\tau)+v(\tau)\right)\exp\left\{\int_t^\tau\left(k_1P^2(\tau)+h\right)\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\tau\right|\\
&\le M_2\left(\int_0^t\int_0^m\left|p^1(s,\tau)-p^2(s,\tau)\right|\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau+\int_0^t\left|c_0^1(\tau)-c_0^2(\tau)\right|\mathrm{d}\tau\right),
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

其中 $M_2=\max\{k_1+g_1+Tk_1h_1+TMg_1k_1,g_1M\}$。

其次在 X 中定义等价范数如下：

$$
\left\|\left(p,c_0,c_e\right)\right\|_*=Ess\sup_{t\in(0,T)}\mathrm{e}^{-\lambda t}\left\{\int_0^m|p(s,t)|\mathrm{d}s+\left|c_0(t)\right|+\left|c_e(t)\right|\right\}
$$

由(1.5)~(1.7)，则有

$$
\begin{aligned}
&\left\|G\left(x^1\right)-G\left(x^2\right)\right\|_*\\
&=\left\|G_1\left(x^1\right)-G_1\left(x^2\right),G_2\left(x^1\right)-G_2\left(x^2\right)\right\|_*\\
&\le M_3Ess\sup_{t\in(0,T)}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t\left\{\int_0^m\left|p^1(s,\tau)-p^2(s,\tau)\right|\mathrm{d}s+\left|c_0^1(\tau)-c_0^2(\tau)\right|+\left|c_e^1(\tau)-c_e^2(\tau)\right|\right\}\mathrm{d}\tau\\
&\le M_3Ess\sup_{t\in(0,T)}\mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda\tau}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\int_0^m\left|p^1(s,\tau)-p^2(s,\tau)\right|\mathrm{d}s+\left|c_0^1(\tau)-c_0^2(\tau)\right|+\left|c_e^1(\tau)-c_e^2(\tau)\right|\right\}\mathrm{d}\tau\\
&\le M_3\left\|x^1-x^2\right\|_*Ess\sup_{t\in(0,T)}\left\{\mathrm{e}^{-\lambda\tau}\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda\tau}\mathrm{d}\tau\right\}\\
&\le\frac{M_3}{\lambda}\left\|x^1-x^2\right\|_*
\end{aligned}
$$

其中 $M_3=\max\{M_1,M_2\}$，因此当 $\lambda>M_3$ 时，根据不动点定理，该系统存在唯一的非负解，定理证毕。

2. 最优性条件

定理 2.1 若 $\left(u^*,v^*\right)$ 是控制问题(OH)的最优对，$\left(p^*,c_0^*,c_e^*\right)$ 是系统(1.1)相应于 $u=u^*,v=v^*$ 的解，那么

$$
u^*(s,t)=\mathcal{L}_1\left(\frac{\left(f(s,t)-q_1(s,t)\right)p^*}{c_1}\right),
$$

$$
v^*(t)=\mathcal{L}_2\left(\frac{q_3(t)}{c_2}\right)。
$$

其中

$$
\mathcal{L}_i(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x\le H_i\\ H_i & x>H_i\end{cases}\quad i=1,2。
$$

而 (q_1,q_2,q_3) 为下列共轭系统的解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial q_1}{\partial t}+g_1(s)\dfrac{\partial q_1}{\partial s}=\left[\mu\left(s,c_0^*(t)\right)+u^*(s,t)\right]q_1(s,t)+\left[k_1c_e^*(t)-g_1c_0^*(t)\right]q_3(t)\\ \qquad\qquad -q_1(0,t)\beta\left(s,c_0^*(t)\right)+f(s,t)u^*(s,t),\\ \dfrac{\mathrm{d}q_2}{\mathrm{d}t}=\int_0^m\dfrac{\partial\mu\left(s,c_0^*(t)\right)}{\partial c_0}p^*(s,t)q_1(s,t)\mathrm{d}s+(g+m)q_2(t)-g_1P_1^*(t)q_3(t)\\ \qquad +q_1(0,t)\int_0^m\dfrac{\partial\beta\left(s,c_0^*(t)\right)}{\partial c_0}p^*(s,t)\mathrm{d}s,\\ \dfrac{\mathrm{d}q_3}{\mathrm{d}t}=-kq_2(t)+k_1P^*(t)+hq_3(t),\\ q_1(s,T)=q_1(m,t)=0,q_2(T)=q_3(T)=0,\\ P^*(t)=\int_0^m p^*(s,t)\mathrm{d}s,\end{cases}\tag{2.1}$$

证明： 系统(2.1)解的存在唯一性由定理 1.1 保证，用 $\mathcal{N}_U\left(u^*,v^*\right)$ 表示 U 在 $\left(u^*,v^*\right)$ 处的法锥，$v=(v_1,v_2)$，当 $\varepsilon>0$ 充分小时，有 $\left(u^*+\varepsilon v_1,v^*+\varepsilon v_2\right)\in U$，从而

$$J\left(u^*+\varepsilon v_1,v^*+\varepsilon v_2\right)\le J\left(u^*,v^*\right),\tag{2.2}$$

将(OH)带入(2.2)有

$$\int_0^T\int_0^m\left(f(s,t)u^*z_1+\left[\left(f(s,t)p^*-c_1u^*\right)v_1\right]\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t-\int_0^T c_2v^*v_2\mathrm{d}t\le 0\ ,\tag{2.3}$$

其中

$$z_1=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{p^\varepsilon(s,t)-p^*(s,t)}{\varepsilon},z_2=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{c_0^\varepsilon(t)-c_0^*(t)}{\varepsilon},z_3=\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{c_e^\varepsilon(t)-c_e^*(t)}{\varepsilon},$$

$z=(z_1,z_2,z_3)$ 满足下列系统

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z_1}{\partial t}+\dfrac{\partial\left[g(s)z_1\right]}{\partial s}=-\left[\mu\left(s,c_0^*(t)\right)+u^*(s,t)\right]z_1(s,t)-\dfrac{\partial\mu\left(s,c_0^*(t)\right)}{\partial c_0}z_2(t)p^*(t)-v_1p^*,\\ \dfrac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}t}=kz_3(t)-gz_2(t)-mz_2(t),\\ \dfrac{\mathrm{d}z_3}{\mathrm{d}t}=-k_1c_e^*(t)Z_1(t)-k_1P^*(t)z_3(t)+g_1c_0^*(t)z_1(s,t)+g_1P^*(t)z_2(t),\\ z_1(0,t)=\int_0^m\beta\left(s,c_0^*(t)\right)z_1(s,t)\mathrm{d}s+\int_0^m\dfrac{\partial\beta\left(s,c_0^*(t)\right)}{\partial c_0}p^*(s,t)z_2(t)\mathrm{d}s,\\ z_1(s,0)=z_2(0)=z_3(0)=0,\\ Z_1(t)=\int_0^m z_1(s,t)\mathrm{d}s,\\ P^*(t)=\int_0^m p^*(s,t)\mathrm{d}s,\end{cases}\tag{2.4}$$

给系统(2.4)的第一、二、三式分别乘以 $q_1(s,t),q_2(t)$ 和 $q_3(t)$，并在 Q ,$(0,T)$ 和 $(0,T)$ 上积分得：

$$\int_0^T\int_0^m\left(fu^*z_1\right)(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=-\int_0^T\int_0^m\left(q_1p^*v_1\right)(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T v_2(t)q_3(t)\mathrm{d}t\ ,\tag{2.5}$$

将(2.5)代入(2.3)则有

$$\int_0^T\int_0^m\left[\left(f-q_1\right)p^*-c_1u^*\right]v_1\left(s,t\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t+\int_0^T\left(-c_2v^*+q_3\right)v_2\left(t\right)\mathrm{d}t\le 0,$$

从而根据文献[11]有$\left(\left(f-q_1\right)p^*-c_1u^*,-c_2v^*+q_3\right)\in\mathcal{N}_U\left(u^*,v^*\right)$，再利用法向量的特征性质[12]知定理证毕。

基金项目

本工作受国家自然基金项目(11561041)和甘肃省自然科学基金资助项目(1506RJZA071)经费支持。

参考文献 (References)

[1] Hallam, T.G., Clark, C.E. and Lassider, R.R. (1983) Effects of Toxicants on Population: A Qualitative Approach I. Equilibrium Environmental Exposure. *Ecological Modelling*, **18**, 291-304. http://dx.doi.org/10.1016/0304-3800(83)90019-4

[2] Hallam, T.G., Clark, C.E. and Jordan, G.S. (1983) Effects of Toxicants on Populations: A Qualitative Approach. II. First Order Kinetics. *Journal of Mathematical Biology*, **18**, 25-37. http://dx.doi.org/10.1007/BF00275908

[3] Hallam, T.G. and De Luna, J.T. (1984) Effects of Toxicants on Populations: A Qualitative Approach. III. Environmental and Food Chain Pathways. *Journal of Theoretical Biology*, **109**, 411-429. http://dx.doi.org/10.1016/S0022-5193(84)80090-9

[4] Luo, Z.X. (2014) Optimal Control for an Age-Dependent Predator-Prey System in a Polluted Environment. *Applied Mathematics and Computation*, **44**, 491-509. http://dx.doi.org/10.1007/s12190-013-0704-y

[5] Luo, Z.X. and Fan, X.L. (2014) Optimal Control for an Age-Dependent Competitive Species Model in a Polluted Environment. *Applied Mathematics and Computation*, **228**, 91-101. http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.069

[6] Kato, N. (2008) Optimal Harvesting for Nonlinear Size-Structured Population Dynamics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **342**, 1388-1398. http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.010

[7] 张波，赵春. 一类具有 Size 结构的竞争种群系统的最优输入率控制[J]. 应用数学, 2014, 27(2): 405-419.

[8] 刘炎,泽荣. 具有 Size 结构的捕食种群系统的最优收获策略[J]. 数学物理学报, 2012, 32A(1): 90-102.

[9] 何泽荣，江晓东，杨立志. 个体尺度差异下的竞争种群模型的最优控制问题[J]. 数学进展, 2015, 44(3): 449-458.

[10] Ma, Z.E., Cui, G.R. and Wang, W.D. (1990) Persistence and Extinction of a Population in a Polluted Environment. *Mathematical Biosciences*, **101**, 75-97. http://dx.doi.org/10.1016/0025-5564(90)90103-6

[11] Barbu, V. (1994) Mathematical Methods in Optimization of Differential Systems. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. http://dx.doi.org/10.1007/978-94-011-0760-0

[12] Barbu, V. and Iannelli, M. (1999) Optimal Control of Population Dynamics. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **102**, 1-14.