Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2016, 5(4), 672-682
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54079

Blow-Up Criteria for a Kind of Fourth Order Nonlinear Schrödinger Equations

Cailian Mi, Meihong Lu, Han Yang

College of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan
Email: 617912219@qq.com

Received: Nov. 3rd, 2016; accepted: Nov. 19th, 2016; published: Nov. 24th, 2016

Abstract

The initial-boundary value problem for a kind of fourth order nonlinear Schrödinger equations is studied in this paper. Firstly, with the help of the semi-group theory, the existence and uniqueness of local solution of initial value problem is obtained. Secondly, a new global existence criterion for the classical solution is given by using B-G inequality, namely, that whether the solution globally exists is determined by whether its H^2 norm blows up.

Keywords

Nonlinear Schrödinger Equation, Initial Value Problem, B-G Type Inequality, Global Solution, Blow-Up Criteria

一类四阶非线性Schrödinger方程的爆破准则

米彩莲，卢美虹，杨 晗

西南交通大学数学学院，四川 成都
Email: 617912219@qq.com

收稿日期：2016年11月3日；录用日期：2016年11月19日；发布日期：2016年11月24日

摘 要

本文通过改进的B-G型不等式研究了一类四阶非线性Schrödinger方程的初边值问题。首先借助半群理论

文章引用：米彩莲，卢美虹，杨晗．一类四阶非线性 Schrödinger 方程的爆破准则[J]．应用数学进展，2016，5(4): 672-682. http://dx.doi.org/10.12677/aam.2016.54079

得到初值问题局部解的存在唯一性，其次利用B-G型不等式得到了初值问题经典解整体存在的一个新判定准则，即整体解是否存在可由其H^2范数是否爆破决定。

关键词

非线性Schrödinger方程，初值问题，B-G型不等式，整体解，爆破准则

1. 引言

本文考虑如下四阶非线性 Schrödinger 方程的初边值问题

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta^2 u = \lambda |u|^\alpha u, \ (t,x) \in R \times \Omega, \\ u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中u是复值函数，$\alpha \ge 4$为常数，$\Omega \subset R^4$为边界充分光滑的有界区域。问题(1.1)描述的是在 Kerr 非线性介质中强激光束的稳定孤子的传播模型，其中$u(t,x)$为波函数。方程(1.1)有如下守恒律

质量守恒

$$M(u) = \|u\|_{L^2}^2 = \|\varphi\|_{L^2}^2, \tag{1.2}$$

能量守恒

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 \,dx \mp \frac{\lambda}{\alpha+2}\int_\Omega |u|^{\alpha+2} \,dx. \tag{1.3}$$

首先回顾经典 Schrödinger 方程的一些研究结果。Brézis 和 Gallouët [1]研究了如下的二阶三次非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u + \lambda |u|^2 u = 0, \ (t,x) \in R \times \Omega, \\ u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.4}$$

的初边值问题，其中$\Omega \subset R^2$。该文借助半群理论、能量估计及 B-G 型不等式

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\left(1 + \sqrt{\ln\left(1 + \|u\|_{H^2(\Omega)}\right)}\right), \quad \forall u \in H^2(\Omega) \text{ 且 } \|u\|_{H^1} \le 1, \tag{1.5}$$

建立了解的H^2范数的先验估计，得到初边值问题(1.4)经典解的整体存在性。事实上，B-G 型不等式(1.5)是对经典的 Sobolev 不等式的改进，即由把线性增长控制减弱为由对数增长控制，这是该文的主要创新点。

Tsutsumi [2]考虑了更一般的非线性 Schrödinger 方程

$$\begin{cases} i\partial_t u - \Delta u + f\left(|u|^2\right) u = 0, \ (t,x) \in R \times \Omega, \\ u(t,x)\big|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.6}$$

的初边值问题，其中 $\Omega \subset R^2$，对初始条件 φ 加以更多限制，即要求 $\varphi \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，$\Delta\varphi \in H_0^1(\Omega)$。

作者考虑了 $f(u) = u^{\frac{p}{2}}$ 的情形，运用衰减估计、Strichartz 不等式及 B-G 型不等式，得到当 $2 \le p \le 3$ 时，$\forall \varphi \in X \triangleq \{u \mid u \in H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \Delta u \in H_0^1(\Omega)\}$，方程(1.6)存在唯一整体解 u，即 $\forall T > 0$，使得

$$u \in L^\infty([0,T], X),$$

和

$$\partial_t u \in L^\infty([0,T], H(\Omega))。$$

最近，Ozawa 和 Visciglia [3]研究了如下半波方程的初值问题

$$\begin{cases} i\partial_t u - |D_x| u = \lambda |u|^3 u, \ (t,x) \in R \times R, \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 $\varphi \in H^1(R)$，建立了如下的 B-G 型不等式

$$\|u\|_{L^\infty(R)} \le \|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(R)} \sqrt{\ln\left(2 + \|u\|_{H^1(R)}\right) + 1}, \quad \forall u \in H^1(R), \tag{1.8}$$

引入能量泛函，运用 Yosida 正则化准则得到相应的能量估计，进而得到方程(1.7)存在唯一解 $u \in C([0,T_{\max}); H^1(R))$，且得到一个新的爆破准则，即

i) 当 $T_{\max} = \infty$ 时，整体解存在；

ii) 当 $T_{\max} < \infty$，且 $\lim\limits_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}} = \infty$ 时，解爆破。

文[3]还研究了如下的二阶四次非线性 Schrödinger 方程的初边值问题

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u = \lambda |u|^3 u, \quad (t,x) \in R \times \Omega, \\ u(t,x)|_{\partial\Omega} = 0, \\ u(0) = \varphi, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $\Omega \subset R^2$。作者建立了如下的 B-G 型不等式

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|u\|_{H^1(\Omega)} \sqrt{\ln\left(2 + \|u\|_{H^2(\Omega)}\right) + 1}, \quad \forall u \in H^2(\Omega), \tag{1.10}$$

得到方程(1.9)存在唯一解 $u \in C([0,T_{\max}); H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$，且得到一个新的爆破准则，即

i) 当 $T_{\max} = \infty$ 时，整体解存在；

ii) 当 $T_{\max} < \infty$，且 $\lim\limits_{t \to T_{\max}} \|u(t)\|_{H^1} = \infty$ 时，解爆破。

在空间 H^1、H^2 中分别判定问题(1.7)、(1.9)的整体解的存在性，通常是考查其 H^1、H^2 范数的有界性，而该文判定整体解是否存在只需分别考查其 $H^{\frac{1}{2}}$、H^1 范数是否有界即可，这是该文的创新之处。

对于四阶非线性 Schrödinger 方程情形，Karpman 和 Shagalov [4]考虑了如下方程的初值问题

$$i\partial_t u + \varepsilon\Delta^2 u + \mu\Delta u + |u|^\alpha u = 0, \quad u = u(t,x): I \times R^d \to C, \tag{1.11}$$

其中 ε, μ 为参数，且 ε 充分小，d 为空间维数。在文[4]中分别给出稳定孤子在一维、二维和三维的存在性和稳定性的条件。Zhu，Yang 和 Zhang [5]考虑了如下的四阶非线性 Schrödinger 方程的初值问题

$$i\partial_t u-\Delta^2 u+|u|^2 u=0,\quad t\ge 0, x\in R^4\text{,} \tag{1.12}$$

研究了低正则性解的爆破问题，即考查初值在低正则能量空间 $H^s\left(s>s_0, s_0\le\dfrac{9+\sqrt{721}}{20}\right)$ 的情形。

上述文献没有给出解的爆破准则。本文希望利用文[3]的技巧研究方程(1.1)，借助半群理论及 Segel 定理，得到初值问题局部解的存在唯一性，并且通过建立一个 B-G 型不等式，得到初值问题经典解整体存在的一个新爆破准则。

本文主要结论如下：

定理 1.1 假设 $\Omega\subset R^4$ 为边界充分光滑的有界区域，$\alpha\ge 4$ 为常数，并记 $A=-i\Delta^2$，$F(u)=i\lambda|u|^\alpha u$，$D(A)=H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，则对 $\varphi\in D(A)$，方程(1.1)存在唯一经典解 u，即 $\exists t\in[0,T_{\max})$，使得

$$u\in C^1\left([0,T_{\max});L^2(\Omega)\right)\cap C\left([0,T_{\max});H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)\right)\text{。}$$

且有如下的二则性原理

i) 当 $T_{\max}=\infty$ 时，整体解存在；

ii) 当 $T_{\max}<\infty$，且 $\sup\limits_{[0,T_{\max})}\|u(t)\|_{H^4(\Omega)}=\infty$ 时，解爆破。

注：一般情况下判定解是否整体存在要考查其 H^4 范数是否有界，本文拟对其改进，建立如下的爆破准则。

定理 1.2 假设在定理 1.1 的条件下，存在如下二则性原理

i) 当 $T_{\max}=\infty$ 时，整体解存在；

ii) 当 $T_{\max}<\infty$，且 $\sup\limits_{[0,T_{\max})}\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}=\infty$ 时，解爆破。

注：由定理 1.2 知，判定方程(1.1)的解是否整体存在只需考虑其 H^2 范数是否爆破，而在通常情况下判定解是否整体存在要考查其 H^4 范数是否有界，这是本文的创新。

本文的安排如下：首先在第一节中介绍背景知识及给出定理 1.1 和定理 1.2；B-G 型不等式的构建及 $F(u)=i\lambda|u|^\alpha u$ 在空间 $D(A)=H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ 上具有局部 Lipschitz 连续的证明将在第二节给出；最后定理 1.1 及定理 1.2 的证明在第三节给出，通过引入合适的能量泛函，建立解的 H^2 范数估计。

2. 准备工作

类似文献[3]，我们首先构建一个 B-G 型不等式。

引理 2.1 $\Omega\subset R^4$ 具有光滑边界的有界域，对 $u\in H^4(\Omega)$ 成立

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|u\|_{H^2(\Omega)}\sqrt{\ln\left(2+\|u\|_{H^4(\Omega)}\right)}+1\text{,} \tag{2.1}$$

证 存在延拓算子 P：$H^3(\Omega)\to H^3\left(R^4\right)$，且满足

P 是 $H^2(\Omega)\to H^2\left(R^4\right)$ 的有界算子，

P 是 $H^3(\Omega)\to H^3\left(R^4\right)$ 的有界算子，

$$Pu\big|_\Omega=u\text{，}\quad\forall u\in H^2(\Omega)\text{,}$$

令 $v=Pu$，$\hat{v}$ 记为 v 的 Fourier 变换，易知

$$\left\|\left(1+|\zeta|^2\right)\hat{v}\right\|_{L^2\left(R^4\right)}\le C\|u\|_{H^2(\Omega)}\text{,} \tag{2.2}$$

$$\left\|\left(1+|\zeta|^2\right)^{\frac{3}{2}}\hat{v}\right\|_{L^2\left(R^4\right)}\le C\|u\|_{H^3(\Omega)}, \tag{2.3}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|v\|_{L^\infty\left(R^4\right)}\le C\|\hat{v}\|_{L^1\left(R^4\right)}, \tag{2.4}$$

对 $R>0$，则有

$$\begin{aligned}\|\hat{v}\|_{L^1}&=\int_{|\zeta|<R}|\hat{v}|\mathrm{d}\zeta+\int_{|\zeta|\ge R}|\hat{v}|\mathrm{d}\zeta\\&\le\int_{|\zeta|<R}\left(1+|\zeta|^2\right)|\hat{v}(\zeta)|\frac{1}{\left(1+|\zeta|^2\right)}\mathrm{d}\zeta+\int_{|\zeta|\ge R}\left(1+|\zeta|^2\right)^{\frac{3}{2}}|\hat{v}(\zeta)|\frac{1}{\left(1+|\zeta|^2\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\zeta\\&\le C\|u\|_{H^2}\left(\int_{\omega^3}\int_0^R\frac{1}{\left(1+r^2\right)^2}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega\right)^{\frac{1}{2}}+C\|u\|_{H^3}\left(\int_{\omega^3}\int_R^{+\infty}\frac{1}{\left(1+r^2\right)^3}r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\omega\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

其中 $\left(1+r^2\right)^2=C\left(1+r^4\right)$，上式可得

$$\begin{aligned}\|\hat{v}\|_{L^1}&\le C\|u\|_{H^2}\left(\int_0^R\frac{1}{1+r^4}\mathrm{d}\left(1+r^4\right)\right)^{\frac{1}{2}}+C\|u\|_{H^3}\left(\int_R^{+\infty}\frac{1}{\left(1+r^2\right)^2}\mathrm{d}\left(r^2+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le C\|u\|_{H^2}\left(\ln\left(1+r^4\right)\Big|_0^R\right)^{\frac{1}{2}}+C\|u\|_{H^3}\left(-\left(1+r^2\right)^{-1}\Big|_R^{+\infty}\right)^{\frac{1}{2}}\\&\le C\|u\|_{H^2}\sqrt{\ln\left(1+R^4\right)}+C\|u\|_{H^3}(R+1)^{-1}\end{aligned} \tag{2.5}$$

此处用到这个事实：当常数 $C\ge 4$ 时，得到 $\ln\left(1+R^4\right)\le C\ln(2+R)$ 成立，结合(2.4)及(2.5)式，此处取 $R=\|u\|_{H^4}$，因此 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}\le\|u\|_{H^2(\Omega)}\sqrt{\ln\left(2+\|u\|_{H^4(\Omega)}\right)}+1$。证毕。

引理 2.2 记 $D(A)=H^4(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$，$A=-i\Delta^2$，$F(u)=i\lambda|u|^\alpha u$，则 $F(u):D(A)\to D(A)$ 具有局部 Lipschitz 连续。

证 i)易证 $F(u):D(A)\to D(A)$，

ii)下证 $F(u):D(A)\to D(A)$ 具有局部 Lipschitz 连续。

$$\begin{aligned}\|F(u)-F(v)\|_{H^4}=&\left\|D^4\left(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right)\right\|+\left\|D^3\left(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right)\right\|+\left\|D^2\left(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right)\right\|\\&+\left\|D^1\left(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right)\right\|+\left\||u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right\|\end{aligned} \tag{2.6}$$

只需对 $\left\|D^4\left(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right)\right\|$ 做如下估计

$$\begin{aligned}\left\|D^4\left(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v\right)\right\|\le&\, C\left\|D^4u|u|^\alpha-D^4v|v|^\alpha\right\|+C\left\|D^3uDu|u|^{\alpha-1}-D^3vDv|v|^{\alpha-1}\right\|\\&+C\left\|\left(D^2u\right)^2|u|^{\alpha-1}-\left(D^2v\right)^2|v|^{\alpha-1}\right\|+C\left\|D^2u(Du)^2|u|^{\alpha-2}-D^2v(Dv)^2|v|^{\alpha-2}\right\|\\&+C\left\|(Du)^4|u|^{\alpha-3}-(Dv)^4|v|^{\alpha-3}\right\|\\=&\,C\sum_{i=1}^5 I_i\end{aligned} \tag{2.7}$$

下面分别对 $I_i\left(i=1,2,\cdots,5\right)$ 做估计。

根据 Sobolev 嵌入定理

$$\|u\|_{L^\infty}\le C\|u\|_{H^4}, \tag{2.8}$$

及

$$\left||u|^\alpha-|v|^\alpha\right|\le C\left(|u|^{\alpha-1}+|v|^{\alpha-1}\right)|u-v|, \tag{2.9}$$

对第一项 I_1 进行如下估计

$$\begin{aligned}
I_1&\le\left\|\left(D^4u-D^4v\right)|u|^\alpha+D^4v\left(|u|^\alpha-|v|^\alpha\right)\right\|\\
&\le\|u\|_{L^\infty}^\alpha\left\|D^4\left(u-v\right)\right\|+C\left\|D^4v\right\|\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\right)\|u-v\|_{L^\infty}\\
&\le C\left[\|u\|_{L^\infty}^\alpha+\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\right)\|v\|_{H^4}\right]\|u-v\|_{H^4},
\end{aligned}$$

对 I_2 做估计

$$\begin{aligned}
I_2&=\left\|D^3uDu|u|^{\alpha-1}-D^3vDv|v|^{\alpha-1}\right\|\\
&\le C\left[\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|Du\|_{L^4}\left\|D^3\left(u-v\right)\right\|_{L^4}+\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\left\|D\left(u-v\right)\right\|_{L^4}\left\|D^3v\right\|_{L^4}\right.\\
&\quad\left.+\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\right)\|u-v\|_{L^\infty}\|Dv\|_{L^4}\left\|D^3v\right\|_{L^4}\right],
\end{aligned} \tag{2.10}$$

把 Sobolev 嵌入不等式

$$\left\|D^3u\right\|_{L^4}\le C\left\|\Delta^2u\right\|_{L^2}, \tag{2.11}$$

及 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\|\nabla u\|_{L^4}\le C\|\Delta u\|_{L^2}, \tag{2.12}$$

代入(2.10)得

$$I_2\le C\left[\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u\|_{H^4}+\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|v\|_{H^2}+\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\right)\|v\|_{H^2}\|v\|_{H^4}\right]\cdot\|u-v\|_{H^4}。$$

对 I_3 进行估计

$$\begin{aligned}
I_3&=\left\|\left(D^2u\right)^2|u|^{\alpha-1}-\left(D^2v\right)^2|v|^{\alpha-1}\right\|\\
&\le\left\|\left(D^2u\right)^2|u|^{\alpha-1}-\left(D^2u\right)^2|v|^{\alpha-1}\right\|+\left\|\left(D^2u\right)^2|v|^{\alpha-1}-\left(D^2v\right)^2|v|^{\alpha-1}\right\|\\
&\le C\left[\left\|D^2u\right\|_{L^4}^2\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\right)\|u-v\|_{L^\infty}+\left(\left\|D^2u\right\|_{L^4}+\left\|D^2v\right\|_{L^4}\right)\left\|D^2\left(u-v\right)\right\|_{L^4}\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\right]
\end{aligned},$$

由 Sobolev 嵌入不等式

$$\|\Delta u\|_{L^4}\le\left\|\Delta^2u\right\|_{L^2}, \tag{2.13}$$

及(2.8)式得

$$I_3\le C\left[\|u\|_{H^4}^2\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\right)+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\left(\|u\|_{H^4}+\|v\|_{H^4}\right)\right]\|u-v\|_{H^4}.$$

对 I_4 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_4 &\le \left\| D^2u(Du)^2|u|^{\alpha-2} - D^2u(Du)^2|v|^{\alpha-2} \right\| + \left\| D^2u(Du)^2|v|^{\alpha-2} - D^2v(Du)^2|v|^{\alpha-2} \right\| \\
&\quad + \left\| D^2v(Du)^2|v|^{\alpha-2} - D^2v(Dv)^2|v|^{\alpha-2} \right\| \\
&\le C\left\|D^2u\right\|_{L^4}\|Du\|_{L^8}^2\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-3}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-3}\right)\|u-v\|_{L^\infty} + C\left\|D^2(u-v)\right\|_{L^4}\|Du\|_{L^8}^2\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2} \\
&\quad + C\left\|D^2v\right\|_{L^4}\left(\|Du\|_{L^8}+\|Dv\|_{L^8}\right)\|D(u-v)\|_{L^8}\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2}.
\end{aligned}
$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$
\|\nabla u\|_{L^8} \le C\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{4}}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^{\frac{1}{4}}, \tag{2.14}
$$

Poincaré 不等

$$
\|u\|_{H^2} \le C\|u\|_{H^4}, \tag{2.15}
$$

及(2.8)，(2.13)式得

$$
\begin{aligned}
I_4 \le C\Bigg[&\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}}\|u\|_{H^4}^{\frac{5}{2}}\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-3}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-3}\right) + \|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}}\|u\|_{H^4}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2} \\
&+ \|u\|_{H^4}\left(\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{4}}\|u\|_{H^4}^{\frac{1}{4}} + \|v\|_{H^2}^{\frac{3}{4}}\|v\|_{H^4}^{\frac{1}{4}}\right)\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\Bigg]\|u-v\|_{H^4}.
\end{aligned}
$$

运用(2.8)，(2.13)及(2.15)式，对最后一项 I_5 进行估计

$$
\begin{aligned}
I_5 &\le \left\|(Du)^4|u|^{\alpha-3} - (Du)^4|v|^{\alpha-3}\right\| + \left\|(Du)^4|v|^{\alpha-3} - (Dv)^4|v|^{\alpha-3}\right\| \\
&\le C\|Du\|_{L^8}^4\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-4}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-4}\right)\|u-v\|_{L^\infty} \\
&\quad + C\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-3}\left(\|Du\|_{L^8}^2+\|Dv\|_{L^8}^2\right)\left(\|Du\|_{L^8}+\|Dv\|_{L^8}\right)\|D(u-v)\|_{L^8} \\
&\le C\Bigg[\|u\|_{H^2}^3\|u\|_{H^4}\left(\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-4}+\|v\|_{L^\infty}^{\alpha-4}\right) \\
&\quad + \|v\|_{L^\infty}^{\alpha-3}\left(\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{2}}\|u\|_{H^4}^{\frac{1}{2}} + \|v\|_{H^1}^{\frac{3}{2}}\|v\|_{H^4}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\|u\|_{H^2}^{\frac{3}{4}}\|u\|_{H^4}^{\frac{1}{4}} + \|v\|_{H^1}^{\frac{3}{4}}\|v\|_{H^4}^{\frac{1}{4}}\right)\Bigg]\cdot\|u-v\|_{H^4}.
\end{aligned}
$$

基于 $I_1, I_2, \cdots, I_5$ 的估计，得 $F: D(A) \to D(A)$ 具有局部 Lipschitz 有界。证毕。

3. 主要结论的证明

下面分别对定理证明。

3.1. 定理 1.1 的证明

证 由于 Δ^2 为自伴的 m-增值算子，又根据引理 2.2 得 $F: D(A) \to D(A)$ 具有局部 Lipschitz 连续，则由 segel 定理[6]，可得定理 1.1 成立，证毕。

3.2. 定理 1.2 的证明

事实上，我们只需证明 $\|u\|_{H^2}$ 有界可推出 $\|u\|_{H^4}$ 有界。

首先引入下列能量泛函

$$
\varepsilon(u) = \left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^2 - 2\lambda\,\mathrm{Re}\left(\Delta^2 u, u|u|^{\alpha}\right) + \frac{\alpha}{4}\lambda\left(\left|\Delta|u|^2\right|^2, |u|^{\alpha-2}\right) + \frac{\alpha(\alpha-2)}{4}\lambda\left(\Delta|u|^2, |u|^{\alpha-4}\left|\nabla|u|^2\right|^2\right),
$$

引理 3.2.1 在定理 1.1 的条件下，则有如下等式

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon(u)+\|u\|_{L^2}^2\right) &= -4\lambda^2\operatorname{Im}\left(\Delta u,\nabla u\nabla\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)-2\lambda^2\operatorname{Im}\left(\Delta u,u\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)\\
&\quad -2\lambda\left(|\Delta u|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)+\frac{\alpha(\alpha-2)}{4}\lambda\left(\Delta\left(|u|^{\alpha-4}\left|\nabla|u|^2\right|^2\right),\partial_t\left(|u|^2\right)\right)\\
&\quad -\frac{\alpha}{4}\lambda\left(\left|\Delta|u|^2\right|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha-2}\right)\right)+4\lambda\left(\Delta\left(|\nabla u|^2\right),\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

证 由(1.2)式，则有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^2 &= 2\operatorname{Re}\left(\Delta^2\partial_t u,\Delta^2 u\right)=2\operatorname{Re}\left(\Delta^2\partial_t u,-i\partial_t u+\lambda u|u|^{\alpha}\right)=2\lambda\operatorname{Re}\left(\Delta^2\partial_t u,u|u|^{\alpha}\right)\\
&=2\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,u|u|^{\alpha}\right)-2\lambda\operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,\partial_t\left(u|u|^{\alpha}\right)\right)
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

把(3.2)式中第二项变为

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,\partial_t\left(u|u|^{\alpha}\right)\right) &= \operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,\partial_t u|u|^{\alpha}\right)+\operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,u\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)\\
&=\operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,\partial_t u|u|^{\alpha}\right)+\frac{1}{2}\left(\Delta^2|u|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)\\
&\quad +\left(|\Delta u|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)-2\left(\Delta\left(|\nabla u|^2\right),\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{5}J_i,
\end{aligned}
$$

其中 J_1 经计算得

$$
\begin{aligned}
J_1 &= \operatorname{Re}\left(\Delta^2 u,i\Delta^2 u\cdot|u|^{\alpha}-i\lambda u|u|^{2\alpha}\right)\\
&=\lambda\operatorname{Im}\left(\Delta u,\Delta\left(u|u|^{2\alpha}\right)\right)\\
&=\lambda\operatorname{Im}\left(\Delta u,u\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)+2\nabla u\nabla\left(|u|^{2\alpha}\right)+|u|^{2\alpha}\Delta u\right)\\
&=\lambda\operatorname{Im}\left(\Delta u,u\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)+2\lambda\operatorname{Im}\left(\Delta u,\nabla u\nabla\left(|u|^{2\alpha}\right)\right),
\end{aligned}
$$

对于 J_2 的计算如下

$$
\begin{aligned}
J_2 &= \frac{1}{2}\left(\Delta|u|^2,\partial_t\left(\Delta|u|^{\alpha}\right)\right)\\
&=\frac{\alpha}{4}\left(\Delta|u|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha-2}\left(\Delta|u|^2\right)\right)\right)+\frac{\alpha(\alpha-2)}{8}\left(\Delta|u|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha-4}\left(\left|\nabla|u|^2\right|^2\right)\right)\right)\\
&=\frac{\alpha}{4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Delta|u|^2,|u|^{\alpha-2}\left(\Delta|u|^2\right)\right)-\frac{\alpha}{8}\left(\partial_t\left(\left|\Delta|u|^2\right|^2\right),|u|^{\alpha-2}\right)+\frac{\alpha(\alpha-2)}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Delta|u|^2,|u|^{\alpha-4}\left(\left|\nabla|u|^2\right|^2\right)\right)\\
&\quad -\frac{\alpha(\alpha-2)}{8}\left(\partial_t\left(\Delta|u|^2\right),|u|^{\alpha-4}\left(\left|\nabla|u|^2\right|^2\right)\right)\\
&=\frac{\alpha}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left|\Delta|u|^2\right|^2,|u|^{\alpha-2}\right)+\frac{\alpha}{8}\left(\left|\Delta|u|^2\right|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha-2}\right)\right)+\frac{\alpha(\alpha-2)}{8}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\Delta|u|^2,|u|^{\alpha-4}\left(\left|\nabla|u|^2\right|^2\right)\right)\\
&\quad -\frac{\alpha(\alpha-2)}{8}\left(\partial_t\left(|u|^2\right),\Delta\left(|u|^{\alpha-4}\cdot\left|\nabla|u|^2\right|^2\right)\right).
\end{aligned}
$$

此处 $\alpha \ge 4$ 为常数。

引理 3.2.2 在定理 1.1 的条件下，且 $U=\sup\limits_{[0,T_{\max})}\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}$，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon(u)+\|u\|_{L^2}^2\right)\le U^{2\alpha+4}\ln^{\alpha}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)\|u\|_{H^4}^2+U^3\|u\|_{H^4}^2+U^3\|u\|_{H^4}+U^4, \tag{3.3}$$

证 由引理 3.2.1，可知

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varepsilon(u)+\|u\|_{L^2}^2\right)=&-4\lambda^2\operatorname{Im}\left(\Delta u,\nabla u\nabla\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)-2\lambda^2\operatorname{Im}\left(\Delta u,u\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)\\&-\frac{\alpha}{4}\lambda\left(\left|\Delta|u|^2\right|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha-2}\right)\right)+\frac{\alpha(\alpha-2)}{4}\lambda\left(\Delta\left(|u|^{\alpha-4}\left|\nabla|u|^2\right|^2\right),\partial_t\left(|u|^2\right)\right)\\&-2\lambda\left(|\Delta u|^2,\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)+4\lambda\left(\Delta\left(|\nabla u|^2\right),\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{6}C_iK_i.\end{aligned}$$

下面分别给出 $K_i\ (i=1,2,\cdots,6)$ 的估计，其中第一项估计为

$$\begin{aligned}K_1&=\left|\operatorname{Im}\left(\Delta u,\nabla u\nabla\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)\right|\le\int|\Delta u||\nabla u|^2\cdot|u|^{2\alpha\text{-}1}\,\mathrm{d}x\\&\le\|\Delta u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^4}^2\|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-1}\end{aligned}$$

由(2.12)式即得

$$K_1\le\|u\|_{H^2}^3\|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-1}\le U^{2\alpha+2}\ln^{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)+U^3,$$

同理，对 K_2 做估计

$$\begin{aligned}K_2&=\left|\operatorname{Im}\left(\Delta u,u\Delta\left(|u|^{2\alpha}\right)\right)\right|\\&\le\int|\Delta u|^2\cdot|u|^{2\alpha}\,\mathrm{d}x+\int|\Delta u||\nabla u|^2\cdot|u|^{2\alpha-1}\,\mathrm{d}x\\&\le\|\Delta u\|_{L^2}^2\|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}+\|\Delta u\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^4}^2\|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-1},\end{aligned}$$

由(2.12)式得到

$$\begin{aligned}K_2&\le\|u\|_{H^2}^{2\alpha+2}\ln^{\alpha}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)+\|u\|_{H^2}^2+\|u\|_{H^2}^{2\alpha+2}\ln^{\frac{2\alpha-1}{2}}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)+\|u\|_{H^2}^3\\&\le U^{2\alpha+2}\ln^{\alpha}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)+U^2+U^{2\alpha+2}\ln^{\frac{2\alpha\text{-}1}{2}}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)+U^3,\end{aligned}$$

利用不等式 $\left|\partial_t|u|\right|\le\left|\partial_t u\right|$，对 K_3 做估计有

$$\begin{aligned}K_3&=\int\left|\nabla|u|^2\right|^2\cdot\left|\partial_t\left(|u|^{\alpha-2}\right)\right|\mathrm{d}x\\&\le\int\left(|\nabla u|^2|u|^2\right)|u|^{\alpha\text{-}3}\left|\partial_t|u|\right|\mathrm{d}x\\&\le\int|\nabla u|^2|u|^{2\alpha}\,\mathrm{d}x+\int|\nabla u|^2|u|^{\alpha-1}\left|\Delta^2u\right|\mathrm{d}x\\&\le\|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|\nabla u\|_{L^4}^2+\|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Delta u\|_{L^4}^2\left\|\Delta^2u\right\|_{L^2},\end{aligned}$$

由 Gagliardo-Nirenberg 不等式

$$\left\|\Delta u\right\|_{L^4}^2 \le \left\|\Delta u\right\|_{L^2}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}, \tag{3.4}$$

及(2.12)得到

$$\begin{aligned} K_3 &\le \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Delta u\|_{L^2}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ &\le U^{2\alpha+2}\ln^{\alpha}\left(2+\|u\|_{H^4}\right) + U^2 + U^{\alpha}\ln^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)\|u\|_{H^4}^2 + U\|u\|_{H^4}^2, \end{aligned}$$

对 K_4 进行估计

$$\begin{aligned} K_4 &= \int\left|\Delta\left(|u|^{\alpha-4}\left|\nabla|u|^2\right|^2\right)\right|\cdot\left|\partial_t\left(|u|^2\right)\right|\mathrm{d}x \\ &\le \int\left(|u|^{\alpha-4}|\nabla u|^4 + |u|^{\alpha-3}|\Delta u||\nabla u|^2 + |u|^{\alpha-2}|\Delta u|^2 + |u|^{\alpha-2}|\nabla u|\left|D^3 u\right|\right)\cdot\left(|u|^{2\alpha+2} + |u|\left|\Delta^2 u\right|\right)\mathrm{d}x \\ &\le \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-2}\|\nabla u\|_{L^4}^4 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-1}\|\nabla u\|_{L^4}^2\|\Delta u\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|\nabla u\|_{L^2}\left\|D^3 u\right\|_{L^2} \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-3}\|\nabla u\|_{L^8}^4\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\|\nabla u\|_{L^8}^2\|\Delta u\|_{L^4}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Delta u\|_{L^4}^2\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\nabla u\|_{L^4}\left\|D^3 u\right\|_{L^4}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}, \end{aligned}$$

由(2.12)，(2.13)及(3.4)式，即对于上式第 5 项估计

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\|\nabla u\|_{L^8}^2\|\Delta u\|_{L^4}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} &\le \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{3}{2}}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\|\Delta u\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} \\ &\le \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\|\Delta u\|_{L^2}^2\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} K_4 &\le \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-2}\|u\|_{H^2}^3\|u\|_{H^4} + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha-1}\|u\|_{H^2}^3 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|u\|_{H^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^4} + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-3}\|u\|_{H^2}^3\|u\|_{H^4}^2 \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-2}\|u\|_{H^2}^2\|u\|_{H^4}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^4}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^4}^2. \end{aligned}$$

下面对 K_5 进行估计

$$\begin{aligned} K_5 &= \int|\Delta u|^2\cdot\left|\partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right|\mathrm{d}x \\ &\le \int|\Delta u|^2\cdot|u|^{2\alpha} + |\Delta u|^2|u|^{\alpha-1}\left|\Delta^2 u\right|\mathrm{d}x \\ &\le \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|\Delta u\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Delta u\|_{L^4}^2\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2} \\ &\le \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|u\|_{H^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|\Delta u\|_{L^2}\left\|\Delta^2 u\right\|_{L^2}^2 \\ &\le U^{2\alpha+2}\ln^{\alpha}\left(2+\|u\|_{H^4}\right) + U^2 + U^{\alpha}\ln^{\frac{\alpha-1}{2}}\left(2+\|u\|_{H^4}\right)\|u\|_{H^4}^2 + U\|u\|_{H^4}^2, \end{aligned}$$

对 K_6 进行估计，同理，即有

$$\begin{aligned} K_6 &= \left|\left(\Delta\left(|\nabla u|^2\right), \partial_t\left(|u|^{\alpha}\right)\right)\right| \\ &\le \int\left(|\nabla u|^4 + |u||\Delta u||\nabla u|^2 + |u|^2|\Delta u|^2 + |u|^2|\nabla u|\left|D^3 u\right|\right)|u|^{\alpha-1}\left|\partial_t|u|\right|\mathrm{d}x \\ &\le \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha}\|u\|_{H^2}^4 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha+1}\|u\|_{H^2}^3 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha+2}\|u\|_{H^2}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{2\alpha+2}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^4} + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha-1}\|u\|_{H^2}^3\|u\|_{H^4}^2 \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha}\|u\|_{H^2}^2\|u\|_{H^4}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha+1}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^4}^2 + \|u\|_{L^\infty}^{\alpha+1}\|u\|_{H^2}\|u\|_{H^4}^2 \end{aligned}$$

从而引理 3.2.2 得证。

定理 1.2 的证明

首先假设 $T_{\max} < +\infty$，且 $U = \sup\limits_{[0,T_{\max})} \left\| u(t) \right\|_{H^2(\Omega)} < +\infty$，由引理 3.2.1，需要对下面几个进行估计，运用 Hölder 不等式及加权的 Young 不等式得

$$\left| \left(\Delta^2 u, u|u|^\alpha \right) \right| \le \left\| \Delta^2 u \right\|_{L^2} \left\| u \right\|_{L^{2\alpha+2}}^{\alpha+1} \le U^{\alpha+1} \left\| u \right\|_{H^4} \le \varepsilon \left\| u \right\|_{H^4}^2 + \frac{C}{\varepsilon} U^{2(\alpha+1)}, \tag{3.5}$$

利用加权的 Young 不等式得

$$\left| \left(\left| \Delta |u|^2 \right|^2, |u|^{\alpha-2} \right) \right| \le U^{\alpha+1} + \frac{C}{\varepsilon} U^{6\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)} + \varepsilon \left\| u \right\|_{H^4}^2 \tag{3.6}$$

同理，则有

$$\begin{aligned} \left| \left(\Delta |u|^2, |u|^{\alpha-4} \left| \nabla |u|^2 \right|^2 \right) \right| &\le \int |\nabla u|^4 |u|^{\alpha-2} \mathrm{d}x + \int |\Delta u| |\nabla u|^2 |u|^{\alpha-1} \mathrm{d}x \\ &\le \frac{C}{\varepsilon} U^{6\left(\alpha+\frac{1}{3}\right)} + \varepsilon \left\| u \right\|_{H^4}^2, \end{aligned} \tag{3.7}$$

又由能量泛函 $\varepsilon(u)$ 的定义及(3.5)~(3.7)式有

$$\left\| u \right\|_{H^4}^2 \le C \left(\varepsilon(u) + \left\| u \right\|_{L^2}^2 \right), \tag{3.8}$$

再结合(3.3)式和(3.8)式有

$$\begin{aligned} \left\| u(t) \right\|_{H^4}^2 \le{}& \left\| u(T) \right\|_{H^4}^2 + U^{2\alpha+4} \int_T^t \ln^\alpha \left(2 + \left\| u \right\|_{H^4} \right) \left\| u \right\|_{H^4}^2 \mathrm{d}t \\ &+ U^3 \int_T^t \left\| u \right\|_{H^4}^2 \mathrm{d}t + U^3 \int_T^t \left\| u \right\|_{H^4} \mathrm{d}t + U^4 (t-T). \end{aligned} \tag{3.9}$$

由 Gronwall 不等式得 $U = \sup\limits_{[0,T_{\max})} \left\| u(t) \right\|_{H^4(\Omega)} < +\infty$，从而得出矛盾，并结合定理 1.1，进而得出结论，证毕。

参考文献 (References)

[1] Brézis, H. and Gallouët, T. (1980) Nonlinear Schrödinger Evolution Equations. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **4**, 677-681. https:/doi.org/10.1016/0362-546X(80)90068-1

[2] Tsutsumi, M. (1989) On Smooth Solutions to the Initial-Boundary Value Problem for the Nonlinear Schrödinger Equation in Two Space Dimensions. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **13**, 1051-1056. https:/doi.org/10.1016/0362-546X(89)90094-1

[3] Ozawa, T. and Visciglia, N. (2015) An Improvement on the Brézis-Gallouët Technique for 2D NLS and 1D Half-Wave Equation. *Annales de l'Institut Henri Poincare* (*C*) *Non Linear Analysis*, **33**, 1069-1079.

[4] Karpman, V.I. and Shagalov, A.G. (2000) Stability of Solitons Described by Nonlinear Schrödinger-Type Equations with Higher-Order Dispersion. *Physica D*: *Nonlinear Phenomena*, **144**, 194-210. https:/doi.org/10.1016/S0167-2789(00)00078-6

[5] Zhu, S., Yang, H. and Zhang, J. (2011) Blow-Up of Rough Solutions to the Fourth-Order Nonlinear Schrödinger Equation. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods and Applications*, **74**, 6186-6201. https:/doi.org/10.1016/j.na.2011.05.096

[6] Zheng, S.M. (2004) Nonlinear Evolution Equations. Chapman & Hall/CRC, London, 56-57. https:/doi.org/10.1201/9780203492222

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究