

The $\exp(-\Phi(\xi))$ Method for the Nonlinear Time Fractional Differential Equations

Yadong Wang, Xindong Zhang*

College of Mathematics Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang
Email: liaoyuan1126@163.com, 1546777406@qq.com

Received: Jun. 29th, 2017; accepted: Jul. 17th, 2017; published: Jul. 20th, 2017

Abstract

In this paper, the $\exp(-\Phi(\xi))$ method is used to construct the approximate analytical solution of Korteweg-de Vries Zakharov Kuznetsov (KdV-ZK) equation via the (3 + 1)-dimensional. The results of numerical example show that the method is very useful in solving nonlinear time fractional differential equations.

Keywords

Time Fractional KdV-ZK Equation, Fractional Derivative, Exact Solutions, $\exp(-\Phi(x))$ Method

非线性时间分数阶微分方程的 $\exp(-\Phi(\xi))$ 解法

王亚东, 张新东*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐
Email: liaoyuan1126@163.com, 1546777406@qq.com

收稿日期: 2017年6月29日; 录用日期: 2017年7月17日; 发布日期: 2017年7月20日

摘要

本文主要研究(3+1)维Korteweg-de Vries Zakharov (KdV-ZK)方程的 $\exp(-\Phi(\xi))$ 解法。利用 $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法获得所研究方程的近似解析解。数值算例表明, 该方法在求解非线性分数阶微分方程的近似解析解时非常有效。

*通讯作者。

关键词

时间分数阶KdV-ZK方程, 分数阶导数, 精确解, $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在工程处理的各个领域中, 越来越多的学者开始从事分数阶偏微分方程的研究, 并且成果显著。近几年在数学物理中出现了非线性分数阶微分方程的研究, 引起了人们极大的关注。尤其是 KdV-ZK 类型 [1] [2] 的方程, 由于其沿水表面的行波性质和其在固体物理、等离子体物理和量子场论中的各种应用, 对 KdV-ZK 方程的研究变得越来越重要。与常微分方程相比, 分数阶微分方程可以推广到任意(非整数)阶。由于其在工程和科学上的显著应用, 分数阶微分方程逐渐成为当前的研究热点。

在本文中, 我们主要研究 KdV-ZK 方程的近似解析解问题。数学物理中 KdV-ZK 方程可以用来描述耦合非线性传输线中的非线性波与水波在空间中的运动规律, Zakharov 和 Kuznetsov 在研究过程中首次推导出该方程, 且以他们的名字命名 [3] [4] [5] [6]。由于大部分的 KdV-ZK 方程的精确解不容易求解出来, 目前求解方程的数值解及近似解析解算法已成为一个重要的任务, 所以学者通常采用解析和数值方法对方程进行研究。目前已经有求解分数阶微分方程的方法并应用到 KdV-ZK 方程的求解中 [7] [8] [9] [10] [11]。文献 [12] 中提出的 $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法为求解分数阶微分方程的近似解析解提供了解决方案, 此方法利用齐次平衡原理 [13] 进行处理。

近似解析解的获得有助于我们更好地了解此方程所表现出的物理现象。借助分数阶导数的复变换, 非线性时间分数阶微分方程可转化为整数阶的常微分方程。最近, 一些强大的方法已被提出。例如, (G'/G)-expansion 方法 [14]。

本文的目的是使用 $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法求解 KdV-ZK 方程的近似解析解。行文安排如下: 在第 2 节中, 给出了本文将要使用的分数微积分的一些定义。在第 3 节中, 给出了方法的说明和具体计算步骤。在 4 节中我们用此方法求解时间分数阶微分方程的具体算例。在第 5 节中给出文章的结论。

2. 准备工作

本节我们主要介绍一些文章中将用到的关于分数阶微积分的一些预备知识。具体请参考文献 [15] [16] [17] [18]。

定义 2.1 假设 $\phi(x)$ 是定义在包含 x_0 和 x_0 领域内的所有点的区间上的函数, 如果对于任意的正常数 ε , 存在正常数 p 、 δ , 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 有

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < p\varepsilon^\eta, \quad 0 < \eta < 1, \quad (1)$$

则称 $\phi(x)$ 在 $x = x_0$ 处局部分数连续, 即满足

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) = \phi(x_0),$$

因此, 如果

$$\phi(x) \in C_\eta(a, b), \quad (2)$$

其中 $0 < \eta < 1$ 是分形维数, 则称函数 $\phi(x)$ 在区间 (a, b) 上局部分数阶连续。

定义 2.2 函数 $\phi(x): R \rightarrow R, X \mapsto \phi(X)$ 是指数为 η 的不可微函数, 并关于指数 η 满足 Hölder 方程, 则当 $x, y \in X$ 时, 我们有

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| < C|x - y|, \quad 0 < \eta < 1. \quad (3)$$

定义 2.3 如果函数 $\phi(x): R \rightarrow R, X \mapsto \phi(X)$ 满足

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| = O(x - x_0)^\eta, \quad 0 < \eta < 1, \quad (4)$$

则称 $\phi(x)$ 是关于指数 η 局部分数阶连续的。

注: 函数 $\phi(x)$ 在空间 $C_\eta(a, b)$ 中, 当且仅当对任意的 $x_0 \in [a, b]$, $0 < \eta < 1$, 满足

$$\phi(x) - \phi(x_0) = O((x - x_0)^\eta).$$

定义 2.4 假设 $\phi(x) \in C_\eta(a, b)$, 则 $\phi(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 η 阶局部分数导数定义如下:

$$\phi(x_0) = \frac{d^\eta \phi(x)}{dx^\eta} \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\eta (\phi(x) - \phi(x_0))}{(x - x_0)^\eta}, \quad 0 < \eta < 1, \quad (5)$$

其中 $\Delta^\eta (\phi(x) - \phi(x_0)) \equiv \Gamma(1 + \eta) \Delta (\phi(x) - \phi(x_0))$ 。

注: 如果 $\omega(x) = (\varphi \circ u)(x)$, 则当 $u(x) = h(x)$ 时, 存在 $\phi^{(\eta)}(h(x))$, $h^{(1)}(x)$ 和 $\phi^{(1)}(h(x))$, $h^{(\eta)}(x)$ 使得

$$\frac{d^\eta \omega(x)}{dx^\eta} = \left(\phi^{(\eta)}(h(x)h^{(1)}(x)) \right)^\eta, \quad (6)$$

$$\frac{d^\eta \omega(x)}{dx^\eta} = \left(\phi^{(1)}(h(x)h^{(\eta)}(x)) \right)^\eta. \quad (7)$$

在 $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法中, 等式(7)在分数阶的变换中起到至关重要的作用。

注:

$$\frac{d^\eta x^{k\eta}}{dx^\eta} = \frac{\Gamma(1 + k\eta)}{\Gamma(1 + (k-1)\eta)} x^{(k-1)\eta},$$

$$\frac{d^\eta E_\eta(kx^\eta)}{dx^\eta} = kE_\eta(kx^\eta), \quad k \text{ 为常数}.$$

这些导数在研究高度不规则和不可微函数的分数阶可微性方面发挥着重要的作用。

3. $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法的基本思想

本节我们考虑非线性分数阶微分方程的一般形式:

$$F(u, D_t^\alpha u, u_x, u_y, u_z, u_{xx}, u_{yy}, u_{zz}, u_{xy}, u_{xz}, \dots) = 0, \quad (8)$$

其中 D_t^α 是在关与 u 关于 x, y, z, t 的局部分数导数, F 是 $u = u(x, y, z, t, \dots)$ 和 u 的各阶导数的多项式, 其中包含非线性项和 u 的最高阶导数。寻求分数阶微分方程的近似解析解的主要步骤如下[19]:

步骤 1: 考虑下面的非线性分数阶复变换, 使用分数阶变量变换[20] [21] [22] [23]:

$$U(\xi) = u(x, y, z, t); \quad \xi = x + y + z - \frac{t^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (9)$$

其中 r 是一个任意的非零常数, 通过在(7)中使用链式规则, 我们可以得到

$$D_t^\alpha u = \sigma_t \frac{du}{d\xi} D_t^\alpha \xi,$$

σ_t 称为分形指标, 我们通常令 $\sigma_t = r$, 其中 r 是一个常数。

利用方程式(9)将程式(8)转化为下面的非线性常微分方程

$$Q(U, U', U'', \dots) = 0, \quad (10)$$

其中 ' 表示 U 于 ξ 的导数。下面我们对方程式(10)进行逐项积分。

步骤 2: 根据 $\exp(-\Phi(\xi))$ 的方法, 方程(10)的近似解析解可以用以下的形式表示:

$$U(\xi) = \sum_{n=0}^N a_n (\exp(-\Phi(\xi)))^n, \quad (11)$$

这里 a_n ($a_n \neq 0$) 是待定常数, $\Phi(x)$ 满足下列辅助常微分方程:

$$\Phi'(\xi) = \exp(-\Phi(\xi)) + \mu \exp(\Phi(\xi)) + \lambda, \quad (12)$$

因此辅助方程式(12)有如下不同形式的解:

① 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu \neq 0$ 时,

$$\Phi_1(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu} \tanh \left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} (\xi + c) - \lambda \right)}{2\mu} \right), \quad (13)$$

② 当 $\lambda^2 - 4\mu < 0, \mu \neq 0$ 时,

$$\Phi_2(\xi) = \ln \left(\frac{-\sqrt{4\mu - \lambda^2} \tan \left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} (\xi + c) - \lambda \right)}{2\mu} \right), \quad (14)$$

③ 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu = 0, \lambda \neq 0$ 时,

$$\Phi_3(\xi) = -\ln \left(\frac{\lambda}{\sinh(\lambda(\xi + c)) + \cosh(\lambda(\xi + c)) - 1} \right), \quad (15)$$

④ 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu \neq 0, \lambda \neq 0$ 时,

$$\Phi_4(\xi) = \ln \left(-\frac{2(\lambda(\xi + c) + 2)}{\lambda^2(\xi + c)} \right), \quad (16)$$

⑤ 当 $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mu = 0, \lambda = 0$ 时,

$$\Phi_5(\xi) = \ln(\xi + c), \quad (17)$$

其中 c 是积分常数。其中平衡数 n 是通过最高阶线性项和不等式(11)的最高阶非线性项的平衡确定的。

步骤 3: 将方程(11)带到方程(10)中, 把 $\exp(-\Phi(\xi))^n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) 相同项的系数加在一起从而得到一个多项式, 然后令这些多项式等于 0 产生一个代数方程组, 通过求解方程组构造方程(8)的近似解析解。

4. 数值算例

本节我们考虑 KdV-ZK 方程

$$D_t^\alpha u + auu_x + u_{xxx} + a(u_{yyx} + u_{zzx}) = 0; 0 < \alpha \leq 1 \quad (18)$$

的解, 其中 a 是任意常数, 为了得到最终结果, 给出了以下变换:

$$U(\xi) = u(x, y, z, t); \xi = x + y + z - \frac{rt^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (19)$$

其中 r 是非零常数. 变换后积分方程只有 ξ 一个变量, 将方程(19)代入方程(18), 得到如下常微分方程:

$$r\sigma_t U' + aUU' + (1+2c)U'' = 0,$$

其中 $U' = \frac{dU}{d\xi}$. 对上式两边逐项进行积分, 我们得到

$$r\sigma_t U + \frac{a}{2}U^2 + (1+2c)U'' = 0, \quad (20)$$

其中 $'$ 表示 U 对 ξ 的导数, 通过最高阶导数项 U'' 和方程(20)的非线性项 U^2 的平衡, 我们得到平衡数 $n=2$. 所以有:

$$U(\xi) = a_0 + a_1 e^{-\Phi(\xi)} + a_2 e^{-2\Phi(\xi)}. \quad (21)$$

将(21)式代入到(20)式, 然后把 $\exp(-\Phi(\xi))^n, (n=1,2,3,4)$ 的相同项的系数加在一起从而得到一个多项式, 再令这些多项式等于 0 得到如下代数方程组:

$$\begin{aligned} e^{-4\Phi(\xi)}: 6a_2 + 12a_2c + \frac{aa_2^2}{2} &= 0; \\ e^{-3\Phi(\xi)}: (1+2c)(6a_2\lambda + 2a_1 + 4a_2\lambda) + aa_1a_2 &= 0; \\ e^{-2\Phi(\xi)}: (1+2c)(6a_2\mu + 2a_1\lambda + 4a_2\lambda^2 + a_1\lambda + 2a_2\mu) + aa_0a_2 + \frac{aa_1^2}{2} + r\sigma_t a_2 &= 0; \\ e^{-\Phi(\xi)}: (1+2c)(2a_1\mu + 4a_2\lambda\mu + a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda\mu) + aa_0a_1 + r\sigma_t a_1 &= 0; \\ e^0: (1+2c)(a_1\lambda\mu + 2a_2\mu^2 + a_1\lambda^2 + 2a_2\lambda\mu) + \frac{aa_0}{2} + r\sigma_t a_0 &= 0; \end{aligned} \quad (22)$$

然后用 Maple 分组程序求解上述代数方程组, 得到如下两个结果:

结果 1:

$$a_0 = -\frac{12\mu(1+2c)}{a}, a_1 = -\frac{12\lambda(1+2c)}{a}, a_2 = -\frac{12\lambda(1+2c)}{a}, r = \frac{(4\mu - \lambda^2)(1+2c)}{\sigma_t}, \quad (23)$$

$$\xi = x + y + z - \frac{(4\mu - \lambda^2)(1+2c)t^\alpha}{\sigma_t \Gamma(1+\alpha)}, \quad (24)$$

$$U(\xi) = -\frac{12\mu(1+2c)}{a} - \frac{12\lambda(1+2c)}{a} e^{-\Phi(\xi)} - \frac{12\lambda(1+2c)}{a} e^{-2\Phi(\xi)}. \quad (25)$$

对此结果我们有以下不同情况的 KdV-ZK 方程的精确解:

a) 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu \neq 0$ 时,

$$U_1(\xi) = -\frac{12(1+2c)}{a} \left[\mu - \frac{2\mu\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+c)\right) + \lambda} + \frac{4\mu^2}{\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+c)\right) + \lambda\right)^2} \right].$$

b) 当 $\lambda^2 - 4\mu < 0, \mu \neq 0$ 时,

$$U_2(\xi) = -\frac{12(1+2c)}{a} \left[\mu + \frac{2\mu\lambda}{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+c)\right) - \lambda} + \frac{4\mu^2}{\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2} \tan\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+c)\right) - \lambda\right)^2} \right].$$

c) 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu = 0, \lambda \neq 0$ 时,

$$U_3(\xi) = -\frac{12(1+2c)}{a} \left[\mu + \frac{\lambda^2}{\sinh(\lambda(\xi+C)) + \cosh(\lambda(\xi+C)) - 1} + \frac{\lambda^2}{(\sinh(\lambda(\xi+C)) + \cosh(\lambda(\xi+C)) - 1)^2} \right].$$

d) 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu \neq 0, \lambda \neq 0$ 时,

$$U_4(\xi) = -\frac{12(1+2c)}{a} \left[\mu - \frac{\lambda^3(\xi+C)}{2(\lambda(\xi+C)+2)} + \frac{\lambda^4(\xi+C)^2}{4(\lambda(\xi+C)+2)^2} \right].$$

e) 当 $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mu = 0, \lambda = 0$ 时,

$$U_5(\xi) = -\frac{12(1+2c)}{a} \left[\mu + \frac{\lambda}{\xi+C} + \frac{1}{(\xi+C)^2} \right].$$

结果 2:

$$a_0 = -\frac{2(\lambda^2+2\mu)(1+2c)}{a}, a_1 = -\frac{12\lambda(1+2c)}{a}, a_2 = -\frac{12(1+2c)}{a}, r = -\frac{(4\mu-\lambda^2)(1+2c)}{\sigma_i(1+\alpha)}, \quad (26)$$

$$\xi = x + y + z - \frac{(4\mu-\lambda^2)(1+2c)t^\alpha}{\sigma_i(1+\alpha)}, \quad (27)$$

$$U(\xi) = -\frac{2\mu(1+2c)}{a} (\lambda^2 + 2\mu + 6\lambda e^{-\Phi(\xi)} + 6e^{-2\Phi(\xi)}), \quad (28)$$

对此结果我们有以下不同情况的 KdV-ZK 方程方程的精确解:

a) 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu \neq 0$ 时,

$$U_1(\xi) = -\frac{2(1+2c)}{a} \left[\lambda^2 + 2\mu - \frac{12\mu\lambda}{\sqrt{\lambda^2-4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+c)\right) + \lambda} + \frac{24\mu^2}{\left(\sqrt{\lambda^2-4\mu} \tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{2}(\xi+c)\right) + \lambda\right)^2} \right].$$

b) 当 $\lambda^2 - 4\mu < 0, \mu \neq 0$ 时,

$$U_2(\xi) = -\frac{2(1+2c)}{a} \left[\lambda^2 + 2\mu + \frac{12\mu\lambda}{\sqrt{4\mu-\lambda^2} \tanh\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+c)\right) - \lambda} + \frac{24\mu^2}{\left(\sqrt{4\mu-\lambda^2} \tanh\left(\frac{\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{2}(\xi+c)\right) - \lambda\right)^2} \right]$$

c) 当 $\lambda^2 - 4\mu < 0, \mu = 0, \lambda = 0$ 时

$$U_3(\xi) = -\frac{2(1+2c)}{a} \left[\lambda^2 + 2\mu + \frac{6\lambda^2}{\sinh(\lambda(\xi+C)) + \cosh(\lambda(\xi+C)) - 1} + \frac{6\lambda^2}{(\sinh(\lambda(\xi+C)) + \cosh(\lambda(\xi+C)) - 1)^2} \right]$$

d) 当 $\lambda^2 - 4\mu > 0, \mu \neq 0, \lambda \neq 0$ 时

$$U_4(\xi) = -\frac{2(1+2c)}{a} \left[\lambda^2 + 2\mu - \frac{3\lambda^3(\xi+C)}{\lambda(\xi+C)+2} + \frac{3\lambda^4(\xi+C)^2}{2(\lambda(\xi+C)+2)^2} \right]$$

e) 当 $\lambda^2 - 4\mu = 0, \mu = 0, \lambda = 0$ 时

$$U_5(\xi) = -\frac{2(1+2c)}{a} \left[\lambda^2 + 2\mu + \frac{6\lambda}{\xi+C} + \frac{6}{(\xi+C)^2} \right]$$

5. 总结

本文研究的 $\exp(-\Phi(\xi))$ 方法是了解决(3+1)维时间分数阶 KdV-ZK 方程。分析得到了方程在不同情况下的近似解析解。数值算例表明该算法是非常有效的。由于上述方法是基于齐次平衡原理, 它也可以扩展到其他分数阶偏微分方程和方程组, 为齐次平衡原理提供近似解析解的解决方案。

基金项目

新疆维吾尔自治区杰出青年科技人才培养项目(No.QN2016JQ0367), 国家自然科学基金项目(No.11461072), 新疆师范大学数学校级重点学科。

参考文献 (References)

- [1] Sahoo, S. and Ray, S.S. (2015) Improved Fractional Sub-Equation Method for (3+1)-Dimensional Generalized Fractional KdV-Zakharov-Kuznetsov Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, **70**, 158-166. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2015.05.002>
- [2] Ray, S.S. and Gupta, A.K. (2014) An Approach with Haar Wavelet Collocation Method for Numerical Simulations of Modified KDV and Modified Burgers Equations. *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, **103**, 315-341.
- [3] Cairns, R.A., Mamun, A.A., Bingham, R., Dendy, R.O., Bostrom, R., Shukla, P.K. and Nairn, C.M.C. (1995) Electrostatic Solitary Structures in Non-Thermal Plasmas. *Geophysical Research Letters*, **22**, 2709-2712. <https://doi.org/10.1029/95GL02781>
- [4] Islam, S., Bandyopadhyay, A. and Das, K.P. (2008) Ion-Acoustic Solitary Waves in a Multi-Species Magnetized Plasma Consisting of Non-Thermal and Isothermal Electrons. *Journal of Plasma Physics*, **74**, 765-806. <https://doi.org/10.1017/S0022377808007241>
- [5] Zakharov, V.E. and Kuznetsov, E.A. (1974) On Three-Dimensional Solitons. *Journal of Experimental and Theoretical Physics*, **39**, 285-286.
- [6] Mace, R.L. and Hellberg, M.A. (2001) The Korteweg-de Vries-Zakharov-Kuznetsov Equation for Electron-Acoustic Waves. *Physics of Plasmas*, **8**, 2649-2656. <https://doi.org/10.1063/1.1363665>
- [7] Zheng, B. (2012) (G'/G)-Expansion Method for Solving Fractional Partial Differential Equations in the Theory of Ma-

- thematical Physics. *Communications in Theoretical Physics*, **58**, 623-630. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/58/5/02>
- [8] Bekir, A., Guner, O. and Cevikel, A.C. (2013) Fractional Complex Transform and Exp-Function Methods for Fractional Differential Equations. *Abstract and Applied Analysis*, **1**, 233-255. <https://doi.org/10.1155/2013/426462>
- [9] Wang, M.L. (1995) Solitary Wave Solutions for Variant Boussinesq Equations. *Physics Letters A*, **199**, 169-172.
- [10] Guner, O. and Cevikel, A.C. (2014) A Procedure to Construct Exact Solutions of Nonlinear Fractional Differential Equations. *The Scientific World Journal*, **11**, 489-495. <https://doi.org/10.1155/2014/489495>
- [11] Guner, O. and Eser, D. (2014) Exact Solutions of the Space Time Fractional Symmetric Regularized Long Wave Equation Using Different Methods. *Advances in Mathematical Physics*, **11**, 1-8. <https://doi.org/10.1155/2014/456804>
- [12] Gepreel, K.A. and Omran, S. (2012) Exact Solutions for Nonlinear Partial Fractional Differential Equations. *Chinese Physics B*, **21**, 110-204. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/21/11/110204>
- [13] Bekir, A., Guner, O. and Unsal, O. (2013) Exact Solutions of Nonlinear Fractional Differential Equations by (G'/G)-Expansion Method. *Chinese Physics B*, **11**, 110-202. <https://doi.org/10.1088/1674-1056/22/11/110202>
- [14] Unsal, O., Guner, O., Bekir, A. and Cevikel, A.C. (2017) The (G'/G)-Expansion Method for the Nonlinear Time Fractional Differential Equations. *AIP Conference Proceedings*, **1798**, Article ID: 020167.
- [15] American Institute of Physics (1798) Fractional Differential Equations. American Institute of Physics, Prince George's County, Maryland.
- [16] Yang, X.J. (2012) Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications. World Science Publisher, New York.
- [17] Yang, X.J. (2012) A Short Note on Local Fractional Calculus of Function of One Variable. *Journal of Applied Library and Information Science*, **1**, 1-13.
- [18] Yang, X.J. (2012) The Zero-Mass Renormalization Group Differential Equations and Limit Cycles in Non-Smooth Initial Value Problems. *Prespacetime Journal*, **9**, 913-923.
- [19] Hu, M.S., Baleanu, D. and Yang, X.J. (2013) One-Phase Problems for Discontinuous Heat Transfer in Fractal Media. *Mathematical Problems in Engineering*, **3**, Article ID: 358473. <https://doi.org/10.1155/2013/358473>
- [20] Feng, Z.S. (2002) The First Integral Method to Study the Burgers-KdV Equation. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **35**, 343-349. <https://doi.org/10.1088/0305-4470/35/2/312>
- [21] Su, W.H., Yang, X.J., Jafari, H. and Baleanu, D. (2013) Fractional Complex Transform Method for Wave Equations on Cantor Sets within Local Fractional Differential Operator. *Advances in Difference Equations*, **97**, 1-8. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-97>
- [22] Yang, X.J., Baleanu, D. and Srivastava, H.M. (2015) Local Fractional Integral Transforms and Their Applications. *Elsevier*, **10**, 1-12.
- [23] He, J.H., Elagan, S.K. and Li, Z.B. (2012) Geometrical Explanation of the Fractional Complex Transform and Derivative Chain Rule for Fractional Calculus. *Physics Letters A*, **4**, 257-259. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2011.11.030>

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: aam@hanspub.org