Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2018, 7(3), 289-302
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2018.73035

Hans汉斯

Study on Bi-Dimensional Bedrosian Principle and Applications

Guanlei Xu[1,2], Xiatong Wang[1*], Xiaogang Xu[2], Limin Shao[1], Lijia Zhou[1]

[1]Navigation Department of Dalian Navy Academy, Dalian Liaoning
[2]Department of Electronics and Information, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning
Email: *xgl_86@153.com

Received: Mar. 3rd, 2018; accepted: Mar. 21st, 2018; published: Mar. 28th, 2018

Abstract

The Bedrosian theorem is the crossed elementary theory in mathematics and information fields, which determines the results of Hilbert transform and plays an important role in amplitude and phase analysis for signal processing. However, there have been many blank aspects in bidimensional Bedrosian theorem. This paper will mainly focus on the review of the theoretical proofs and physical sense explanation for the partial Bedrosian theorem, the cross-orthant Bedrosian theorem, the single-orthant Bedrosian theorem, the bi-orthant Bedrosian theorem, the quaternion Bedrosian theorem and the monogenic Bedrosian theorem in different domains. Based on these Bedrosian theorems, we will review the amplitude-phase analysis methods and image decomposition schedules. The main object of this paper is striving to review the ensemble of the theory of the Bedrosian theorem and study the applications in amplitude-phase analysis and image decomposition based on the Bedrosian theorems.

Keywords

Hilbert Transform, Bedrosian Theorem, Amplitude-Phase and Time-Frequency Analysis, Image Decomposition

二维Bedrosian定理理论及其应用研究

徐冠雷[1,2]，王孝通[1*]，徐晓刚[2]，邵利民[1]，周立佳[1]

[1]海军大连舰艇学院航海系，辽宁 大连
[2]大连理工大学，电子信息与电子工程学部，辽宁 大连
Email: *xgl_86@153.com

收稿日期：2018年3月3日；录用日期：2018年3月21日；发布日期：2018年3月28日

*通讯作者。

文章引用: 徐冠雷, 王孝通, 徐晓刚, 邵利民, 周立佳. 二维 Bedrosian 定理理论及其应用研究[J]. 应用数学进展, 2018, 7(3): 289-302. DOI: 10.12677/aam.2018.73035

摘　要

Bedrosian定理是数学和信息科学交叉领域的基础性理论，它决定了Hilbert变换的结果形式，对于信号幅相及时频分析均具有重要的理论意义和应用价值。目前二维Bedrosian定理的研究还存在着不少空白，本文主要针对方向Bedrosian定理、交叉象Bedrosian定理、单象Bedrosian定理、二象Bedrosian定理、四元Bedrosian定理以及单基解析Bedrosian定理等进行不同域内的数学推导及理论证明的分析介绍，并阐释了它们对应的物理意义。在此基础上，介绍了二维Bedrosian定理应用于图像的幅相分析和图像分解的策略。最后，在二维Bedrosian定理理论、二维Bedrosian定理的图像时频分析及分解应用等综述基础上，系统性地对未来的工作进行了展望。

关键词

Hilbert变换，Bedrosian定理，幅相及时频分析，图像分解

1. 引言

Bedrosian 定理是信号处理领域的一个基础性工作[1]-[18]，同时也是数学领域中的研究工作之一[19]-[36]，它最初来源于 Hilbert 变换[7] [8] [15] [16]。Hilbert 变换，自从 1946 年由 Gabor 提出以来[1]，已经得到了深入的研究。Hilbert 变换具有很多优良特性，包括 Bedrosian 定理特性、变换前后信号能量不变、π/2 相移、四次信号复原等，已成为信号处理的基础理论和重要工具[2] [3] [4]，并在信息通信、信号时频分析、特征识别以及特征提取等方面[2]-[11] [26]-[34]得到广泛应用。Hilbert 变换的基本思想是：对原实数信号进行 Fourier 变换得到 Fourier 频谱，在 Fourier 频谱中剔除掉负频率部分，加倍正频率部分的幅值，然后对频谱再进行 Fourier 逆变换得到复数信号。Hilbert 变换在时域内将原实数信号作为实部，原实数信号和 1/πt 核函数的卷积作为虚部，从而由实数信号构造复数信号。可以看出，通过 Hilbert 变换将实数信号从实数域转换到复数域进行处理，可以充分利用复数信号的特有性质，为求解信号的幅度和相位信息提供了简洁、明了的方式，也为信号的进一步分析和处理打下了良好的基础。

而且人们已经意识到[3] [5] [6]，在一维信号中，Bedrosian 定理虽然是 Hilbert 变换的一个特性，但却是 Hilbert 变换的核心[40]，这表明：对于两个(或多个)实数信号相乘的形式，进行 Hilbert 变换后，其中只有满足一定条件的信号变成了复数或发生了相移，而其它信号保持不变，即 Bedrosian 定理决定了 Hilbert 变换的结果形式。目前，一维 Bedrosian 定理及应用已经很成熟[1] [3] [4] [15]-[22]，其主要包括：1) 对于两个实数信号相乘的形式，应用 Bedrosian 定理进行 Hilbert 变换后，高频信号变为复数，低频信号不变，变换结果则是低频信号与高频信号复数的乘积形式，这在通信等领域中具有重要的工程价值[1] [5]；2) 通过上述的乘积形式可以直接获取信号的幅度和相位信息(进一步，包含频率信息)，这在信号的时频分析、特征提取等方面具有非常基础性的理论意义和重要的工程价值[3] [4] [6]；3) 依据信号的特征结合 Bedrosian 定理，通过对信号进行 Bedrosian 定理的多次嵌套和循环应用(包括线性和非线性组合应用)，可以获取某个特定频率的信号等[30] [31] [32] [34]，目前的研究已证明这种分解方法在某些方面较其他现有分解方法具有明显优势[31] [32]。

需要强调的是，以往人们进行一维信号幅相求解和时频分析时，只需进行一维 Hilbert 变换即可(当然，变换前可能还要进行分解等其他操作处理)获得期望的复数形式，虽然很少谈及其中的条件，但却隐含使用了 Hilbert 变换得到复数信号时的理论(即 Bedrosian 定理) [2]。由于一维信号自由度少，相对简单，因而以往人们这样使用并没有造成不便。但是对于二维信号，正如 Jonathan 和 Sofia 在其工作中论述的那样[4]，维数的增加往往意味着一定概念和思想的突破。图像相对于一维信号增加了一个自由度后，既要考虑图像的自身结构特征和类型[37]-[43]，又要考虑二维 Hilbert 变换的种类(如后文所述的 6 种二维 Hilbert 变换)，同时还要考虑应用的目的(即需求和目标是什么)，其研究具有很大的挑战性。因此，二维 Bedrosian 定理在进行图像幅相求解、时频分析等应用时，必须进行充分的理论论证和相关的应用分析，即需要充分考虑图像结构类型、应用目的等各种因素，同时又要考虑二维 Hilbert 变换的不同种类。

本文从数学和信息学交叉的角度对二维 Bedrosian 定理进行阐述，包括方向 Bedrosian 定理、交叉象 Bedrosian 定理、单象 Bedrosian 定理、二象 Bedrosian 定理、四元 Bedrosian 定理以及单基解析 Bedrosian 定理等，从二维 Bedrosian 定理理论、二维 Bedrosian 定理的图像时频分析及分解应用等方面系统性进行介绍(如图 1 所示)，并对二维 Bedrosian 定理未来的研究工作和可能的方向进行展望。

2. 二维 Hilbert 变换及 Bedrosian 定理的核心问题

到目前为止，针对二维信号提出的几种 Hilbert 变换主要包括如下几种：

方向 Hilbert 变换(Partial Hilbert Transform, PHT) [7] [8]：其视二维信号的横向和纵向为不相关，处理方向性的图像效果明显较好[7] [8]，其他则较差。

单象 Hilbert 变换(Single Orthant Hilbert Transform, SOHT) [10]：将一维信号的卷积核进行直接扩展，应用于图像的卷积处理，将某些特定信号实现了±π 相移，在频域内保留了关于原点对称的两个象限信息，具备了“十”字形带限滤波器的作用，对于局部二维相关性强的图像分析效果有明显改善[10]。

交叉象 Hilbert 变换(Total Hilbert Transform，THT) [9]：克服方向 Hilbert 变换以及单象 Hilbert 变换的明显不足，增强特定信号分量能量，而抑制其它信号分量能量，可以说具备了一定的压缩冗余功效[9]。

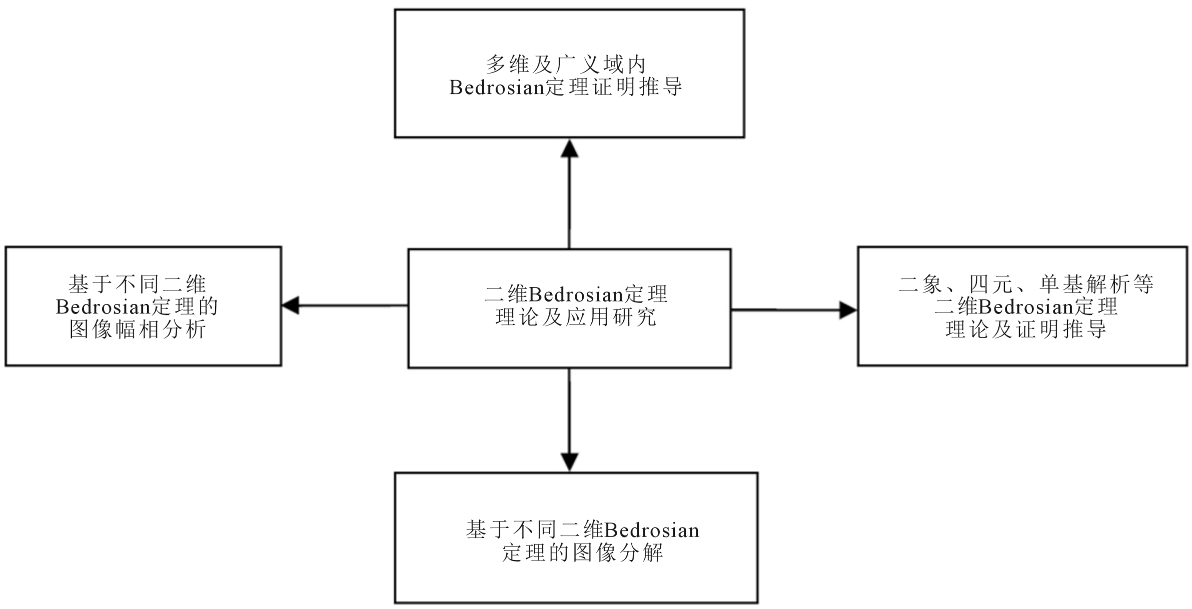


Figure 1. Different research aspects of bi-dimensional Bedrosian’s principle
图 1. 二维 Bedrosian 定理理论及应用研究的不同视角

四元 Hilbert 变换(Quaternionic Hilbert Transform, QHT) [11]：构造思想与单象 Hilbert 变换基本类似，明显不同的是采用较为复杂的四元 Fourier 变换或分析，从而获得了多元信号分析特性或超复数信号分析特性[11] [26] [27]。

单基解析变换[14]：采用矢量的形式，把 X、Y 方向 Hilbert 变换进行矢量组合，从而获得了具有良好特性的矢量 Hilbert 变换[14]。

二象 Hilbert 变换[12] [13]：为了继承 π/2 相移的优良特性等，采用交叉象 Hilbert 变换、单象 Hilbert 变换、方向 Hilbert 变换的非线性组合，集中优点，继承一维 Hilbert 变换的全部性质[12] [13]。

以上二维 Hilbert 变换具有各自不同的特性和适用范围(如表 1 和表 2 所示，不同二维 Hilbert 变换对于理想的正余弦信号变换结果是不同的)。

Table 1. Hilbert transform of different classical Sine/Cosine functions ($\omega_1, \omega_2 > 0$)
表 1. 几种典型正余弦信号的各种 Hilbert 变换($\omega_1, \omega_2 > 0$)

名称	函数	变换种类			
		H^x	H^y	H^T	H^{so1}
常数	A	0	0	0	0
x 的正弦	$\sin\omega_1 x$	$-\cos\omega_1 x$	0	0	$-\cos\omega_1 x$
y 的正弦	$\sin\omega_2 y$	0	$-\cos\omega_2 y$	0	$-\cos\omega_2 y$
x，y 的正弦	$\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$-\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$-\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$-\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$-2\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$
x，$-y$ 的正弦	$\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$-\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	0
x 的余弦	$\cos\omega_1 x$	$\sin\omega_1 x$	0	0	$\sin\omega_1 x$
y 的余弦	$\cos\omega_2 y$	0	$\sin\omega_2 y$	0	$\sin\omega_2 y$
x，y 的余弦	$\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$-\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$2\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$
x，$-y$ 的余弦	$\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$-\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	0

Table 2. Hilbert transform of different classical Sine/Cosine functions ($\omega_1, \omega_2 > 0$)
表 2. 几种典型正余弦信号的各种 Hilbert 变换($\omega_1, \omega_2 > 0$)

名称	函数	变换种类			
		H^{so2}	$H^{B(1,4)}$	$H^{B(1,2)}$	$H^{B(1,3)}$
常数	A	0	0	0	0
x 的正弦	$\sin\omega_1 x$	$\cos\omega_1 x$	$-\cos\omega_1 x$	$-\cos\omega_1 x$	$-\cos\omega_1 x$
y 的正弦	$\sin\omega_2 y$	$-\cos\omega_2 y$	$-\cos\omega_2 y$	$-\cos\omega_2 y$	$-\cos\omega_2 y$
x，y 的正弦	$\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	0	$-\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$-\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	0
x，$-y$ 的正弦	$\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$-\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	0
x 的余弦	$\cos\omega_1 x$	$-\sin\omega_1 x$	$\sin\omega_1 x$	$\sin\omega_1 x$	$\sin\omega_1 x$
y 的余弦	$\cos\omega_2 y$	$\sin\omega_2 y$	$\sin\omega_2 y$	$\sin\omega_2 y$	$\sin\omega_2 y$
x，y 的余弦	$\cos(\omega_1 x+\omega_2 y)$	0	$\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	$\sin(\omega_1 x+\omega_2 y)$	0
x，$-y$ 的余弦	$\cos(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$-2\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	$-\sin(\omega_1 x-\omega_2 y)$	0

综合考虑一维和二维(包含多维)信号及其对应的 Hilbert 变换，Bedrosian 定理需要解决三个核心问题：1) Bedrosian 定理理论形式的确定；2) Hilbert 变换中 Bedrosian 定理确定什么条件下的信号发生变化而其它信号不变；3) 信号发生变化的数学依据及变化形式(即产生了什么形式的复数和相移等)。

问题(1)在一维信号中较为简单，即两个或多个信号相乘的形式。但是，对于图像，由于自由度的增加，单纯信号相乘的形式已无法再满足图像的更多更复杂的需求，特别是四元信号和矢量信号形式下如何定义二维 Bedrosian 定理的形式值得探讨。问题(2)是在问题(1)解决的基础上进行结果分析，即找到何种信号在 Hilbert 变换后发生变化。问题(3)则是讨论信号发生变化的形式以及从数学和物理的角度探究其原因。问题(3)在一维信号中也相对简单，例如对于两个实数信号相乘的形式只有频率较高的信号发生了 π/2 相移，而另一信号不变，最终获得一个实数和一个复数相乘的形式。但是，对于图像，这个问题就变得较为复杂，需要人们不断地深入研究。

3. 二维 Bedrosian 定理理论研究现状

3.1. 当前现状

Venouziou 等人于 2008 年首次给出了多维 Bedrosian 定理(包含二维、三维以及更高维度)的一个数学表达式[24] (即方向 Hilbert 变换对应的 Bedrosian 定理，我们简称为方向 Bedrosian 定理)，其通过对多维空间进行一维 Bedrosian 定理(在每个一维空间中均作为一次一维操作处理)的多次组合获得多维 Bedrosian 定理的理论条件和表达形式。Venouziou 等学者普遍认为，要获得多维信号类似于一维函数那样的 Bedrosian 定理，可以通过分析不同维空间的一维 Bedrosian 定理进行讨论，把一维 Bedrosian 定理的理论条件在二维和多维空间内进行支撑范围的并集和交集等算子的运算。但是，Venouziou 等人的方向 Bedrosian 定理并没有从信号处理的角度进行深入分析，同时其也没有考虑多维信号(例如图像和视频)的特性[27] [28] [29] (包括纹理结构特性、统计特性、自然特性等)，因此对于方向相关的信号适应性比较差，且其纯粹考虑从数学角度对一维 Bedrosian 定理在二维和多维空间上的直接扩展。

文献[23]在 2011 年则从频域的角度分析和探讨复数信号，并对方向 Bedrosian 定理进行了深入了分析研究，且将其扩展到广义分数阶域内[23]，并且给出了详细的参数讨论，从信号处理角度(分数阶 Fourier 变换以及线性正则变换)对二维 Bedrosian 定理开展了详细的分析研究。同时，该作者还分析了交叉象 Hilbert 变换的 Bedrosian 定理(本文简称交叉象 Bedrosian 定理)，并给出了详细的应用及对应的参数、理论条件、表达形式等。但是，该理论也只适合于广义域内的方向不相关的二维图像，并不适合于其他类型的信号，且其在图像中的具体应用并没有详细深入地加以论证(详见定理 1~6)。

下面给出文献[23]中的二维广义 Bedrosian 定理部分结果。

定理 1：对于两个二维函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$ $(x,y\in\Re)$，且当 $|u|>a$ 时 $f_p(u,y)=0$，当 $|v|<b$ 时 $h_p(v,y)=0$，$b\ge a\ge 0$，$\alpha=\dfrac{p\pi}{2}$，令 $\overline{\overline{f}}(x,y)=f(x,y)\mathrm{e}^{i\frac{x^2}{2}\cot\alpha}$，那么

$$H_\alpha^x\left\{\overline{\overline{f}}(x,y)h(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(x,y)\cdot H_\alpha^x\left\{h(x,y)\right\}.$$

定理 2：对于两个二维函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)$ $(x,y\in\Re)$，且当 $|u|>a$ 时 $f_p(u,y)=0$，当 $|v|<b$ 时 $h_p(x,v)=0$，$b\ge a\ge 0$，$\beta=\dfrac{p\pi}{2}$，令 $\overline{\overline{f}}(x,y)=f(x,y)\mathrm{e}^{i\frac{y^2}{2}\cot\beta}$，那么

$$H_\beta^y\left\{\overline{\overline{f}}(x,y)h(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(x,y)\cdot H_\beta^y\left\{h(x,y)\right\}.$$

定理 3：对于两个二维函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)(x,y\in\Re)$，且当 $|u|>a_1$ 且 $|v|>b_1$ 时有 $f_{p_1,p_2}(u,v)=0$，当 $|w|<a_2$ 且 $|z|<b_2$ 时有 $h_{p_1,p_2}(w,z)=0$，同时有 $a_2\ge a_1\ge 0$ 和 $b_2\ge b_1\ge 0$ 成立，$\alpha=\frac{p_1\pi}{2}$，$\beta=\frac{p_2\pi}{2}$，令 $\overline{\overline{f}}(x,y)=\mathrm{e}^{i\frac{x^2}{2}\cot\alpha}f(x,y)\mathrm{e}^{i\frac{y^2}{2}\cot\beta}$，那么

$$H_{\alpha,\beta}^{x,y}\left\{\overline{\overline{f}}(x,y)h(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(x,y)\cdot H_{\alpha,\beta}^{x,y}\left\{h(x,y)\right\}.$$

定理 4：对于两个二维函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)(x,y\in\Re)$，且当 $u<-a$ 时 $f_p(u,y)=0$，当 $v<b$ 时 $h_p(v,y)=0$，$b\ge a\ge 0$，$\alpha=\frac{p\pi}{2}$，令 $\overline{\overline{f}}(x,y)=f(x,y)\mathrm{e}^{i\frac{x^2}{2}\cot\alpha}$，那么

$$H_{\alpha}^{x}\left\{\overline{\overline{f}}(x,y)h(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(x,y)\cdot H_{\alpha}^{x}\left\{h(x,y)\right\}.$$

定理 5：对于两个二维函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)(x,y\in\Re)$，且当 $u<-a$ 时 $f_p(u,y)=0$，当 $v<b$ 时 $h_p(x,v)=0$，$b\ge a\ge 0$，$\beta=\frac{p\pi}{2}$，令 $\overline{\overline{f}}(x,y)=f(x,y)\mathrm{e}^{i\frac{y^2}{2}\cot\beta}$，那么

$$H_{\beta}^{y}\left\{\overline{\overline{f}}(x,y)h(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(x,y)\cdot H_{\beta}^{y}\left\{h(x,y)\right\}.$$

定理 6：对于两个二维函数 $f(x,y)$ 和 $h(x,y)(x,y\in\Re)$，且当 $u<-a_1$ 且 $v<-b_1$ 时有 $f_{p_1,p_2}(u,v)=0$，当 $w<a_2$ 且 $z<b_2$ 时有 $h_{p_1,p_2}(w,z)=0$，同时有 $a_2\ge a_1\ge 0$ 和 $b_2\ge b_1\ge 0$ 成立，$\alpha=\frac{p_1\pi}{2}$，$\beta=\frac{p_2\pi}{2}$，令 $\overline{\overline{f}}(x,y)=\mathrm{e}^{i\frac{x^2}{2}\cot\alpha}f(x,y)\mathrm{e}^{i\frac{y^2}{2}\cot\beta}$，那么

$$H_{\alpha,\beta}^{x,y}\left\{\overline{\overline{f}}(x,y)h(x,y)\right\}=\overline{\overline{f}}(x,y)\cdot H_{\alpha,\beta}^{x,y}\left\{h(x,y)\right\}.$$

Table 3. The review of the bi-dimensional Bedrosian principle
表 3. 二维 Bedrosian 定理国内外研究现状

二维 Bedrosian 定理不同研究角度		Bedrosian 定理类型					
		方向 Bedrosian 定理	交叉象 Bedrosian 定理	单象 Bedrosian 定理	二象 Bedrosian 定理	四元 Bedrosian 定理	单基解析 Bedrosian 定理
传统域内 Bedrosian 定理理论研究		已有部分相关工作，比如文献[23] [24] [37]	已有部分相关工作，比如文献[23] [24]	已有部分相关工作，比如文献[24]	已有我们前期部分工作[38]	空白	空白
广义域内 Bedrosian 定理理论研究		已有我们前期部分工作[23] [25]	已有我们前期部分工作[23] [25]	空白	空白	空白	空白
应用研究	图像分解	已有我们前期部分工作[33]	已有我们前期部分工作[33]	空白	空白	空白	空白
应用研究	幅相时频分析	已有部分相关工作，比如文献[28]	已有部分相关工作，比如文献[29]	空白	空白	空白	空白
高维 Bedrosian 定理研究		已有部分相关工作，比如文献[24]	空白	空白	空白	空白	空白

为了使得二维 Bedrosian 定理能够在图像处理中获得较好的应用，一些学者[38]则从二维图像信号单分量和多分量定义的角度使用了二象 Hilbert 变换对应的 Bedrosian 定理(本文简称二象 Bedrosian 定理)，这是二维 Bedrosian 定理首次对图像进行应用的具体实例(详见文献[38])，其通过二象 Bedrosian 定理或者准则首次界定了二维单分量、多分量的定义和概念，为后续图像的分量分解以及分析提供了一定的理论依据。可惜的是，他们只是借鉴了二象 Bedrosian 定理给出的一般性概念，并没有给出二象 Bedrosian 定理在图像中的具体应用的理论条件，也没有给出二象 Bedrosian 定理相应的理论推导和详细证明，所以总体上停留在概念上。

随后，一些学者[37]于 2014 年又在 Venouziou 等人工作[24]的基础上进一步对多维(包括二维及以上的高维)方向 Bedrosian 定理进行研究，提升了 Venouziou 等人提出的多维方向 Bedrosian 定理的理论条件，更进一步地给出了较为完善的理论分析和证明，且将 Bedrosian 定理从实数相乘扩展到复数相乘等更为复杂的结构形式，进一步利用 Bedrosian 定理的等式关系构造出时频分析基函数，从而为图像的理论分析和应用提供了理论基础。可惜的是，这些学者与 Venouziou 等人工作一样，其理论对于具有方向相关性的图像适应性较差，且不是从图像处理角度而是纯粹从数学理论条件上加以探讨分析，且也没有给出在图像处理方面的具体应用实例及验证结果。同时，在一维信号分解思想的启发下[32]，其他学者[33]通过基于方向 Bedrosian 定理和交叉象 Bedrosian 定理的组合，从而对合成的标准图像分解进行分析，获得的分解性能在某些方面明显优于以往的图像分解方法[38]，同时也就揭示了二维 Bedrosian 定理在图像分解方面的可能的巨大潜力。必须强调的是，在理论和应用方面还有大量的工作需要不断地尝试和探索，包括对二维图像的幅相求解[34]及进一步的理论分析等。

总之，到目前为止也只有方向 Hilbert 变换及交叉象 Hilbert 变换有它们对应的二维 Bedrosian 定理等相关理论，其他的二维 Bedrosian 定理目前基本上是属于空白[23] [24] [25] [40] (国内外研究现状详见表 3)。而且方向 Bedrosian 定理及交叉象 Bedrosian 定理目前也只是一维 Bedrosian 定理在二维信号上的直接拓展，并没有考虑图像的结构属性。

3.2. 主要研究方向

不同二维 Bedrosian 定理理论推导及证明主要包含以下几个内容：

1) 二象 Bedrosian 定理理论推导与证明

根据二象 Hilbert 变换的构造方法和特性，我们拟把频域分为 9 个区域(四个半轴、原点再加上四个象限设为 9 个区域)，通过对这些区域进行不同组合获取标准和非标准二象 Bedrosian 定理，测试不同区域组合下二象 Bedrosian 定理的理论依据和物理意义、二象 Bedrosian 定理的适应范围等，并在时域内给出 Bedrosian 定理的数学理论分析。

2) 单象 Bedrosian 定理理论推导与证明

在充分分析方向 Bedrosian 定理和交叉象 Bedrosian 定理的基础上，构造单象 Bedrosian 定理理论形式，对方向 Bedrosian 定理和交叉象 Bedrosian 定理进行多种组合，来推导证明单象 Bedrosian 定理，并分析单象 Bedrosian 定理的特性和应用。

3) 四元 Bedrosian 定理理论推导与证明

对于四元信号，一是从时域四元数的特性出发，构造和推导证明四元 Bedrosian 定理。二是从四元 Fourier 变换域出发，通过不同的象限组合，构造不同的四元 Bedrosian 定理，测试不同象限组合下四元 Bedrosian 定理的特性和适用范围，并从四元解析分析的角度加以理论证明。

4) 单基解析 Bedrosian 定理理论推导与证明

从 Reisz 变换的特性出发，结合矢量信号的性质，开发由两个方向 Bedrosian 定理结合的单基解析

Bedrosian 定理。另外，尝试结合方向 Bedrosian 定理和单象 Bedrosian 定理来构造新的 Bedrosian 定理，并推导出新 Bedrosian 定理的理论表达，测试新 Bedrosian 定理对应的特性和适用范围。

5) 二维广义 Bedrosian 定理理论推导与证明

在二维分数阶 Fourier 变换域内进行二维广义 Bedrosian 定理的构造，给出相应的数学理论分析和推导证明，并解释相应的物理意义。

4. 二维 Bedrosian 定理应用研究现状

另一方面，基于一维 Bedrosian 定理的信号分解方法由于二维 Hilbert 变换的多样性和复杂性以及图像的多样性和复杂性的原因[5] [26] [27] [28] [29]，目前也没有在图像分解中获得大规模拓展性应用[38]-[43]。同时，对于图像的幅相分析，人们也无法像一维信号那样直观、简单地进行幅相估算(如后文中表 4 所示，直接应用二维 Hilbert 变换获取图像的幅度和相位时很多情况是不可行的)，而不得不开发其他更为复杂的、特定的或有针对性的方法(例如文献[29])，一般来讲这些方法普适性较差，制约了图像的时频分析。因此，二维 Bedrosian 定理的开发从图像时频分析的角度来讲也是迫切需要的(见文中表 4 及其相关分析)。

4.1. 图像分解

应用 Bedrosian 定理对图像进行分解，目前的文献报道并不多，主要包括文献[33] [41]等。核心思想：使用不同二维 Bedrosian 定理，只有满足一定频率条件的分量信号变成了复数，而其他分量信号保持不变，因此只要对图像信号多次进行嵌套应用 Bedrosian 定理，实现分量信号的差异性变化，从而根据分量信号的不同变化来区分和剥离不同分量。其所涉及的主要算法包括如下两种：

算法思路 1 [33] [41]：

1) 给定二维信号 B(根据需要给定，前期工作表明目前主要靠经验信息)和原图像 A 相乘，建立合成图像 C；

2) 对信号 B 依据交叉象 Bedrosian 定理进行交叉象 Hilbert 变换得到 π/2 相移信号 D，把 D 和原图像 A 相乘，建立合成图像 E；

3) 对信号 C 依据交叉象 Bedrosian 定理进行交叉象 Hilbert 变换后再与 D 相乘得到信号 F；

4) 对信号 D 依据交叉象 Bedrosian 定理进行交叉象 Hilbert 变换后再与 C 相乘得到信号 G；

5) 做差 H=F-G 即为 A 的一个分量 A1 的分解结果；

6) 令 A-A1=A，对 A 执行步骤[1] [2] [3] [4] [5]的操作，即可获得图像 A 的多分量分解结果。

算法思路 2 [33] [41]：

1) 原图像 A 依据方向 Bedrosian 定理进行方向 Hilbert 变换得到复数图像 B；

2) 信号 B 依据方向 Bedrosian 定理进行方向 Hilbert 变换得到复数图像 C；

3) C 的共轭与 B 相乘得到复数图像 D；

4) 对 D 进行 Fourier 变换后取低频分量，而后再把低频分量进行 Fourier 逆变换得到图像 E；

5) E 与 C 相乘得到图像 F，取 F 的实部即为 A 图像的一次分解结果；

6) 对 A 不断执行步骤[1] [2] [3] [4] [5]的操作，即可获得图像 A 的多分量分解结果。

从文献测试结果来看，两种算法具有不同的适应范围：算法 1 适合于具有剧烈频率变化的图像，而算法 2 适合于频率变化相对缓慢的图像(见图 2 结果比对)。前期结果表明，只要根据需要确定好二维信号 B，通过 Bedrosian 定理很有希望找到合适的参量，实现自适应的精细分解。但是，需要测试的工作尚还有很多。

4.2. 图像幅相分析

幅相分析一直是信号处理领域的基础性工作之一，在一维信号中，应用一维 Bedrosian 定理为幅度求解、相位分析、频率分析等提供了简洁明了、直接有力的方式，可以充分利用实数复数转换过程的性质，为后续处理提供一种有效的时频分析工具。借助于一维 Bedrosian 定理的幅度求解、相位分析、频率分析等基本思路，针对不同的二维 Bedrosian 定理，有些学者[41]在工作中进行了理想情况下不同纹理相乘时直接进行 Hilbert 变换获得的结果，如表 4 所示，有很多情况是失败的(如表 4 最后一行的环形结构图像，无法产生任何有意义的相移形式，也就是说，在二维信号中不能再像一维信号那样直接进行 Hilbert 变换就可以实现幅相分析)，因此需要我们从新的角度定义二维 Bedrosian 定理的理论形式并进行相关理论及应用研究。前期工作主要思路包括以下几种[26] [28] [29] [41]：

4.2.1. 一维思路直接拓展

二象 Bedrosian 定理来源于二象 Hilbert 变换，由于二象 Hilbert 变换继承了一维 Hilbert 变换所具有的相移特性、信号变换后频谱幅度不变、信号两次变换反号和四次变换复原以及齐次、缩放和卷积特性等。利用上述特性，可以直接对二维信号借助于一维 Bedrosian 定理的幅度求解、相位分析、频率分析等基本思路，即对复数信号直接取绝对值获取幅度，然后应用幅相分离技术取对数获取相位，进而微分获得频率(表 2 中部分结果就是这种思路)。

4.2.2. 组合思路

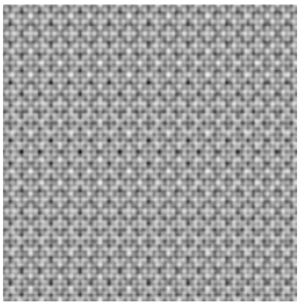
单象 Bedrosian 定理可以看做是方向 Bedrosian 定理和交叉象 Bedrosian 定理的线性组合，因此，在充分分析方向 Bedrosian 定理和交叉象 Bedrosian 定理的基础上，根据它们的组合性质进行幅度、相位以及频率信息的分析，用于后续图像处理。

同理，四元 Bedrosian 定理在时域内可看作是方向 Bedrosian 定理和单象 Bedrosian 定理的四元线性组合，在频域内则是四元 Fourier 变换的单象限的某种构造。我们从时域四元数的特性出发，应用四元 Bedrosian 定理分析图像信号的四元幅度、相位以及频率等信息。不同的是，四元数幅度虽然只有一个，但是，相位却有三个。其中一个相位的大小可以用来在不同方向上体现各信号分量的能量分布。对于可分离信号，该相位是内部维数的判据，不同的相位值与不同结构模式相对应，因此我们称该相位为模式相位。第二个相位可以体现在特定模式下(即第一个相位值确定后)的横向相位，因此称第二个相位为模式内横向相位。第三个相位体现了在特定模式下(即第一个相位值确定后)的纵向相位，因此称第三个相位为模式内纵向相位。三种不同的相位对应三种不同的频率，因此四元 Bedrosian 定理对于信号的时频分析具有更多的自由度，因此会带来更多的特性，前期初步工作也证明了这一点。后期将在此基础上开发更多的特性用于图像幅相分析和特征提取。

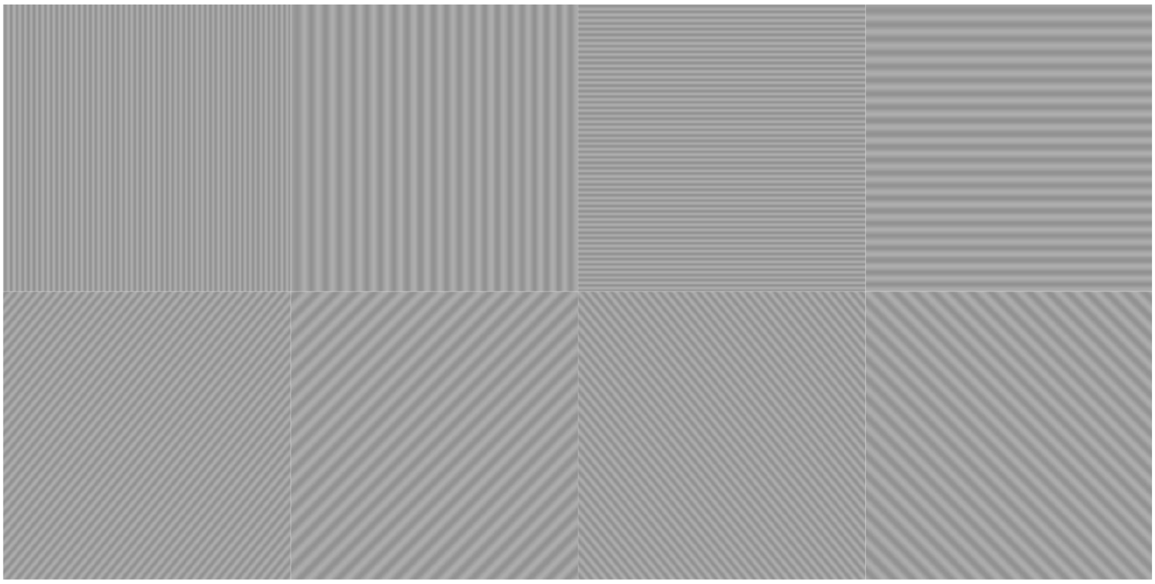
4.2.3. 矢量思路

单基解析 Bedrosian 定理是一维 Reisz 变换在二维和多维空间的拓展，可看作是把图像信号从一个标量变换到一个矢量的过程。矢量信号不仅具备大小，而且具备方向特征，因此应用单基解析 Bedrosian 定理可以说是一次相位分析的突破，即相位信息引入了方向。通过单基解析 Bedrosian 定理，我们可以获取标量信号的矢量幅度、矢量相位以及矢量频率等信息，用于多自由度的图像分析与处理，包括对纹理分析、图像分割、特征提取等多角度、全方位的测试。

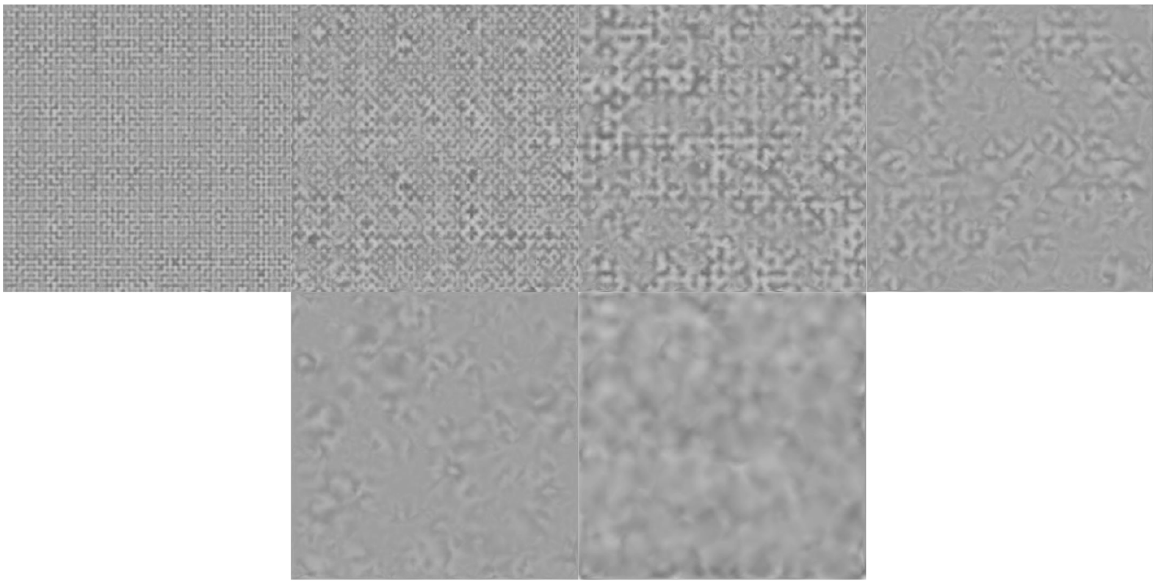
从初步的工作来看，上述几种思路各有优缺点，有的简单、方便，有的稍微复杂，适用于不同类型的图像。这方面需要进行大量的测试工作，总结出各种方法所适用的类型，并在此基础上开发新的方法。



(a)



(b)



(c)

Figure 2. The image decomposition comparison between Bedrosian principle and BEMD
图 2. 基于 Bedrosian 定理的图像分解与 BEMD 方法分解比对。(a) 八分量原始图像(512 × 512)；(b) 基于 Bedrosian 定理的图像分解结果；(c)基于 BEMD [38]的分解结果

Table 4. The phase shift form of different bi-dimensional Hilbert transform for the different texture images
表 4. 不同纹理图像相乘时不同二维 Hilbert 变换对应的信号相移结果

	发生 π/2 相移的图像形式	几种不同二维 Hilbert 变换						
		X 方向 Hilbert 变换	Y 方向 Hilbert 变换	二象 Hilbert 变换	单象 Hilbert 变换	交叉象 Hilbert 变换	四元 Hilbert 变换	单基解析信号变换
不同结构性纹理（方向和频率不同）相乘的图像形式	×		failure		failure	failure	failure	failure
	×			failure	failure	failure	failure	failure
	×				failure	failure	failure	failure
	×				failure	failure	failure	failure
	×			failure	failure	failure	failure	failure
	×	failure			failure	failure	failure	failure
	×				failure	failure	failure	failure
	×				failure	failure	failure	failure
	×			,	,	,	failure	failure
	×			,	,	,	failure	failure
	×				failure	failure	failure	failure
	×			failure	failure	failure	failure	failure
	×			,	,	,	failure	failure
	×			,	,	,	failure	failure
	×			failure	failure	failure	failure	failure
	×				failure	failure	failure	failure
	×	failure	failure	failure	failure	failure	failure	failure

5. 结论及未来工作展望

Bedrosian 定理是数学和信息科学交叉领域的基础性理论之一，它决定了 Hilbert 变换的结果形式，对于信号幅相及时频分析均具有重要的理论意义和应用价值。本文针对方向 Bedrosian 定理、交叉象

Bedrosian 定理、单象 Bedrosian 定理、二象 Bedrosian 定理、四元 Bedrosian 定理以及单基解析 Bedrosian 定理等进行了分析介绍，并阐释它们对应的物理意义。在此基础上，介绍了二维 Bedrosian 定理应用于图像的幅相分析和图像分解的情况。

通过对前人工作的分析，我们发现，以往工作在分析二维 Bedrosian 定理时，其最大的问题是没有充分地考虑图像结构特性，或者只是形式上的模仿，或者只是简单地将图像认为是两类一维信号的叠加，因此不能涵盖图像所有方向上的特征。未来，二维 Bedrosian 定理的可能研究方向主要包括如下几个内容：

1) 如何找到不同类型二维 Bedrosian 定理的数学理论依据，特别是相对复杂的四元 Bedrosian 定理和单基解析 Bedrosian 定理的数学理论依据；

2) 如何给出不同类型二维 Bedrosian 定理的物理意义的阐释，特别是从信息角度对于不同特征信号的响应特性的机理阐释；

3) 系统性地给出不同 Bedrosian 定理幅相分析的主要应用范围；

4) 系统性地给出基于二维 Bedrosian 定理的图像分解的物理机制阐释以及图像分解的适用范围。

致　谢

论文工作得到国家自然科学基金项目(61471412, 61771020, 61273262)的支持。

参考文献

[1] Gabor, D. (1946) Theory of communication. *Proceedings of the Institute of Electrical Engineers*, **93**, 429-457.

[2] Venkitaraman, A. and Sekhar Seelamantula, C. (2012) A Technique to Compute Smooth Amplitude, Phase, and Frequency Modulations From the Analytic Signal. *IEEE Signal Processing Letters*, **19**, 623-626. https://doi.org/10.1109/LSP.2012.2209872

[3] Boashash, B. (1992) Estimating and Interpreting the Instantaneous Frequency of a Signal-Part 1: Fundamentals. *Proceedings of the IEEE*, **80**, 520-539. https://doi.org/10.1109/5.135376

[4] Lilly, J.M. and Olhede, S.C. (2009) Bivariate Instantaneous Frequency and Bandwidth. Statistics Science Research Report 299. http://arxiv.org/abs/0902.4111v1

[5] Zhang, X.D. (2002) Modern Signal Processing. Qinghua Press, Peking, 1-31, 349-492.

[6] Boashash, B. (1990) Time Frequency Signal Analysis. In: Haykin, S., Ed., *Advanced in Spectral Analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 35-120.

[7] Stark, H. (1971) An Extension of the Hilbert Transform Product Theorm. *Proceedings of the IEEE*, **59**, 1359-1360. https://doi.org/10.1109/PROC.1971.8420

[8] Bedrosian, E. (1963) A Product Theorem for Hilbert Transforms. *Proceedings of the IEEE*, **51**, 868-869. https://doi.org/10.1109/PROC.1963.2308

[9] Havlicek, J.P., Havlicek, J.W., Mamuya, N.D. and Bovik, A.C. (1998) Skewed 2D Hilbert Transforms and Computed AM-FM Models. *IEEE International Conference on Image Processing*, **59**, 602-606. https://doi.org/10.1109/ICIP.1998.723573

[10] Hahn, S.L. (1992) Multidimensional Complex Signals with Single-Orthant Spectra. *Proceedings of the IEEE*, **80**, 1287-1300. https://doi.org/10.1109/5.158601

[11] Thomas, B. and Gerald, S. (2001) Hypercomplex Signals—A Novel Extension of the Analytic Signal to the Multidimensional Case. *IEEE Transaction on Signal Processing*, **49**, 2844-2852. https://doi.org/10.1109/78.960432

[12] 徐冠雷, 王孝通, 徐晓刚. 二象 Hilbert 变换[J]. 自然科学进展, 2007, 17(8): 1120-1129.

[13] Xu, G., Wang, X. and Xu, X. (2008) Extended Hilbert Transform for Multidimensional Signals. 5*th International Conference on Visual Information Engineering*, Xi'an, 29 July-1 August 2008, 292-297. https://doi.org/10.1049/cp:20080325

[14] Felsberg, M. and Sommer, G. (2001) The Monogenic Signal. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **49**, 3136-3144. https://doi.org/10.1109/78.969520

[15] Brown, J.L. (1986) A Hilbert Transform Product Theorem. *Proceedings of the IEEE*, **74**, 520-521. https://doi.org/10.1109/PROC.1986.13495

[16] Brown, J.L. (1974) Analytic Signals and Product Theorems for Hilbert Transforms. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, **21**, 790-792. https://doi.org/10.1109/TCS.1974.1083928

[17] Yang, L.H. and Zhang, H.Z. (2008) The Bedrosian Identity for LP Functions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **345**, 975-984.

[18] Xu, Y. and Yan, D. (2006) The Bedrosian Identity for the Hilbert Transform of Product Functions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **134**, 2719-2728. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-06-08315-8

[19] Silei, W. (2009) Simple Proofs of the Bedrosian Equality for the Hilbert Transform. *Science in China* (*Series A*: *Mathematics*), **52**, 507-510. https://doi.org/10.1007/s11425-009-0001-2

[20] Tan, L., Shen, L. and Yang, L. (2010) Rational Orthogonal Bases Satisfying the Bedrosian Identity. *Advances in Computational Mathematics*, **33**, 285-303. https://doi.org/10.1007/s10444-009-9133-8

[21] Chen, Q. and Micchelli, C.A. (2012) The Bedrosian Identity for Functions Analytic in a Neighborhood of the Unit Circle. *Complex Analysis and Operator Theory*, **6**, 781-798. https://doi.org/10.1007/s11785-011-0181-y

[22] Fu, Y.X. and Li, L.Q. (2006) A Generalized Bedrosian Theorem in Fractional Fourier Domain. *International Conference on Computational Intelligence and Security*, Guangzhou, 3-6 November 2006, 1785-1788.

[23] 徐冠雷, 王孝通, 徐晓刚, 分数阶 Fourier 域的二维广义 Hilbert 变换及 Bedrosian 定理[J]. 数学物理学报, 2011, 31A(3): 814-828.

[24] Venouziou, M. and Zhang, H. (2008) Characterizing the Hilbert Transform by the Bedrosian Theorem. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **338**, 1477-1481. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.05.067

[25] Xu, G., Wang, X. and Xu, X. (2009) Generalized Hilbert Transform and Its Properties in 2D LCT Domain. *Signal Processing*, **89**, 1395-1402. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.01.009

[26] Chang, J.H., Pei, S.C. and Ding, J.J. (2004) 2D Quaternion Fourier Spectral Analysis and Its Applications. *IEEE Proceedings of the International Symposium on Circuits and Systems*, **3**, 241-244.

[27] Tao, R., Deng, B. and Wang, Y. (2009) Theory and Application of the Fractional Fourier Transform. Tsinghua University Press, Beijing.

[28] Francos, J.M. and Friedlander, B. (1999) Parameter Estimation of 2-D Random Amplitude Polynomial-Phase Signals. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **47**, 1795-1810. https://doi.org/10.1109/78.771030

[29] Murray, V., Rodríguez, P. and Pattichis, M.S. (2010) Multiscale AM-FM Demodulation and Image Reconstruction Methods with Improved Accuracy. *IEEE Transactions on Image Processing*, **19**, 1138-1152. https://doi.org/10.1109/TIP.2010.2040446

[30] Xu, G., Wang, X. and Xu, X. (2009) Time-Varying Frequency-Shifting Signal Assisted Empirical Mode Decomposition Method for AM-FM Signals. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **23**, 2458-2469. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2009.06.006

[31] Chen, G. and Wang, Z. (2012) A Signal Decomposition Theorem with Hilbert Transform and Its Application to Narrowband Time Series with Closely Spaced Frequency Components. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **28**, 258-279. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.02.002

[32] Xu, G., Wang, X., Xu, X., Zhou, L. and Shao, L. (2013) Time-Varying Bandpass Filter Based on Assisted Signals for AM-FM Signal Separation: A Revisit. *Journal of Signal and Information Processing*, **4**, 229-242. https://doi.org/10.4236/jsip.2013.43031

[33] X. Guanlei, W. Xiaotong, X. Xiaogang, Hu jiang, Li Binyu [J]. The Bi-Dimensional Bedrosian's Principle for Image Decomposition. *Applied Mechanics and Materials*, **602-605**, 3854-3858.

[34] Xu, G., Wang, X., Xu, X. and Shao, L. (2014) Amplitude and Phase Analysis Based on Signed Demodulation for AM-FM Signals. *Journal of Computer and Communications*, **2**, 87-92. https://doi.org/10.4236/jcc.2014.29012

[35] Xu, G., Wang, X., Xu, X., *et al.* (2014) Generalized Uncertainty Principles Associated with Hilbert Transform. *Signal Image and Video Processing*, **8**, 279-285. https://doi.org/10.1007/s11760-013-0547-x

[36] Cerejeiras, P., Chen, Q. and Kaehler, U. (2012) Bedrosian Identity in Blaschke Product Case. *Complex Analysis and Operator Theory*, **6**, 275-300. https://doi.org/10.1007/s11785-010-0092-3

[37] Zhang, H. (2014) Multidimensional Analytic Signals and the Bedrosian Identity. *Integral Equations and Operator Theory*, **78**, 301-321. https://doi.org/10.1007/s00020-013-2120-y

[38] Xu, G., Wang, X. and Xu, X. (2012) On Analysis of Bi-Dimensional Component Decomposition via BEMD. *Pattern Recognition*, **45**, 1617-1626. https://doi.org/10.1016/j.patcog.2011.11.004

[39] 王孝通, 徐冠雷, 周立佳, 邵利民, 徐晓刚. 广义测不准原理理论研究[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 421-434.

[40] 徐晓刚, 徐冠雷, 王孝通, 秦旭佳, 王建国, 易成涛. 多维 Hilbert 变换研究[J]. 通信技术, 2016, 49(10):

1265-1270.

[41] Xu, G., Wang, X., Zhou, L. and Xu, X. (2018) Image Decomposition and Texture Analysis via Combined Bi-Dimensional Bedrosian's Principles. *IET Image Processing*, **12**, 262-273.

[42] 徐冠雷, 王孝通, 周立佳, 邵利民, 刘永禄, 徐晓刚. 广义测不准原理中的数学问题研究[J]. 应用数学进展, 2016, 5(3): 536-559.

[43] Xu, G., Wang, X., Xu, X. and Zhou, L. (2016) Entropic Inequalities on Sparse Representation. *IET Signal Processing*, **10**, 413-421. https://doi.org/10.1049/iet-spr.2014.0072