Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2019, 8(3), 473-480
Published Online March 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2019.83053

Hans汉斯

Oscillation of a Class of Third Order Semi-Linear Neutral Delay Differential Equations

Simin Wu, Jingjie Lin*, Quandi Li, Quanwen Lin

Department of Mathematics and Applied Mathematics, School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong

Email: *541447640@qq.com

Received: Feb. 21st, 2019; accepted: Mar. 7th, 2019; published: Mar. 14th, 2019

Abstract

The oscillations of a class of neutral third order semi-linear differential equations are studied. Different functions and classical inequalities are constructed by using Riccati transformation techniques. Some new oscillatory theories of this kind of differential equations are established. The conclusions generalize and improve the relevant results in the literature, and illustrate the application of the new oscillatory conclusions with examples.

Keywords

Third-Order Neutral Differential Equation, Semi-Linear, Oscillation, Riccati Transformation

一类三阶半线性中立型时滞微分方程的振动性

伍思敏，林靖杰*，李全娣，林全文

广东石油化工学院理学院数学与应用数学系，广东 茂名

Email: *541447640@qq.com

收稿日期：2019年2月21日；录用日期：2019年3月7日；发布日期：2019年3月14日

摘 要

研究了一类中立型的三阶半线性微分方程的振动性，应用Riccati变换技巧构造不同的函数和经典不等式等方法，建立该类微分方程的一些新的振动性理论，所得结论推广和改进了文献中的相关结果，并举例

*通讯作者。

文章引用: 伍思敏, 林靖杰, 李全娣, 林全文. 一类三阶半线性中立型时滞微分方程的振动性[J]. 应用数学进展, 2019, 8(3): 473-480. DOI: 10.12677/aam.2019.83053

来阐述新的振动性结论的应用。

关键词

三阶中立型微分方程，半线性，振动性，Riccati变换

1. 引言

考虑如下的一类三阶半线性中立型时滞微分方程

$$\left[r(t)\left|Z''(t)\right|^{\alpha-1}Z''(t)\right]'+q(t)\left|x(\sigma(t))\right|^{\beta-1}x(\sigma(t))=0,\ t\ge t_0>0,\ \beta>\alpha. \tag{E}$$

的振动性。其中 $Z(t)=x(t)+p(t)x(\tau(t))$，$\beta>0,\alpha>0$，α,β 为两个正奇整数之比。

假设下列条件成立

(A_1) $p(t),q(t)\in C([t_0,\infty),(0,\infty)),0\le p(t)\le p<1,q(t)>0$；

(A_2) $r(t)\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty)),r(t)\ge 0,r'(t)\ge 0,\int_{t_0}^{\infty}r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s\le+\infty$；

(A_3) $\tau(t),\sigma(t)\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，对每一 $t\ge t_0$，都有 $\tau(t)\le t,\sigma(t)\le t$，

$$\sigma(t)>0,\sigma'(t)>0,\lim_{t\to\infty}\tau(t)=\lim_{t\to\infty}\sigma(t)=\infty.$$

按照习惯，方程(E)的解称为振动的，如果它有任意大的零点；否则称其为非振动的.若方程(E)的所有解都是振动的，则称方程(E)是振动的；否则称其为非振动的[1]。

文[2] [3] [4]对二阶半线性中立型微分方程

$$\left(r(t)\left|Z'(t)\right|^{\alpha-1}Z'(t)\right)'+q(t)\left|x(\sigma(t))\right|^{\beta-1}x(\sigma(t))=0. \tag{1.1}$$

做了深入研究，给出一些新的振动准则。最近几年，三阶半线性微分方程的振动性研究开始受到关注，但是其振动性研究成果还比较少，如文[1]、[5]-[14]。2017 年惠远先等人在限制 $\int_{t_0}^{\infty}r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s=+\infty$ 的条件下，建立了保证方程(E)的所有解振动或者收敛到零的若干新的振动准则。

在文[2]、[14]工作的启发下，应用 Riccati 变换和经典不等式等技巧，建立了方程(E)在条件 $\int_{t_0}^{\infty}r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s\le+\infty$ 下 $\beta>\alpha,\beta<\alpha,\beta=\alpha$ 的考虑 $\beta>\alpha$。情形新的振动性结论，我们的结果推广和改进了文献中的一些结果，并给出例子说明主要结果的应用性。

2. 引理

引理 2.1 [14] 若 $x(t)$ 是方程(E)的最终正解，则 $Z(t)$ 只有下列两种可能，即存在 $T\ge t_0$，使得当 $t\ge T$ 时，有

$$(A)\quad Z(t)>0, Z'(t)>0, Z''(t)>0.$$

$$(B)\quad Z(t)>0, Z'(t)<0, Z''(t)>0.$$

引理 2.2 [15] 若存在 $A>0$，$B>0$，且 $\alpha>0$，则 $Bu-Au^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \le \frac{\alpha^{\alpha}}{(\alpha+1)^{\alpha+1}}\frac{B^{\alpha+1}}{A^{\alpha}}$。

引理 2.3 [16] 设 $u(t)>0, u'(t)>0, u''(t)\le 0, t\ge t_0$，则对任一 $\theta\in(0,1)$，存在 $T_\theta \ge t_0$，使得

$$u(\sigma(t)) \ge \theta\frac{\sigma(t)}{t}u(t),\quad t\ge T_\theta$$

引理 2.4 [6] 设 $u(t)>0, u'(t)>0, u''(t)>0, u'''(t)\le 0, t\ge T_\theta$，则存在 $\gamma\in(0,1)$ 和 $T_\gamma \ge T_\theta$，使得

$$u(t)\ge \gamma t u'(t),\quad t\ge T_\gamma$$

引理 2.5 [14] 设 $x(t)$ 是方程(E)的最终正解，且 $Z(t)$ 满足(B)，若

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\int_{u}^{\infty}\left(\frac{1}{r(v)}\int_{v}^{\infty}q(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=+\infty. \tag{2.1}$$

则 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$。

3. 主要结果

为了利用 Philos 型积分平均技巧，为此引用如下一类函数 F

令 $D=\{(t,s)|t\ge s\ge t_0\}$，$D_0=\{(t,s)|t>s\ge t_0\}$。

称函数 $H(t,s)\in C(D,R)$ 属于 F 类，记作 $H(t,s)\in F$，如果

i) $H(t,t)=0, t\ge t_0; H(t,s)>0, (t,s)\in D_0$

ii) $\frac{\partial H(t,t)}{\partial s}=0, t\ge t_0; \frac{\partial H(t,s)}{\partial s}\le 0, (t,s)\in D$

且在 D 上连续，存在函数 $h\in C(D_0,R), \rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，满足

$$\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}+A_1(t)H(t,s)=-h(t,s)H^{\frac{k}{k+1}}(t,s),\ k=\min\{\alpha,\beta\}.$$

使用记号：对于 $\rho,\sigma\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，令

$$A_1(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)},\quad A_2(t)=q(t)(1-p)^{\alpha},\quad A_3(t)=q(t)(1-p)^{\beta},\quad A(t)=q(t)\left[(1-p)\frac{\gamma\theta\sigma^2(t)}{t}\right]^{\beta},$$

$$\varphi(t)=\int_t^{\infty}r^{-\frac{1}{\alpha}}(s)\mathrm{d}s,\quad R(t)=r^{\frac{\alpha+1-\beta}{\alpha}}(t),\quad L=\frac{1}{(Z'(T))^{\beta-\alpha}},\quad M=\frac{1}{(Z''(T))^{\frac{\alpha}{\beta}-1}},\ T\text{ 充分大。}$$

定理 3.1 若存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，满足 $A_1(t)>0$ 和(2.1)式，且

$$\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^{t}\left[\rho(s)A(s)-L\rho(s)r(s)\left(\frac{A_1(s)}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\right]\mathrm{d}s=+\infty. \tag{3.1}$$

则方程(E)的解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to 0$。

证明 设方程(E)有非振动解 $x(t)$，由于 $x(t)=0$ 无实际意义，所以我们只考虑 $x(t)\neq 0$ 的情形。不失一般性，不妨设 $x(t)$ 是方程(E)的最终正解，且 $x(\sigma(t))>0, x(\tau(t))>0, t\geq t_1\geq t_0$。由引理 2.1 可知，存在 $t_2>t_1$，使当 $t\geq t_2$ 时，$Z(t)$ 可能为(A)型或(B)型。

若 $Z(t)$ 为(A)型，即 $Z(t)>0, Z'(t)>0, Z''(t)>0$。

由于 $x(t)\leq Z(t)$，所以 $x(\tau(t))\leq Z(\tau(t))$，于是有

$$x(t)=Z(t)-p(t)x(\tau(t))\geq Z(t)-p(t)Z(\tau(t))$$

又因为 $Z'(t)>0, \tau(t)\leq t$，所以 $Z(t)\geq Z(\tau(t))$，从而有

$$x(t)\geq(1-p(t))Z(t)\geq(1-p)Z(t) \tag{3.2}$$

由(3.2)和方程(E)可得

$$\left(r(t)\left(Z''(t)\right)^{\alpha}\right)'=-q(t)x^{\beta}(\sigma(t))\leq -q(t)(1-p)^{\beta}Z^{\beta}(\sigma(t)). \tag{3.3}$$

考虑 Riccati 变换

$$W(t)=\rho(t)r(t)\frac{\left(Z''(t)\right)^{\alpha}}{\left(Z'(t)\right)^{\beta}}>0,\quad t\geq t_2 \tag{3.4}$$

(3.4)式两边对 t 进行求导，并利用(3.3)，(3.4)得

$$\begin{aligned}W'(t)&=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)+\rho(t)\left(\frac{r(t)\left(Z''(t)\right)^{\alpha}}{\left(Z'(t)\right)^{\beta}}\right)'\\&=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)+\rho(t)\frac{\left(r(t)\left(Z''(t)\right)^{\alpha}\right)'}{\left(Z'(t)\right)^{\beta}}-\beta\rho(t)r(t)\frac{\left(Z''(t)\right)^{\alpha+1}}{\left(Z'(t)\right)^{\beta+1}}\\&\leq\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}W(t)-\rho(t)q(t)(1-p)^{\beta}\frac{Z^{\beta}(\sigma(t))}{\left(Z'(t)\right)^{\beta}}-\beta\frac{\left(Z'(t)\right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}W^{1+\frac{1}{\alpha}}(t).\end{aligned} \tag{3.5}$$

由(A_2)可知 $r(t)\geq 0, r'(t)\geq 0$，故易知 $Z'''(t)\leq 0$。

由引理 2.3，令 $u(t)=Z'(t)$，对任一 $\theta\in(0,1)$，存在 $T_\theta\geq t_0$，使得

$$\frac{1}{Z'(t)}\geq\theta\frac{\sigma(t)}{t}\frac{1}{Z'(\sigma(t))},\quad t\geq T_\theta \tag{3.6}$$

由引理 2.4，存在 $\gamma\in(0,1)$ 和 $T_\gamma\geq T_\theta$，使得

$$Z(\sigma(t))\geq\gamma\sigma(t)Z'(\sigma(t)),\quad t\geq T\gamma \tag{3.7}$$

利用引理 2.2，取 $B=\dfrac{\rho'(t)}{\rho(t)}>0$，$A=\beta\dfrac{\left(Z'(t)\right)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\left(\rho(t)r(t)\right)^{\frac{1}{\alpha}}}>0$，$u=W(t)$，

则有

$$Bu - Au^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \le \left(\frac{A_1(t)}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} \frac{\rho(t)r(t)}{\left(Z'(t)\right)^{\beta-\alpha}}. \tag{3.8}$$

取 $T=\max\{t_2,t_\gamma\}$，由于 $\frac{1}{Z'(t)}$ 单调递减，所以当 $t\ge T$ 时，有 $\frac{1}{Z'(t)} \le \frac{1}{Z'(T)}$。又因为 $\beta>\alpha$，于是有 $\left(\frac{1}{Z'(t)}\right)^{\beta-\alpha} \le \left(\frac{1}{Z'(T)}\right)^{\beta-\alpha} = L$。

联结式(3.6)，(3.7)和(3.8)，有

$$W'(t) \le -\rho(t)A(t) + L\rho(t)r(t)\left(\frac{A_1(t)}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}. \tag{3.9}$$

对(3.9)式两边同时从 T 到 t 进行积分，得

$$W(t) \le W(T) - \int_T^t \left[\rho(s)A(s) - L\rho(s)r(s)\left(\frac{A_1(s)}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\right]\mathrm{d}s.$$

令 $t\to\infty$，根据(3.1)式，则 $W(t)\to-\infty$，这与 $W(t)>0$ 矛盾，故假设不成立，即 $x(t)$ 是方程(E)的振动解。

若 $Z(t)$ 满足(B)型，由于(2.1)式成立，故由引理 2.5 可得 $\lim_{t\to\infty} x(t)=0$。证毕。

定理 3.2 若存在函数 $\rho\in C^1([t_0,\infty),(0,\infty))$，使(2.1)式成立，且满足

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t \left(\gamma\sigma(s)\right)^\beta A_3(s)\,\mathrm{d}s = \infty. \tag{3.10}$$

则方程(E)的解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to 0$。

证明 设方程(E)有非振动解 $x(t)$，如同定理 3.1 的证明，若 $Z(t)$ 为(A)型，即 $Z(t)>0, Z'(t)>0, Z''(t)>0$，则(3.3)式成立，

定义广义 Riccati 函数

$$W_1(t) = r(t)\frac{\left(Z''(t)\right)^\alpha}{\left(Z'(\sigma(t))\right)^\beta} > 0,\quad t\ge t_2 \tag{3.11}$$

在(3.11)式两边对 t 进行求导，并利用(3.3)式得

$$\begin{aligned} W_1'(t) &= \frac{\left(r(t)\left(Z''(t)\right)^\alpha\right)'}{\left(Z'(\sigma(t))\right)^\beta} - \beta\frac{r(t)\left(Z''(t)\right)^\alpha Z''(\sigma(t))\sigma'(t)}{\left(Z'(\sigma(t))\right)^{\beta+1}} \\ &\le -A_3(t)\left(\frac{Z(\sigma(t))}{Z'(\sigma(t))}\right)^\beta - \beta\frac{r(t)\left(Z''(t)\right)^\alpha Z''(\sigma(t))\sigma'(t)}{\left(Z'(\sigma(t))\right)^{\beta+1}} \\ &\le -A_3(t)\left(\frac{Z(\sigma(t))}{Z'(\sigma(t))}\right)^\beta. \end{aligned} \tag{3.12}$$

由于 $Z(\sigma(t)) \ge \gamma\sigma(t)Z'(\sigma(t)), t\ge T\gamma$，于是 $\left(\frac{Z(\sigma(t))}{Z'(\sigma(t))}\right)^\beta \ge \left(\gamma\sigma(t)\right)^\beta$，

取 $T=\max\{t_2,T_\gamma\}$，使当 $t\ge T$ 时，(3.12)式变成

$$W_1'(t)\le-\big(\gamma\sigma(t)\big)^{\beta}A_3(t). \tag{3.13}$$

对(3.13)式从 T 到 t 进行积分得

$$W_1(t)\le W_1(T)-\int_T^t\big(\gamma\sigma(s)\big)^{\beta}A_3(s)\mathrm{d}s.$$

令 $t\to\infty$，则 $W_1(t)\to-\infty$，这与 $W_1(t)>0$ 矛盾，故假设不成立，即 $x(t)$ 是方程(E)的振动解。

若 $Z(t)$ 满足(B)型，由于(2.1)式成立，故由引理 2.5 可得 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=0$。证毕。

推论 3.3 若存在函数 $H(t,s)\in F$ 和 $\rho\in C^1\big([t_0,\infty),(0,\infty)\big)$，使得(2.1)式成立，且满足

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,t_0)}\int_{t_0}^t\left[H(t,s)\rho(s)A(s)-L\rho(s)r(s)\left(\frac{|h(t,s)|}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\right]\mathrm{d}s=+\infty. \tag{3.14}$$

则方程(E)的每一解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty, x(t)\to 0$。

证明 设方程(E)有非振动解 $x(t)$，如同定理 3.1 的证明，若 $Z(t)$ 为(A)型，定义 Riccati 变换中的函数 $W(t)$ 如同(3.4)式，则 $W(t)>0$ 且(3.5)式成立。

对(3.5)式两边同时乘以 $H(t,s)$，并从 t_2 到 t 积分得

$$\begin{aligned}
&\int_{t_2}^t\big[H(t,s)\rho(s)A(s)\big]\mathrm{d}s\\
&\le\int_{t_2}^t H(t,s)\left[-W'(s)+A_1(s)W(s)-\beta\frac{\big(Z'(t)\big)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\big(\rho(s)r(s)\big)^{\frac{1}{\alpha}}}W^{1+\frac{1}{\alpha}}(s)\right]\mathrm{d}s\\
&=W(t_2)H(t,t_2)+\int_{t_2}^t\left[\frac{\partial H(t,s)}{\partial s}W(s)+A_1(s)H(t,s)W(s)-\beta H(t,s)\frac{\big(Z'(t)\big)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\big(\rho(s)r(s)\big)^{\frac{1}{\alpha}}}W^{1+\frac{1}{\alpha}}(s)\right]\mathrm{d}s\\
&\le W(t_2)H(t,t_2)+\int_{t_2}^t\left[|h(t,s)|H^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t,s)W(s)-\beta H(t,s)\frac{\big(Z'(t)\big)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\big(\rho(s)r(s)\big)^{\frac{1}{\alpha}}}W^{1+\frac{1}{\alpha}}(s)\right]\mathrm{d}s.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

利用引理 2.2，取 $B=|h(t,s)|H^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}(t,s)>0$，$A=\beta H(t,s)\dfrac{\big(Z'(s)\big)^{\frac{\beta}{\alpha}-1}}{\big(\rho(s)r(s)\big)^{\frac{1}{\alpha}}}>0$，$u=W(s)$，且 $\beta>\alpha>0$，故有

$$Bu-Au^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\le L\rho(s)r(s)\left(\frac{|h(t,s)|}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}. \tag{3.16}$$

结合(3.15)和(3.16)式得

$$\frac{1}{H(t,t_2)}\int_{t_2}^t\left[H(t,s)\rho(s)A(s)-L\rho(s)r(s)\left(\frac{|h(t,s)|}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\right]\mathrm{d}s\le W(t_2).$$

这与(3.14)式矛盾，故假设不成立，即 $x(t)$ 是方程(E)的振动解。

若 $Z(t)$ 满足(B)型，由于(2. 1)式成立，故由引理 2.5 可得 $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)=0$ 。证毕。

4. 应用

例 考虑如下的三阶中立型微分方程

$$\left(t^3\left[\left(x(t)+\frac{1}{6}x\left(\frac{t}{2}\right)\right)''\right]^3\right)'+\frac{1}{t^4}x^5(t)=0,\quad t\ge t_0>\sqrt{\frac{3L}{8\gamma^5}}>0 \tag{E$_1$}$$

在这里，我们取 $\beta=5$，$\alpha=3$，$\alpha=3$，$q(t)=\frac{1}{t^4}$，$p(t)=\frac{1}{6}$，$p=\frac{1}{2}$，$\tau(t)=\frac{t}{2}$，$\sigma(t)=t$，$\rho(t)=t$，由引理 3 知，当 $\sigma(t)=t$ 时，$\theta=1$，$\gamma\in(0,1)$，$L=\frac{1}{\left(Z'(T)\right)^2}$，$T$ 充分大。

所以

$$A_1(t)=\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}=\frac{1}{t}>0, A_3(t)=q(t)(1-p)^\beta=\frac{1}{t^4}\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32t^4},$$

$$A(t)=q(t)\left[(1-p)\frac{\gamma\theta\sigma^2(t)}{t}\right]^\beta=\frac{1}{t^4}\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\gamma t^2}{t}\right)^5=\frac{\gamma^5 t}{32}.$$

于是有

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\int_u^\infty\left(\frac{1}{r(v)}\int_v^\infty q(s)\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\int_u^\infty\left(\frac{1}{v^3}\int_v^\infty\frac{1}{s^4}ds\right)^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\int_u^\infty\frac{1}{\sqrt[3]{3}v^2}\mathrm{d}v\mathrm{d}u=+\infty.$$

$$\begin{aligned}&\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\left[\rho(s)A(s)-L\rho(s)r(s)\left(\frac{A_1(t)}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1}\right]\mathrm{d}s\\&=\limsup_{t\to\infty}\int_{t_0}^t\left[s\times\frac{\gamma^5 s}{32}-L\times s\times s^3\times\left(\frac{1}{4s}\right)^4\right]\mathrm{d}s\\&=\limsup_{t\to\infty}\left.\frac{s\left(8\gamma^5s^2-3L\right)}{768}\right|_{t_0}^t=+\infty.\end{aligned}$$

和

$$\lim_{t\to\infty}\int_{t_0}^t(\gamma\sigma(s))^\beta A_3(s)\mathrm{d}s=\lim_{t\to\infty}\frac{\gamma^5\left(t^2-t_0^2\right)}{64}=\infty.$$

显然方程(E$_1$)满足定理 3.1 的条件(3.1)和(2.1)，且满足定理 3.2 的条件(3.10)，即知方程(E$_1$)的解 $x(t)$ 振动，或者当 $t\to\infty$ 时，$x(t)\to 0$ 。

基金项目

1) 广东省茂名市科技计划项目(2015038)；2) 广东石油化工学院理学院科研扶持基金重点项目(KY2018001)。

参考文献

[1] 李元旦, 高正晖, 邓义华. 三阶半线性中立型微分方程的振动性[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2012, 13(3): 267-270.

[2] 苏新晓, 戴丽娜, 伍思敏, 林全文. 二阶半线性中立型微分方程的振动性[J]. 应用数学进展, 2017, 6(3): 417-422.

[3] Liu, H., Meng, F. and Liu, P. (2012) Oscillation and Asymptotic Analysis on a New Generalized Emden-Fowler Equation. *Applied Mathematics and Computation*, **219**, 2739-2748. https://doi.org/10.1016/j.amc.2012.08.106

[4] 曾云辉, 罗李平, 俞元洪. 中立型 Emden-Fowler 时滞微分方程的振动性[J]. 数学物理学报, 2015, 35A(4): 803-814.

[5] 罗李平, 俞元洪, 罗振国. 三阶非线性中立型微分方程的振动分析[J]. 系统科学与数学, 2016, 36(4): 551-559.

[6] 林文贤. 三阶半线性中立型阻尼泛函微分方程的振动性[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2017(3): 48-53.

[7] Dzurina, J. and Baculikova, B. (2012) Oscillation of Third-Order Quasi-Linear Advanced Differential Equations. *Differential Equations & Applications*, **4**, 411-421. https://doi.org/10.7153/dea-04-23

[8] 李同兴, 韩振来, 张承慧, 等. 时间尺度上三阶 Emden-Fowlwe 时滞微分方程的振动准则[J]. 数学物理学报, 2012, 32(1): 222-232.

[9] 曾云辉, 俞元洪. 三阶半线性时滞微分方程的振动定理[J]. 系统科学与数学, 2014, 34(2): 231-237.

[10] Qin, G., Huang, C., Xie, Y., *et al.* (2013) Asymptotic Behavior for Third-Order Quasi-Linear Differential Equations. *Advances in Difference Equations*, **2013**, 305. https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-305

[11] 仉志余, 王晓霞, 俞元洪. 三阶半线性中立型分布时滞微分方程的振动性[J]. 应用数学学报, 2015, 38(3): 450-459.

[12] 李全娣, 杨菊, 黎小贤, 林全文. 一类三阶中立型半线性时滞微分方程振动准则[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 356-362.

[13] 林全文, 俞元洪. 三阶半线性时滞微分方程的振动性和渐进性[J]. 系统科学与数学, 2015, 35(2): 233-244.

[14] 惠远先, 王俊杰. 三阶中立型半线性时滞微分方程的振动性[J]. 井冈山大学学报, 2017, 38(1): 8-13.

[15] Hardy, G., Litterwood, J. and Polya, G. (1952) Inequalities. 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge.

[16] Erbe, L. (1973) Oscillation Criteria for Second Order Nonlinear Delay Equations. *Canadian Mathematical Bulletin*, **16**, 49-56. https://doi.org/10.4153/CMB-1973-011-1