

The Fifth to Seventh Minimal Degree Distance of the Tree

Macuo Zhuo, Shuhua Liu, Ji Qiong

Department of Minority Normal School, Qinghai Normal University, Xining Qinghai
Email: 2353498508@qq.com

Received: Apr. 6th, 2019; accepted: Apr. 21st, 2019; published: Apr. 28th, 2019

Abstract

The degree distance indicator of the graph is the sum of the degrees of each point of the graph and the distance between the point and all points of the graph. The tree with the first small to fourth small distance in the order tree is given by He Xiuping, and its degree distance is determined. Based on the careful study of the above results, this paper studies the degree distance sorting problem of the order tree \mathcal{T}_n by using the transformation of the graph, and determines the fifth small to seventh tree in this order, and gives the corresponding degree distance.

Keywords

Graph, Degree Distance, Tree, Sorting

树的第五小至第七小度距离

卓玛措, 刘淑华, 琼吉

青海师范大学民族师范学院, 青海 西宁
Email: 2353498508@qq.com

收稿日期: 2019年4月6日; 录用日期: 2019年4月21日; 发布日期: 2019年4月28日

摘要

图的度距离指标是图的每一个点的度与这个点到图G的所有点的距离乘积的和。何秀萍给出了n阶树中具有第一小至第四小度距离的树, 并确定了其度距离。本文在对以上结果认真研究的基础上, 借助图的变换, 应用计算递归, 研究了n阶树 \mathcal{T}_n 的度距离排序问题, 确定了这个序中的第五小至第七小的树, 并且给出了相应的度距离。

关键词

图, 度距离, 树, 排序

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

图论是数学中的一个比较年轻的分支,但在最近几十年中,图论本身及其应用研究都得到了迅猛的发展[1][2]。图 G 的度距离是由 Dobrynin 和 Kochetova [3]及 Gutman [4]在 1994 年引入的一种新的拓扑指标,之后很多数学家对这种指标进行了研究[5]-[12]。

本文考虑的图都是有限、无向的简单图。如果一个图的顶点数和边数都是有限的,那么我们就称这个图为有限图。一个简单图是指:这个图中没有环,并且没有两条边的端点是完全相同的。设 $G=(V,E)$ 是一个 n 阶无向简单图, $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图的顶点集和边集, $|V(G)|=n$ 和 $|E(G)|=m$ 分别表示图的顶点数和边数。 $G-v$ 是指在图 G 中删掉点 v 及与它关联的边得到的图。图 G 中顶点 u 的度[13]指的是在图 G 中与点 u 关联的所有边的条数,记作 $\deg_G(u)$,简写为 $\deg(u)$ 。且

$$\sum_{u \in V(G)} \deg(u) = 2m$$

下面给出图 G 的度距离的定义:

定义[14]: 若 $u, v \in V(G)$, 则 u, v 间的距离 $d(u, v)$ 指的是连接 u, v 的最短路的长度, 则

$$D'(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u) D(u|G)$$

被称为图 G 的度距离。其中 $\deg(u)$ 是顶点 u 在图 G 中的度, $D(u|G)$ 是顶点 u 到 G 中所有顶点的距离之和, 即

$$D(u|G) = \sum_{v \in V(G)} d(u, v)。$$

我们把度为 1 的点称为图 G 的悬挂点,与悬挂点相连的边称为悬挂边。本文中我们用 \mathcal{T}_n 表示具有 n 个顶点的树,现对 \mathcal{T}_n 作如下划分,第一种划分: $\mathcal{T}_n = \bigcup_{i=1}^{n-3} \mathcal{T}_n^{(i)}$, 且当 $i \neq j$ 时 $\mathcal{T}_n^{(i)} \cap \mathcal{T}_n^{(j)} = \emptyset$, 其中 $\mathcal{T}_n^{(i)}$ 表示恰有 i 条悬挂边的 n 阶树的集合,即在路 P_{i+1} 的顶点 x_1, x_2, \dots, x_{i+1} 上粘上一些悬挂点得到的图。则 $\mathcal{T}_n^{(0)} = \{K_{1, n-1}\}$, $\mathcal{T}_n^{(n-3)} = \{P_n\}$ 。第二种划分: $\mathcal{T}_n = \bigcup_{i=2}^{n-1} \mathcal{T}_n^i$, 且当 $i \neq s$ 时 $\mathcal{T}_n^i \cap \mathcal{T}_n^s = \emptyset$, 其中 \mathcal{T}_n^i 表示恰有 i 条悬挂边的 n 阶树的集合,易知星图 $K_{1, n-1}$ 为具有最多悬挂边的唯一树,悬挂边数为 $n-1$; 路 P_n 是具有最少悬挂边的唯一树,悬挂边数为 2, 即 $\mathcal{T}_n^{n-1} = \{K_{1, n-1}\}$, $\mathcal{T}_n^2 = \{P_n\}$ 。

本文在文献[9]的基础上,借助图的变换,继续讨论 n 阶树 \mathcal{T}_n 的度距离排序问题,刻画了这个序中从第五小至第七小的树,并且给出了相应的度距离。

2. 预备知识

引理 1 [9]: 设 G, H 为图 1 所示的两个 n 阶连通图, T 和 U 是其连通子图。则有

$$D'(H) > D'(G)。$$

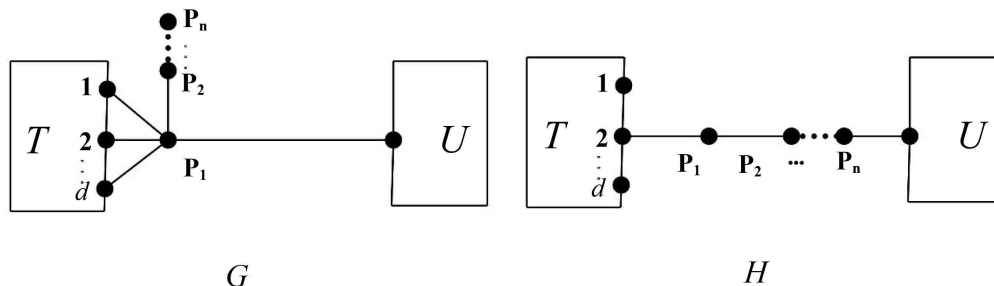


Figure 1. Graphs G and H
图 1. 图 G 和 H

定义 1 [9]: 设 $T \in \mathcal{T}_n$, $n \geq 4$, $e = uv$ 是 T 的一条非悬挂边, T_1 和 T_2 是 $T \setminus e$ 的 2 个分支, $u \in T_1, v \in T_2$ 。
 T 的一个长边变换是指对 T 的如下变换: 给树 T 在 u 处添加一条悬挂边, 再将边 e 收缩后得到的一个新的 n 阶树 T_0 , 如图 2。

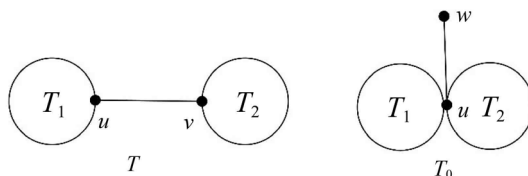


Figure 2. Tree T and T_0
图 2. 树 T 和 T_0

推论 1 [9]: $T \in \mathcal{T}_n$, $n \geq 4$, 并且 T 有非悬挂边, 令 T_0 是 T 经过一次长边变换后所得的树, 则 $D'(T) > D'(T_0)$ 。

由推论 1 可知, 对树作长边变换, 它的度距离严格减小。根据引理 1.1, 树的非悬挂边越少, 其度距离就越小。由此可以确定具有较小度距离的树一定会在这样的树中取得: 设 $T_{n,s_1,s_2,\dots,s_{i+1}}^{(i)} \in \mathcal{T}_n^{(i)}$, $s_1, s_{i+1} \geq 1$ 且 $s_2, \dots, s_i \geq 0$, 树 $T_{n,s_1,s_2,\dots,s_{i+1}}^{(i)}$ 是在路 P_{i+1} 的两个端点分别粘上 s_1 和 s_{i+1} 个悬挂点, 在路的其它点上分别粘上 s_2, \dots, s_i 个悬挂点得到的 n 阶树的集合。特别地, 当 $i=1$ 时, $T_{n,s_1,s_2}^{(1)}$ 简记为 $T_{n,i}^{(1)}$ ($i=s_1$), 当 $i=2$ 时, $T_{n,s_1,s_2,s_3}^{(2)}$ 简记为 $T_{n,i,j}^{(2)}$ ($i=s_1, j=s_3$), 当 $i=3$ 时, $T_{n,s_1,s_2,s_3,s_4}^{(3)}$ 简记为 $T_{k,i,l,j}^{(3)}$ ($i=s_1, j=s_4, k=s_2, l=s_3$), 当 $i=4$ 时, $T_{n,s_1,s_2,s_3,s_4,s_5}^{(4)}$ 简记为 $T_{k,i,l,m,j}^{(4)}$ ($i=s_1, k=s_2, l=s_3, m=s_4, j=s_5$)。

引理 2 [6]: 图 $G_{r,s}$ 的结构如图 3 所示, 令 $|V(G)| = m$, 则当 $r+m \geq s \geq 1$ 时, 有

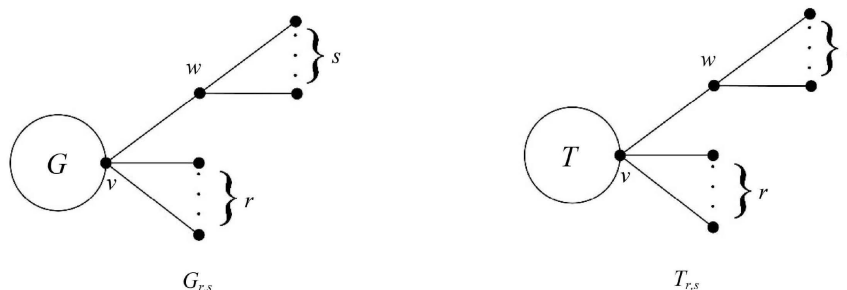


Figure 3. Graphs $G_{r,s}$ and $H_{r,s}$
图 3. 图 $G_{r,s}$ 和 $H_{r,s}$

$$D'(G_{r,s}) > D'(G_{r+1,s-1})$$

其中 G 是单圈图。

特别地, 当 G 是树 T 时, 有:

推论 2: $T_{r,s}$ 如图 3 所示, 令 $|V(T)| = m (m \geq 2)$, 则

(1) 当 $r+m \geq s \geq 1$ 时, 有 $D'(T_{r,s}) \geq D'(T_{r+1,s-1})$;

(2) 当 $r+m < s$ 时, 有 $D'(T_{r,s}) < D'(T_{r+1,s-1})$ 。

证明: 将 $T_{r,s}$ 分为 $T-v$, 点 v, w , $s+r$ 个孤立点等部分, 根据图的度距离的定义

$$D'(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u) D(u|G)$$

有

$$\begin{aligned} D'(T_{r,s}) &= \sum_{u \in V(T_{r,s})} \deg(u) D(u|T_{r,s}) \\ &= s[2s+3r+2m+D(v|T)-1] + r[2r+3s+m+D(v|T)] \\ &\quad + (s+1)[s+2r+m+D(v|T)] + [\deg_T(v) + (r+1)][r+2s+1+D(v|T)] \\ &\quad + \sum_{x \in V(T)-v} \deg(x)[D(v|T) + rD(x|v) + r + sD(x|v) + 2s + D(x|v) + 1] \\ &= 3(s+r)^2 + 4sr + 3ms + mr + 2(s+r+1)D(x|v) + 2s + 4r + m \\ &\quad + (r+2s+1) \sum_{x \in V(T)} \deg(x) + D'(T) + (r+s+1) \sum_{x \in V(T)-v} D(x|v) \\ D'(T_{r+1,s-1}) &= 3(s+r)^2 + 4sr + 3ms + mr + 2(s+r+1)D(x|v) + 2s + 4r + m + D'(T) \\ &\quad + (r+s+1) \sum_{x \in V(T)-v} D(x|v) + (r+2s) \sum_{x \in V(T)} \deg(x) + 4s - 4r - 2m - 2 \end{aligned}$$

其中, $\sum_{x \in V(T)} \deg(x) = 2(m-1)$ 则

$$\begin{aligned} D'(T_{r+1,s-1}) - D'(T_{r,s}) &= 4s - 4r - 2m - 2 - \sum_{x \in V(T)} \deg(x) \\ &= 4s - 4r - 2m - 2 - 2(m-1) \\ &= 4(s-r-m) \end{aligned}$$

当 $r+m \geq s \geq 1$ 时, 有 $D'(T_{r,s}) \geq D'(T_{r+1,s-1})$;

当 $r+m < s$ 时, 有 $D'(T_{r,s}) < D'(T_{r+1,s-1})$ 。

由此结论可以得到:

推论 3: 当 $r+m \geq s \geq 1$ 时, 有

$$D'(T_{r,s}) \geq D'(T_{r+1,s-1}) \geq \dots \geq D'(T_{r+s+1,1})$$

推论 4: 当 $r+m < s$ 且 $m \geq 2$ 时, 有

$$D'(T_{r+s-1,1}) < D'(T_{1,r+s-1}) < \dots < D'(T_{r-1,s+1}) < D'(T_{r,s})$$

当 $m \geq 3$ 时, 有

$$D'(T_{r+s-1,1}) < D'(T_{r+s-2,2}) \leq D'(T_{1,r+s-1}) < \dots < D'(T_{r-1,s+1}) < D'(T_{r,s})$$

当 $m \geq 4$ 时, 有

$$D'(T_{r+s-1,1}) < D'(T_{r+s-2,2}) < D'(T_{1,r+s-1}) < \dots < D'(T_{r-1,s+1}) < D'(T_{r,s})$$

证明: 当 $2 \leq r+m < s$ 时, 由推论 2 (2) 知, $D'(T_{1,r+s-1}) < \dots < D'(T_{r-1,s+1}) < D'(T_{r,s})$ 成立。

当 $m \geq 2$ 时, 只需证 $D'(T_{r+s-1,1}) < D'(T_{1,r+s-1})$ 成立。

当 $m \geq 3$ 时, $r+s+m-1 > 1$, $r+s+m-2 \geq 2$, $D'(T_{r+s-1,1}) < D'(T_{r+s-2,2})$ 成立。

所以要证结论成立, 只需证明 $D'(T_{r+s-2,2}) < D'(T_{1,r+s-1})$ 成立。由推论 2 知

$$D'(T_{r,s}) = 3(s+r)^2 + 4sr + 3ms + mr + 2(s+r+1)D(x|v) + 2s + 4r + m \\ + (r+2s+1)\sum_{x \in V(T)} \deg(x) + D'(T) + (r+s+1)\sum_{x \in V(T)-v} D(x|v)$$

则

$$D'(T_{1,r+s-1}) = 3(s+r)^2 + 2(s+r+1)D(x|v) + D'(T) + (r+s+1)\sum_{x \in V(T)-v} D(x|v) \\ + 6r + 6s + 3ms + 3mr - m - 2 + 2(r+s)\sum_{x \in V(T)} \deg(x)$$

$$D'(T_{r+s-2,2}) = 3(s+r)^2 + 2(s+r+1)D(x|v) + D'(T) + (r+s+1)\sum_{x \in V(T)-v} D(x|v) \\ + 12r + 12s + ms + mr + 5m - 20 + (r+s+3)\sum_{x \in V(T)} \deg(x)$$

其中 $\sum_{x \in V(T)} \deg(x) = 2(m-1)$, $s \geq 3$ 且 $m \geq 2$, 作差

$$D'(T_{1,r+s-1}) - D'(T_{r+s-2,2}) = 4(m-2)(r+s-3)$$

故当 $m \geq 2$ 时, 有 $4(m-2)(r+s-3) \geq 0$, 即

$$D'(T_{1,r+s-1}) \geq D'(T_{r+s-2,2})$$

当 $m \geq 3$ 时, 有 $4(m-2)(r+s-3) > 0$, 即

$$D'(T_{1,r+s-1}) > D'(T_{r+s-2,2})$$

命题得证。

定理 1 [3]: 设 $T \in \mathcal{T}_n$, 则 $D'(T) \geq 3n^2 - 7n + 4$, 等式成立当且仅当 T 是星图 $K_{1,n-1}$ 。

定理 2 [9]: 对任意 $T_{n,i}^{(1)}$, $i \in [1, (n-2)/2]$, 都有

$$D'(T_{n,1}^{(1)}) < D'(T_{n,2}^{(1)}) < D'(T_{n,3}^{(1)}) < \cdots < D'(T_{n,\lfloor n/2 \rfloor - 1}^{(1)})$$

其中 $D'(T_{n,i}^{(1)}) = 3n^2 - 7n + 4 - 4[i - (n-2)/2]^2 + (n-2)^2$ 。

定理 3 [9]: $T_{n,i,j}^{(2)}$ 中树的度距离由小开始的依次排序是 $T_{n,1,1}^{(2)}, T_{n,2,1}^{(2)}$, 其中

$$D'(T_{n,i,j}^{(2)}) = 3n^2 - 7n + 4 - 4[i - (n-2)/2]^2 - 4[j - (n-2)/2]^2 + 2(n-2)^2$$

定理 4 [9]: 树 $K_{1,n-1}, T_{n,1}^{(1)}, T_{n,2}^{(1)}, T_{n,1,1}^{(2)}$ 是 \mathcal{T}_n 中度距离较小的前四个树, 且

$$D'(K_{1,n-1}) < D'(T_{n,1}^{(1)}) < D'(T_{n,2}^{(1)}) < D'(T_{n,1,1}^{(2)})$$

3. 主要结果和证明

对 $\forall T \in \mathcal{T}_n^{(i)}$, 且 $i > 3$, 对 T 做 $i-3$ 次长边变换变成 T' , 使 $T' \in \mathcal{T}_n^{(3)}$ 。下面给出 $\mathcal{T}_n^{(3)}$ 中度距离最小的树, 然后对 $\mathcal{T}_n^{(3)}$ 中的树排序。在图 4 中给出了 $\mathcal{T}_n^{(3)}$ 中的两类图 $T_{k,i,l,j}^{(3)}$ 和 $R_{k,i,l,j}^{(3)}$, 这些树的度距离的大小与 k, i, l, m, j 的取值有关, 这一部分回答了当 k, i, l, m, j 分别取何值时 $T_{k,i,l,j}^{(3)}$, $R_{k,i,l,j}^{(3)}$ 的度距离取到最小值。

对 $T_{k,i,l,j}^{(3)} \in \mathcal{T}_n^{(3)}$ 做推论 2 的变换, 得到:

引理 1: 如图 4 所示, 树 $T_{k,i,l,j}^{(3)} \in \mathcal{T}_n^{(3)}$, $i, j \geq 1, k, l \geq 0$ 且 $i+j+k+l+4=n$, 则

1) 当 $k+l+j+3 \geq i$ 时, 有 $D'(T_{k,i,l,j}^{(3)}) \geq D'(T_{k+1,i-1,l,j}^{(3)})$ 。

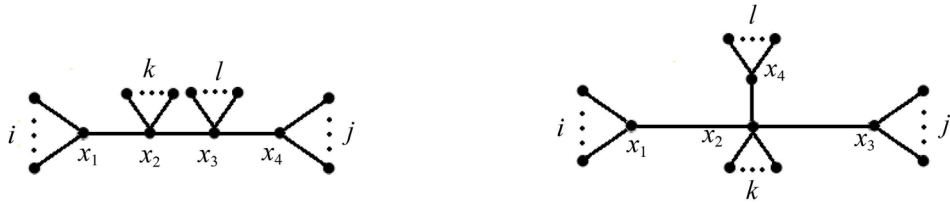


Figure 4. Tree $T_{k,i,l,j}^{(3)}$ and $R_{k,i,l,j}^{(3)}$

图 4. 树 $T_{k,i,l,j}^{(3)}$ 和 $R_{k,i,l,j}^{(3)}$

2) 当 $i > k + l + j + 3$ 时, 有 $D'(T_{k,i,l,j}^{(3)}) < D'(T_{k+1,i-1,l,j}^{(3)})$ 。

推论 1: 当 $k + l + j + 3 \geq i$, $i, j \geq 1, k, l \geq 0$ 且 $i + j + k + l + 4 = n$ 时, 有

$$D'(T_{k,i,l,j}^{(3)}) \geq D'(T_{k+1,i-1,l,j}^{(3)}) \geq \dots \geq D'(T_{k+i-1,1,l,j}^{(3)})$$

根据推论 4 知:

推论 2: 当 $i > k + l + j + 3$ 时, $i, j \geq 1, k, l \geq 0$ 且 $i + j + k + l + 4 = n$ 有

$$D'(T_{k+i-1,1,l,j}^{(3)}) < D'(T_{k+i-2,2,l,j}^{(3)}) < D'(T_{1,k+i-1,l,j}^{(3)}) < D'(T_{2,k+i-2,l,j}^{(3)}) < \dots < D'(T_{k,i,l,j}^{(3)})$$

由推论 1 和推论 2 得:

定理 1: 对任意的 $T_{k,i,l,j}^{(3)} \in \mathcal{T}_n^{(3)}$, 令 $s = k + i - 1$, 有 $D'(T_{s,1,l,j}^{(3)}) < D'(T_{k,i,l,j}^{(3)})$ 。

定理 2: 对树 $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ ($s, l \geq 0, j \geq 1$ 且 $s + l + j = n - 5$), 当 $s = 0, j = 1$ 时, $T_{0,1,n-6,1}^{(3)}$ 度距离最小, 且 $D'(T_{0,1,n-6,1}^{(3)}) = 3n^2 + 9n - 52$ 。

证明: $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ 结构如图 5 所示, $\deg(x_1) = 2, \deg(x_2) = s + 2, \deg(x_3) = l + 2, \deg(x_4) = j + 2, u \in V(T_{s,1,l,j}^{(3)}) - x_1 - x_2 - x_3 - x_4, \deg(u) = 1$ 。

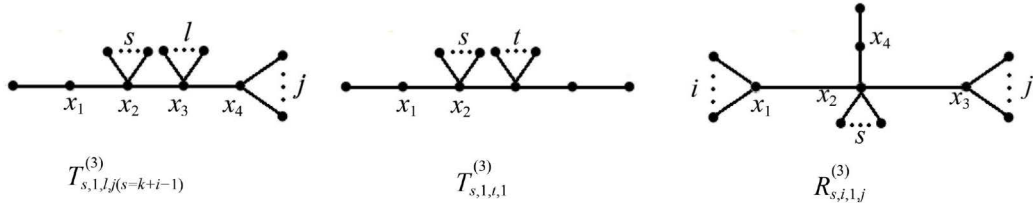


Figure 5. Tree $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ ($s=k+i-1$), $T_{s,1,l,1}^{(3)}$ and $R_{s,i,1,j}^{(3)}$

图 5. 树 $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ ($s=k+i-1$), $T_{s,1,l,1}^{(3)}$ 与 $R_{s,i,1,j}^{(3)}$

由

$$D'(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u) D(u | G)$$

得

$$D'(T_{s,1,l,1}^{(3)}) = 3(s + l + j)^2 + 31(s + l + j) + 4sl + 4lj + 8sj + 4l + 16j + 60$$

又因为 $l = n - 5 - s - j$, 所以

$$D'(T_{s,1,l,j}^{(3)}) = 3(n - 5)^2 + 35(n - 5) - 4[s - (n - 6)/2]^2 - 4[j - (n - 2)/2]^2 + (n - 2)^2 + (n - 6)^2 + 60$$

因为 n 为常数, $s \geq 0, j \geq 1$ 为整数, 由二次函数性质知: 当 $s = 0, j = 1$ 或 $s = n - 6, j = 1$ 时, $D'(T_{s,1,l,j}^{(3)})$ (如图 5) 取得最小值 $3n^2 + 9n - 52$, 因为 $T_{0,1,n-6,1}^{(3)}$ 与 $T_{n-6,1,0,1}^{(3)}$ 同构, 则具有最小度距离的树为 $T_{0,1,n-6,1}^{(3)}$ 。

定理 3: 在 $T_{k,i,l,j}^{(3)}$ 中有第一小至第五小度距离的树为:

$$T_{0,1,n-6,1}^{(3)}, T_{1,1,n-7,1}^{(3)}, T_{0,1,n-7,2}^{(3)}, T_{2,1,n-8,1}^{(3)}, T_{1,1,n-8,2}^{(3)}, T_{0,2,n-7,1}^{(3)}。$$

证明: 由推论 2 知, $D'(T_{k+i-1,1,l,j}^{(3)}) < D'(T_{k+i-2,2,l,j}^{(3)})$, $T_{k+i-2,2,l,j}^{(3)}$ 记为 $T_{r,2,l,j}^{(3)}$, 其中 $r = k + i - 2$, $r + l + j + 6 = n$ 。由度距离的定义, 有

$$D'(T_{r,2,l,j}^{(3)}) = 3(r+l+j)^2 + 41(r+l+j) + 4l(r+j+2) + 8rj + 24j + 98$$

把 $l = n - r - j - 6$ 代入上式得,

$$\begin{aligned} D'(T_{r,2,l,j}^{(3)}) &= 3(n-6)^2 + 41(n-6) - 4[r-(n-8)/2]^2 - 4[r-(n-2)/2]^2 \\ &\quad + (n-8)^2 + (n-2)^2 + 8n + 50 \\ &= 3n^2 + 13n - 88 - 4[r-(n-8)/2]^2 - 4[r-(n-2)/2]^2 \\ &\quad + (n-8)^2 + (n-2)^2 \end{aligned}$$

因为 n 是常数, $0 \leq r \leq (n-8)/2, 1 \leq j \leq (n-2)/2$, 由二次函数的性质知, 当 $r = 0, j = 1$ 时, $T_{0,2,n-7,1}^{(3)}$ 是具有最小度距离的树, 为 $D'(T_{0,2,n-7,1}^{(3)}) = 3n^2 + 17n - 100$ 。

由定理 2 知, 树 $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ 的度距离大小与 s, j 的取值有关, 当 $0 \leq s \leq \lfloor (n-6)/2 \rfloor, 1 \leq j \leq \lfloor (n-2)/2 \rfloor$ 时, s, j 的取值越大, $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ 的度距离就越大。考虑树 $T_{1,1,n-7,1}^{(3)}, T_{0,1,n-7,2}^{(3)}, T_{2,1,n-8,1}^{(3)}, T_{1,1,n-8,2}^{(3)}, T_{2,1,n-9,2}^{(3)}$ 的度距离大小, 因为

$$\begin{aligned} D'(T_{s,1,l,j}^{(3)}) &= 3(n-5)^2 + 35(n-5) - 4[s-(n-6)/2]^2 - 4[j-(n-2)/2]^2 \\ &\quad + (n-2)^2 + (n-6)^2 + 60 \end{aligned}$$

$$D'(T_{2,1,n-9,2}^{(3)}) = 3n^2 + 21n - 136, \quad D'(T_{1,1,n-7,1}^{(3)}) = 3n^2 + 13n - 80, \quad D'(T_{0,1,n-7,2}^{(3)}) = 3n^2 + 13n - 72$$

$$D'(T_{2,1,n-8,1}^{(3)}) = 3n^2 + 17n - 116, \quad D'(T_{1,1,n-8,2}^{(3)}) = 3n^2 + 17n - 100$$

由定理 2, $D'(T_{0,1,n-6,1}^{(3)}) = 3n^2 + 9n - 52$, 所以当 $n \geq 11$ 时有,

$$D'(T_{0,1,n-6,1}^{(3)}) < D'(T_{1,1,n-7,1}^{(3)}) < D'(T_{0,1,n-7,2}^{(3)}) < D'(T_{2,1,n-8,1}^{(3)}) < D'(T_{1,1,n-8,2}^{(3)}) < D'(T_{2,1,n-9,2}^{(3)})$$

故在 $T_{k,i,l,j}^{(3)}$ 中有第一小至第五小度距离的树为:

$$T_{0,1,n-6,1}^{(3)}, T_{1,1,n-7,1}^{(3)}, T_{0,1,n-7,2}^{(3)}, T_{2,1,n-8,1}^{(3)}, T_{1,1,n-8,2}^{(3)}$$

由推论 2 有:

引理 2: $R_{k,i,l,j}^{(3)} \in \mathcal{T}_n^{(3)}$, 如图 4 所示, $i, j, l \geq 1, k \geq 0$ 且 $i + j + k + l + 4 = n$, 则

- 1) 当 $k + i + j + 3 \geq l$ 时, 有 $D'(R_{k,i,l,j}^{(3)}) \geq D'(R_{k+1,i,l-1,j}^{(3)})$ 。
- 2) 当 $l > k + i + j + 3$ 时, 有 $D'(R_{k,i,l,j}^{(3)}) < D'(R_{k+1,i,l-1,j}^{(3)})$ 。

由引理 2 得:

推论 4: 当 $k + i + j + 3 \geq l, i, j, l \geq 1, k \geq 0$ 且 $i + j + k + l + 4 = n$ 时, 有

$$D'(R_{k,i,l,j}^{(3)}) \geq D'(R_{k+1,i,l-1,j}^{(3)}) \geq \dots \geq D'(R_{k+i-1,1,j}^{(3)})$$

根据定理 2 有:

推论 5: 当 $l > k + i + j + 3$, $i, j, l \geq 1, k \geq 0$ 且 $i + j + k + l + 4 = n$ 时, 有

$$D'(R_{k+i-1,i,j}^{(3)}) < D'(R_{k+i-2,i,2,j}^{(3)}) < D'(R_{1,i,k+i-1,j}^{(3)}) < D'(R_{2,i,k+i-2,j}^{(3)}) < \dots < D'(R_{k,i,l,j}^{(3)})$$

定理 4: 对 $R_{k,i,l,j}^{(3)} \in \mathcal{T}_n^{(3)}$, 令 $s = k + l - 1$, 有 $D'(R_{s,i,1,j}^{(3)}) < D'(R_{k,i,l,j}^{(3)})$ 。

定理 5: 树 $R_{s,i,1,j}^{(3)}$ ($s \geq 0, i, j \geq 1, n \geq 5, s + i + j = n - 5$) 的度距离由小开始排序 $R_{n-7,1,1,1}^{(3)}, R_{n-8,2,1,1}^{(3)}, R_{n-9,2,1,2}^{(3)}$, 且

$$D'(R_{n-7,1,1,1}^{(3)}) = 3n^2 + 5n - 32, \quad D'(R_{n-8,2,1,1}^{(3)}) = 3n^2 + 9n - 52, \quad D'(R_{n-9,2,1,2}^{(3)}) = 3n^2 + 13n - 72。$$

证明: $R_{s,i,1,j}^{(3)}$ 如图 5 所示, 由

$$D'(G) = \sum_{u \in V(G)} \deg(u) D(u|G)$$

得,

$$D'(R_{s,i,1,j}^{(3)}) = 3(i+j+s)^2 + 27(i+j+s) + 4is + 8ij + 4sj + 12i + 12j + 52$$

把 $s = n - 5 - i - j$ 代入得

$$D'(R_{s,i,1,j}^{(3)}) = 3n^2 - 3n - 8 - 4[i - (n-2)/2]^2 - 4[j - (n-2)/2]^2 + 2(n-2)^2$$

因为 $n \geq 5$ 为常数, 当 $1 \leq i \leq (n-2)/2, 1 \leq j \leq (n-2)/2$ 时, 由二次函数的性质知: $D'(R_{s,i,1,j}^{(3)})$ 与 s, j 的取值有关, s, j 的取值越大, $D'(R_{s,i,1,j}^{(3)})$ 就越大。当 $i = j = 1$ 时, $D'(R_{s,i,1,j}^{(3)})$ 取得最小值 $3n^2 + 5n - 32$, 则 $R_{s,i,1,j}^{(3)}$ 中度距离最小的树是 $R_{n-7,1,1,1}^{(3)}$; 当 $i = 2, j = 1$ 或 $i = 1, j = 2$ 时, $D'(R_{s,i,1,j}^{(3)})$ 的值达到第二小, 因为 $R_{n-8,2,1,1}^{(3)} \cong R_{n-8,1,1,2}^{(3)}$, 则 $R_{n-8,2,1,1}^{(3)}$ 是 $R_{s,i,1,j}^{(3)}$ 中度距离第二小的树, 度距离为 $3n^2 + 9n - 52$; 当 $i = 2, j = 2$ 时, $D'(R_{s,i,1,j}^{(3)})$ 的值达到第三小, 即 $R_{n-9,2,1,2}^{(3)}$ 是 $R_{s,i,1,j}^{(3)}$ 中度距离第三小的树, 度距离为 $3n^2 + 13n - 72$ 。

定理 6: 在 $\mathcal{T}_n^{(3)}$ 中第一小至第三小度距离的树为: $R_{n-7,1,1,1}^{(3)}, R_{n-8,2,1,1}^{(3)}$ ($T_{0,1,n-6}^{(3)}, R_{n-8,1,2,1}^{(3)}$), $R_{n-9,2,1,2}^{(3)}$ 。

证明: 由推论 4 和推论 5 知: $R_{k+i-2,i,2,j}^{(3)}$ 即 $R_{p,i,2,j}^{(3)}$ ($p = k + i - 2, p + i + j + 6 = n$) 是 $R_{k,i,l,j}^{(3)}$ 中度距离第二小的树, 由度距离的定义:

$$D'(R_{p,i,2,j}^{(3)}) = 3(i+j+p)^2 + 37(i+j+p) + 4ip + 8ij + 4pj + 16i + 16j + 86$$

把 $p = n - 6 - i - j$ 代入上式得

$$D'(R_{p,i,2,j}^{(3)}) = 3n^2 + n - 28 - 4[i - (n-2)/2]^2 - 4[j - (n-2)/2]^2 + 2(n-2)^2$$

因为 $n \geq 5$ 为常数, 当 $1 \leq i \leq (n-2)/2, 1 \leq j \leq (n-2)/2$ 时, 由二次函数的性质知: $D'(R_{p,i,2,j}^{(3)})$ 跟 i, j 的取值有关, i, j 的取值越大, $D'(R_{p,i,2,j}^{(3)})$ 就越大。当 $i = j = 1$ 时, $R_{n-8,1,2,1}^{(3)}$ 是具有最小度距离的树, 且 $R_{n-8,1,2,1}^{(3)} \cong R_{n-8,2,1,1}^{(3)} \cong R_{n-8,1,1,2}^{(3)}$, 度距离为 $3n^2 + 9n - 52$; 因树的对称性, 当 $i = 2, j = 1$ 和 $i = 1, j = 2$ 时, $R_{n-9,2,2,1}^{(3)} \cong R_{n-9,1,2,2}^{(3)} \cong R_{n-9,2,1,2}^{(3)}$, 度距离为 $3n^2 + 13n - 72$, $R_{n-9,2,2,1}^{(3)}$ ($R_{n-9,1,2,2}^{(3)}, R_{n-9,2,1,2}^{(3)}$) 是 $R_{p,i,2,j}^{(3)}$ 中有第二小的度距离的树。再由定理 5, $R_{p,i,2,j}^{(3)}$ 中具有第一小至第三小的树是 $R_{n-7,1,1,1}^{(3)}, R_{n-8,2,1,1}^{(3)}$ ($R_{n-8,1,2,1}^{(3)}$), $R_{n-9,2,1,2}^{(3)}$ 。由定理 2 知: 在树 $T_{s,1,l,j}^{(3)}$ 中 $T_{0,1,n-6,1}^{(3)}$ 的度距离最小, 其度距离为 $3n^2 + 9n - 52$, 故结论成立。

定理 7: 在 \mathcal{T}_n 中, $T_{n,3}^{(1)}, T_{n,2,1}^{(2)}, R_{n-7,1,1,1}^{(3)}$ 是具有第五小、第六小和第七小度距离的树, 且

$$D'(T_{n,3}^{(1)}) = 3n^2 + 5n - 56, \quad D'(T_{n,2,1}^{(2)}) = 3n^2 + 5n - 40, \quad D'(R_{n-7,1,1,1}^{(3)}) = 3n^2 + 5n - 32。$$

证明: 由引理 1 及推论 1 可知 \mathcal{T}_n 中具有较小度距离的树在 $\mathcal{T}_n^{(1)}$ 、 $\mathcal{T}_n^{(2)}$ 和 $\mathcal{T}_n^{(3)}$ 中。

由定理 6, 在 $\mathcal{T}_n^{(3)}$ 中有第一小和第二小度距离的树为: $R_{n-7,1,1,1}^{(3)}$, $R_{n-8,2,1,1}^{(3)}$ ($T_{0,1,n-6,1}^{(3)}$, $R_{n-8,1,2,1}^{(3)}$)。

要证结论成立, 下面先比较 $\mathcal{T}_n^{(1)}$ 、 $\mathcal{T}_n^{(2)}$ 中的树与 $R_{n-7,1,1,1}^{(3)}$, $T_{n,1,1}^{(2)}$ 的度距离的大小:

由定理 2 知, 在 $\mathcal{T}_n^{(1)}$ 中,

$$D'(T_{n,3}^{(1)}) = 3n^2 + 5n - 56, D'(T_{n,4}^{(1)}) = 3n^2 + 9n - 92, D'(T_{n,5}^{(1)}) = 3n^2 + 13n - 136$$

由

$$D'(T_{n,i,j}^{(2)}) = 3n^2 - 7n + 4 - 4[i - (n-2)/2]^2 - 4[j - (n-2)/2]^2 + 2(n-2)^2$$

得:

$$D'(T_{n,1,1}^{(2)}) = 3n^2 + n - 20, \quad D'(T_{n,2,1}^{(2)}) = 3n^2 + 5n - 40,$$

$$D'(T_{n,3,1}^{(2)}) = 3n^2 + 9n - 68, \quad D'(T_{n,2,2}^{(2)}) = 3n^2 + 9n - 60,$$

$$D'(T_{n,1,4}^{(2)}) = 3n^2 + 13n - 56$$

而 $D'(R_{n-7,1,1,1}^{(3)}) = 3n^2 + 5n - 32$, 结论成立。

基金项目

青海师范大学中青年教师科研基金资助项目(17ZR10)。

参考文献

- [1] Dobrynin, A.A. (1999) A Simple Formula for the Calculation of the Wiener Index of Hexagonal Chains. *Computers & Chemistry*, **23**, 43-48. [https://doi.org/10.1016/S0097-8485\(98\)00025-4](https://doi.org/10.1016/S0097-8485(98)00025-4)
- [2] Dobrynin, A.A. and Gutman, I. (1999) The Average Wiener Index of Hexagonal Chains. *Computers & Chemistry*, **23**, 571-576. [https://doi.org/10.1016/S0097-8485\(99\)00035-2](https://doi.org/10.1016/S0097-8485(99)00035-2)
- [3] Dobrynin, A.A. and Kochtova, A.A. (1994) Degree Distance of a Graph: A Degree Analogue of the Wiener Index. *Journal of Chemical Information and Modeling*, **34**, 1082-1086. <https://doi.org/10.1021/ci00021a008>
- [4] Gutman, I. (1994) Selected Properties of the Schultz Molecular Topological Index. *Journal of Chemical Information and Modeling*, **34**, 1087-1089. <https://doi.org/10.1021/ci00021a009>
- [5] Tomescu, I. (1999) Note Some Extremal Properties of the Degree Distance of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **98**, 159-163. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(99\)00117-1](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00117-1)
- [6] 陈爱莲, 何秀萍. 单圈图的度距离序[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2004, 32(6): 664-668.
- [7] 何秀萍. 具有最小度距离的双圈图[J]. 数学研究, 2008, 41(4): 434-438.
- [8] 候远, 常安. 具有最大度距离的单圈图[J]. 数学研究, 2006, 39(1): 18-24.
- [9] 何秀萍. 树的度距离序[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2002, 30(4): 479-481.
- [10] 何秀萍, 常安. 树的最大度距离排序[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2010, 38(5): 640-643.
- [11] Tomescu, I. (1999) Some Extremal Properties of the Degree Distance of a Graph. *Discrete Applied Mathematics*, **98**, 159-163. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(99\)00117-1](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(99)00117-1)
- [12] 李俊锋, 夏方礼. 双星树的度距离研究[J]. 邵阳学院学报: 自然科学版, 2009, 6(4): 6-8.
- [13] Bond, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) *Graph Theory with Applications*. MacMillan Press, New York.
- [14] 候远, 常安. 具有最小度距离的完美匹配单圈图[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2008, 36(3): 323-326.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2324-7991，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：aam@hanspub.org