Advances in Applied Mathematics 应用数学进展, 2020, 9(1), 12-17
Published Online January 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/aam
https://doi.org/10.12677/aam.2020.91002

Hans汉斯

Some Metric Properties in α-Lüroth Expansions

Bixuan Li, Sha Lan, Luming Shen

Information Science and Technology College of Hunan Agricultural University, Changsha Hunan
Email: math_forever@163.com, 15115076996@163.com, lum_s@126.com

Received: Dec. 9th, 2019; accepted: Dec. 26th, 2019; published: Jan. 2nd, 2020

Abstract

For the α-Lüroth expansion, some metric properties, such as "0-1" law, iterated logarithm law of the digits are studied in this paper. As the extension of alternating-Lüroth expansion, the conclusions in this paper include those of alternating-Lüroth case.

Keywords

α-Lüroth Expansion, "0-1" Law, Iterated Logarithm Law

α-Lüroth展式若干度量性质

李碧璇，兰　莎，沈陆明

湖南农业大学信息科学技术学院，湖南　长沙
Email: math_forever@163.com, 15115076996@163.com, lum_s@126.com

收稿日期：2019年12月9日；录用日期：2019年12月26日；发布日期：2020年1月2日

摘　要

对于α-Lüroth展式，在此篇文章我们研究了α-Lüroth展式的一些度量性质，获得了该展式数字“0-1”律，基于该结果，得到了相应的重对数律，进一步完善了该展式的度量性质。作为交错Lüroth展式的推广，该论文的结论包括了交错Lüroth的相应的结果。

关键词

α-Lüroth展式，“0-1”律，重对数律

文章引用: 李碧璇, 兰莎, 沈陆明. α-Lüroth 展式若干度量性质[J]. 应用数学进展, 2020, 9(1): 12-17.
DOI: 10.12677/aam.2020.91002

1. 引言

对单位区间上的划分 $\alpha=\{A_n:n\in\mathbf{N}\}$，定义 α-Lüroth 映射 $L_\alpha(x):[0,1]\to[0,1]$ 为：

$$L_\alpha(x):=\begin{cases}\dfrac{t_n-x}{a_n}, & x\in A_n,n\in N\\ 0, & x=0\end{cases}。$$

这里 $a_n=\lambda(A_n)$ 为 $A_n\in\alpha$ 的 Lebesgue 测度，$t_n:=\sum_{k=n}^{\infty}a_k$，并且规定 $\{A_n\}_{n\geq1}$ 依次从左至右顺序排列的为左开右闭区间。按照该算法，任意的 $x\in(0,1]$，均可以展成如下形式的 α-Lüroth 展式：

$$x=t_{l_1(x)}+\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j-1}\left(\prod_{1\leq i\leq j}a_{l_i(x)}\right)t_{l_j(x)},$$

这里，如果 $L_\alpha^{n-1}(x)\in A_{l_n}$，则 $l_n(x)=l_n\in\mathbf{N}$，并且，如果对某个 x 满足 $L_\alpha^k(x)=0$，则 $\{l_n(x)\}_{n\geq1}$ 为有限序列，除 $x=1$ 外，有限序列的最后一项大于或等于 2 的整数。为了简便，我们通常用 $[l_1,l_2,\cdots,l_k]_\alpha$ 表示有限 α-Lüroth，用 $[l_1,l_2,\cdots,l_k,\cdots]_\alpha$ 表示无穷展式。

对于该展式，一些基本的度量性质，如增长速度，逼近速度和数字频率可以通过 Birkhoff's 定理[1]得到。Lüroth 和交替 Lüroth 的情形就像连分式一样[2]-[7]。在本文中，我们考虑 α-Lüroth 展式“0-1”率和重对数率。

定理 1.1 令 α 是指数 $0<\theta\leq1$ 的展式，$\phi(n)$ 是定义于 $\mathbf{N}$ 上的正值函数，则：

1) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\phi(n)}$ 发散，则 $\lambda(A)=0$，即 $\lambda\{x\in(0,1]:l_n(x)>\phi(n)\ i.o.n\}=1$。

2) 如果 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\phi(n)}$ 收敛，则 $\lambda\{x\in(0,1]:l_n(x)>\phi(n)\ i.o.n\}=0$。

对任意的 $x\in(0,1]$，令

$$L_n(x)=\max\{l_1(x),\cdots,l_n(x)\}。$$

定理 1.2 令 α 是指数 $0<\theta\leq1$ 的展式，对几乎处处的 $x\in[0,1)$，有：

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log l_n(x)-\log n}{\log\log n}=1,$$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log L_n(x)-\log n}{\log\log n}=1。$$

定理 1.3 令 α 是指数 $0<\theta\leq1$ 的展式，对几乎处处的 $x\in[0,1)$，有：

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log l_n(x)-\log n}{\log\log n}=-\infty,$$

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log L_n(x)-\log n}{\log\log n}=0\text{。}$$

在整篇文章中，我们用 $\lambda(\cdot)$ 表示 Lebesgue 测度，$[\cdot]$ 表示取整数部分，$|\cdot|$ 表示一个集合的直径。

2. 准备工作

本节主要讨论 α-Lüroth 展式的一些基本性质。如需了解更多关于 α-Lüroth 展式的结果，可见参考文献[1] [8]。

定义 2.1 对每一个 k 阶正整数数组 $l_1,l_2,\cdots,l_k$，定义 α-Lüroth 展式第 n 个柱集为：

$$I(l_1,l_2,\cdots,l_k):=\{x\in[0,1):l_i(x)=l_i \text{ for } 1\le i\le k\}\text{。}$$

定义 2.2 令 $\alpha:=\{A_n:n\in\mathbf{N}\}$ 是一个可数的单位分割，则：

1) 若对于 $\rho>1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=\rho$；则 α 是扩张的；

2) 如果分割 α 的尾部满足幂律，$t_n=\psi(n)\cdot n^{-\theta}$，其中 $\psi:\mathbf{N}\to\mathbf{R}^+$ 是一个缓变函数，则 α 是指数 $\theta>0$ 的指数扩张的；

3) 如果 n 充分大，我们有 $a_{n+1}\le a_n$，则分割 α 最终是递减的。

引理 2.1 对任意的 $x\in(0,1]$，有：

$$\lambda(I(l_1,l_2,\cdots,l_k))=\prod_{i=1}^{k}\lambda(I(l_i)),$$

这里 $\lambda(\cdot)$ 表示 Lebesgue 测度。

引理 2.2 令 α 是指数 $\theta>0$ 且递减的扩张分割。对任意的 $0<\eta<\theta$，存在 $N>0$,使得当满足对于任意的整数 $n>N$，有：

$$n^{-(1+\theta+\eta)}\le a_n\le n^{-(1+\theta-\eta)}, \tag{2.1}$$

和

$$n^{-(\theta+\eta)}\le t_n\le n^{-(\theta-\eta)}\text{。} \tag{2.2}$$

引理 2.3 令 α 是满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=\rho>1$ 的分割，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{t_{n+1}}=-\log\rho\text{。}$$

为了简单起见，我们可以假设(2.1)和(2.2)对于所有 $n\ge1$ 有分割 α 从跳跃开始减小，即对于所有 $n\ge1$ 有 $a_{n+1}\le a_n$。这并不影响本文的研究。

3. 主要结果的证明

3.1. 定理 1.2 的证明

我们令 $\phi(n)=n\log n$，对于任意的 k 满足 $n_k=n$，这里我们有 $n_k=k^{\left[\frac{2}{\theta}\right]+1}$ 和 $\phi(n)=0$，反之我们有 $\phi(n)=\left(\left[\frac{2}{\theta}\right]+1\right)n^{\left[\frac{2}{\theta}\right]+1}\log n$。我们令

$$a_n=\begin{cases}n_k\log n_k & k\in\mathbf{N},n=n_k\\ 0 & n\ne n_k\end{cases}\text{。}$$

注意到$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\phi(n)^{\theta}}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\phi(n_k)^{\theta}}$，我们研究右上级数的收敛性。

根据 Rabbe 判别法，我们可以有$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{\theta}n^{2}(\log n)^{\theta}}<+\infty$。

通过定理 1.1，我们可以推断出如下的结论，

$$\lambda\left\{x\in(0,1]:l_n(x)\le a_n\ i.o.n\right\}=1。$$

则，我们可以有

$$\frac{\log l_n-\log n}{\log\log n}\le\frac{\log a_n-\log n}{\log\log n},$$

考虑到右端序列满足以$n=n_k$为子序列。

可以推断$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log a_n-\log n}{\log\log n}=1$，因此，我们推断出以下结果：

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log l_n-\log n}{\log\log n}\le 1。$$

然后，我们令$\phi(n)=n(\log n)^{1+\varepsilon}$，和前面的一样我对门得到关于$\theta\in(0,1]$的结论。

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log l_n-\log n}{\log\log n}=1。$$

因此，我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log L_n-\log n}{\log\log n}=1。$$

3.2. 定理 1.3 的证明

为了证明序列l_n的下限，我们首先得到同样的结论，

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log l_n-\log n}{\log\log n}\le-\infty。$$

当$\theta\in(1,+\infty)$时，证明过程是相同的。然后，我们给出L_n的“0-1”比率。
我们回想起在$\theta\in(1,+\infty)$条件下定义的集合A_γ，我们定义序列

$$b_n=\begin{cases}n_k(\log n_k)^{\gamma} & k\in\mathbf{N},n=n_k\\ 0 & n\ne n_k\end{cases}。$$

对于任意的$\gamma>0$，取$n_k=k^{\left[\frac{2}{\theta}\right]}$，我们定义$p(n)=n-\#\left\{k:k^{\left[\frac{2}{\theta}\right]}\le n\right\}$，回忆等式，我们有

$$\left(1-\frac{1}{\left(n(\log n)^{\gamma}\right)^{(\theta-\varepsilon)}}\right)^{n}\le\lambda(A_\gamma)\le\left(1-\frac{1}{\left(n(\log n)^{\gamma}\right)^{(\theta+\varepsilon)}}\right)^{n}。$$

因此，根 Fatou 引理，我们推断，

$$\lambda\left\{\bigcap_{m\ge1}\bigcup_{n\ge m} x\in[0,1): L_n(x)\le n(\log n)^{\gamma}\right\}$$
$$\ge \limsup_{n\to\infty}\lambda\left\{x\in[0,1): L_n(x)\le n(\log n)^{\gamma}\right\}。$$
$$\ge \limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\left(n(\log n)^{\gamma}\right)^{(\theta-\varepsilon)}}\right)^{n}$$

这里，我们取 b_n 为 $\left\{n(\log n)^{\gamma}\right\}_{n\ge1}$ 的子序列。因此，我们用下面的方法计算上限，

$$\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\left(n(\log n)^{\gamma}\right)^{(\theta-\varepsilon)}}\right)^{n}\ge \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\left(n^{\left[\frac{2}{\theta}\right]}\left(\left[\frac{2}{\theta}\right]\log n\right)^{\gamma}\right)^{(\theta-\varepsilon)}}\right)^{n}\ge \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\left(n^{\frac{2}{\theta}}\left(\frac{2}{\theta}\log n\right)^{\gamma}\right)^{(\theta-\varepsilon)}}\right)^{n-p(n)}=1。$$

因此，我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log L_n-\log n}{\log\log n}\le\gamma。$$

对于任意的 $\gamma>0$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log L_n-\log n}{\log\log n}\le 0。$$

为了计算极限，我们假设 $\tau>0$。我们定义

$$\overline{A_{\frac{\tau}{\theta}}}=\left\{x\in[0,1): L_n(x)\le n^{\frac{1}{\theta}}(\log n)^{-\frac{\tau}{\theta}}, L_{n+1}(x)\le(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\left(\log(n+1)\right)^{-\frac{\tau}{\theta}}\right\}。$$

因此，我们有

$$\lambda\left(\overline{A_{\frac{\tau}{\theta}}}\right)=\lambda\left\{x\in[0,1): L_n(x)\le n^{\frac{1}{\theta}}(\log n)^{-\frac{\tau}{\theta}}, L_{n+1}(x)\le(n+1)^{\frac{1}{\theta}}\left(\log(n+1)\right)^{-\frac{\tau}{\theta}}\right\}$$
$$\le\left(1-\frac{1}{\left(n^{\frac{\theta+\varepsilon}{\theta}}(\log n)^{\gamma}\right)^{-\frac{\tau(\theta+\varepsilon)}{\theta}}}\right)^{n}\frac{1}{(n+1)^{\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}}\left(\log(n+1)\right)^{-\frac{\tau(\theta+\varepsilon)}{\theta}}}$$
$$\le \mathrm{e}^{-\frac{1}{(\log n)^{-\tau}}}\cdot\frac{(\log n)^{\tau}}{n}$$
$$\le \mathrm{e}^{-\frac{1}{(\log n)^{\tau}}}\cdot n^{\tau-1}$$
$$\le \mathrm{e}^{-\frac{1}{n^{\tau}}}\cdot n^{\tau-1}$$

。

注意到这一点，

$$e^{-\frac{1}{n^{\tau}}} \cdot n^{\tau-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!n^{k\tau}} \cdot n^{\tau-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!n^{(k-1)\tau+1}},$$

我们取满足 $(k_0-1)\tau+1>1$ 和 $e^{-\frac{1}{n^{\tau}}} \cdot n^{\tau-1} < \frac{1}{k_0!n^{k_0\tau}}$ 的 $k_0>1$，其中 $k_0 \in \mathbf{N}$。

因此，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\overline{A_{\frac{\tau}{\theta}}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k_0!n^{(k_0-1)\tau}} \le +\infty 。$$

根据定理 1.1，我们有

$$\lambda\left\{L_n(x) \le n^{\frac{1}{\theta}} (\log n)^{-\frac{\tau}{\theta}} \ i.o.n\right\} = 0 。$$

我们得到了

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log L_n - \log n}{\log\log n} \ge -\frac{\tau}{\theta} 。$$

对于任意的 $\tau>0$ 和 $\theta \in (0,1]$，我们有

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log L_n - \log n}{\log\log n} \ge -0 。$$

当时 $\theta=1$，这就是交替 Lüroth 展式的情形。

基金项目

这项工作得到了湖南农业大学大学生创新性实验计划项目(编号 SCX1802)的支持。

参考文献

[1] Munday, S. (2012) Finite and Infinite Ergodic Theory for Linear and Conformal Dynamical System. University of St. Andrews, UK.

[2] Galambos, J. (1974) An Iterated Logarithm Type Theorem for the Largest Coefficient in Continued Fractions. *Acta Arithmetica*, **25**, 359-364. https://doi.org/10.4064/aa-25-4-359-364

[3] Khintchine A. Ya (1964) Continued Fractions. Chicago University Press, Chicago.

[4] Kalpazidou, S., Knopfmacher, A. and Knopfmacher, J. (1991) Metric Properties of Alternating Lüroth Series. *Portugaliae Mathematica*, **48**, 319-325.

[5] Schweiger, F. (1995) Ergodic Theory of Fibred Systems and Metirc Number Theory. Clarendon Press, Oxford.

[6] Dajani, K. and Kraaikamp, C. (1996) On Approximation by Lüroth Series. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, **8**, 331-346. https://doi.org/10.5802/jtnb.172

[7] Oppenheim, A. (1972) The Representation of Real Numbers by Infinite Series of Rationals. *Acta Arithmetica*, **21**, 391-398. https://doi.org/10.4064/aa-21-1-391-398

[8] Kesseböhmer, K., Mundays, S. and Stratmann, B.O. (2012) Strong Renewal Theorems and Lyapunov Spectra for α-Farey and α-Lüroth Systems. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **32**, 989-1017. https://doi.org/10.1017/S0143385711000186