

# Mechanical Mechanism of Rock with Fluids under Elastic Deformation

Hongsheng Wang, Hongmei Li, Huiyong Wang, Hongwei Han

SINOPEC Geophysical Research Institute of Shengli Oilfield, Dongying Shandong  
Email: hsw1108@sohu.com

Received: Nov. 23<sup>rd</sup>, 2018; accepted: Dec. 5<sup>th</sup>, 2018; published: Dec. 12<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

The effective stress theorem reveals that the mechanical mechanism of confining pressure is shared by the porous skeleton and pore fluid in porous elastic materials, but Terzahi's effective stress theorem can not explain the validity of the theory by the relationship between strain and stress. Biot and Willis' effective stress theorem describes the relationship between strain and stress of saturated porous rocks when pore pressure remains constant, but can not explain the mechanical mechanism of pore pressure increasing with confining pressure. In this paper, the establishment condition and validity of Biot and Willis' effective stress theorems are deduced theoretically. According to Gassmann's equation, the mechanical mechanism of pore pressure increase caused by the increase of confining pressure of saturated rock is described, which has important application value in petroleum exploration and exploitation.

## Keywords

Effective Stress, Pressure, Strain, Confining Pressure, Gassmann's Equation

---

# 含流体岩石弹性形变状态下的力学机制

王鸿升, 李红梅, 王惠勇, 韩宏伟

胜利油田分公司物探研究院, 山东 东营  
Email: hsw1108@sohu.com

收稿日期: 2018年11月23日; 录用日期: 2018年12月5日; 发布日期: 2018年12月12日

---

## 摘要

有效应力定理揭示了多孔弹性材料中多孔骨架与孔隙流体分担围压的力学机制, 但是Terzahi的有效应力定理不能通过应变与应力的关系解释其理论的有效性。Biot和Willis的有效应力定理描述了饱和多孔

岩石在孔隙压力保持不变的情况下岩石应变与应力的关系，不能解释饱和岩石孔隙压力随围压增加而增加的力学机制。本文从理论上推导了Biot和Willis的有效应力定理成立的条件及其有效性，根据Gassmann方程描述了饱和岩石围压增加所引起孔隙压力增加的这一力学机制，对孔隙压力预测及其应用提供了有力的理论依据，在石油勘探开发中具有重要的应用价值。

## 关键词

有效应力，压力，应变，围压，Gassmann方程

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

Terzahi (1923)的有效应力定理揭示了孔隙压力在多孔弹性土材料中能引起土材料明显的体积增大，在数量级上类似于围压引起的体积变化，与围压的方向相反，并且土壤在应力条件下的应变和破坏取决于压力差(有效应力) [1]

$$P_p = P_c - P_d \quad (1)$$

式中： $P_c$ 是围压，且 $P_c = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ ， $\sigma_{11}$ 、 $\sigma_{22}$ 和 $\sigma_{33}$ 分别为 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 三个方向的主应力， $P_p$ 是孔隙流体压力， $P_d$ 是压力差(有效应力)。不过关于 Terzahi (1923)的有效应力定理的精确性和有效性方面存在大量的分歧，部分异议偶尔来自多孔骨架应力和应变的含糊定义。

Biot 和 Willis (1957)根据实验室测量，在保持多孔材料孔隙压力不变的情况下，建立了样品应变与应力的关系，提出了基于各向同性材料的有效应力定理[2]

$$\left. \begin{aligned} nP_p &= P_c - P_e \\ n &= 1 - \frac{K_{dry}}{K_{ma}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： $P_c$ 是围压，且 $P_c = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ ， $P_p$ 是孔隙流体压力， $P_e$ 是有效应力。 $K_{dry}$ 为多孔干燥岩石的体积模量(排水状态下的体积模量)， $K_{ma}$ 为岩石基质的体积模量， $n$ 是有效应力系数(也称为 Boit 或 Biot-Willis 系数，有的文献中用 $\alpha$ 表示有效应力系数)。在两种极端情况下：1) 当孔隙度 $\phi = 0$ 时， $K_{dry} = K_{ma}$ ， $n = 0$ 为固结良好的沉积岩、致密的沉积岩。2) 当孔隙度 $\phi \geq \phi_{crit}$  ( $\phi_{crit}$ 为临界孔隙度)时， $K_{dry} = 0$ ， $n = 1$ 为未固结的沉积物或流体，因此 $0 \leq n \leq 1$  (Hilterman, 2001) [3]。Nur 和 Byerlee (1971)证实了 Biot 和 Willis (1957)提出的有效应力定理的有效性[4]，事实上，Biot 和 Willis (1957)提出的有效应力定理式(2) [2]包含了 Terzaghi (1923)提出的有效应力定理式(1) [1]，地面疏松干燥的多孔土壤的体积模量 $K_{dry}$ 往往远小于土壤矿物颗粒的体积模量 $K_{ma}$ 。Sarker 和 Batzle (2008)的研究也证实在较浅的地层中 $K_{dry} \ll K_{ma}$ ， $n \approx 1$ ；因此在较浅的地层中上述式(2)可简化为式(1) [5]。

Nur 和 Byerlee (1971) [4]根据 Terzahi (1923) [1]和 Biot (1941)的研究结果[6]，给出了一个基于统计学各向同性多孔集料的应力和孔隙压力的应变的张量通式

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{rr} \delta_{ij} \right) + \frac{1}{9K} \left( \sigma_{rr} \delta_{ij} \right) - \frac{1}{3H} \left( P_p \delta_{ij} \right) \quad (3)$$

式中： $\delta_{ij}$ 是克罗内克符号，重复标记表示求和，即 $\sigma_{\tau\tau} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ，在式(3)中压缩为正方向。式(3)右边的第一项是偏应力导致的应变，仅依赖于没有孔隙压力的有效剪切模量。第二项是由静水应力(平均应力 $\sigma_{\tau\tau}/3$ )单独导致的应变，仅依赖于无孔隙压力状态下岩石的有效体积模量 $K$ 。最后一项是由孔隙压力导致的应变，并且依赖于由 Biot (1941) [6]介绍的一个新的有效模量 $H$ 。有效模量 $K$ 、 $\mu$ 和 $H$ 是他们自己定义的，比较抽象，不是很明确，与实验室的测试是一致的。正如早期所定义的，它们是施加的平均应力或孔隙压力与被测量的平均应变之间的比值，方程(3)表明，在各向同性多孔集料中，孔隙压力影响法向应变，而不是剪切应变。Skempton (1954)的实验结果指出，对于各向同性多孔集料，孔隙压力仅仅依赖于平均主应力，但是在土壤中纯剪切应力对孔隙压力有显著的影响[7]。因此现有关于孔隙压力的预测模型都是基于各向同性多孔集料的，孔隙压力只与主应力有关，与剪切应力无关。

## 2. 多孔岩石可压缩性定义

为了解析 Biot 和 Willis (1957)提出的有效应力定理[2]，在此我们引入 Zimmerman (1991)给出的多孔岩石四个可压缩性的定义。对于多孔岩石而言， $P_c$ 是施加给岩石的围压， $P_p$ 是岩石孔隙流体压力； $V_b$ 为岩石的总体积， $V_p$ 为岩石的孔隙体积， $V_m$ 为岩石基质(岩石固体部分)的体积(图 1) [8]。

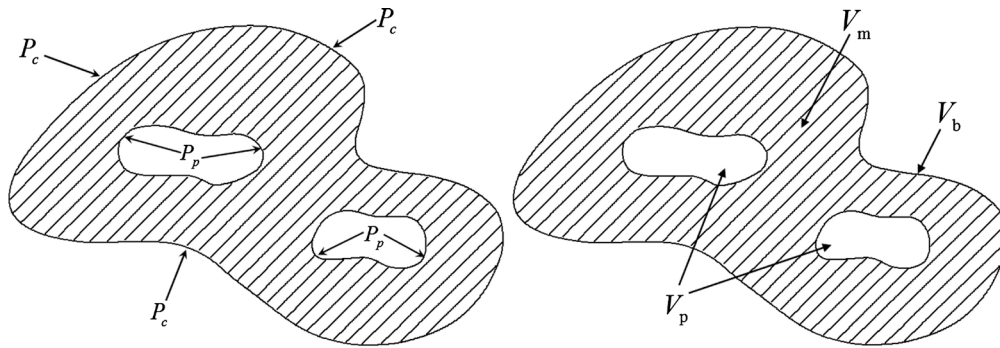


Figure 1. Confining pressure  $P_c$  and pore pressure  $P_p$  acting on a porous body [8]  
图 1. 围压  $P_c$  和孔隙压力  $P_p$  对多孔岩石的作用力示意图[8]

$$C_{bc} = \frac{-1}{V_b} \left[ \frac{\partial V_b}{\partial P_c} \right]_{P_p} \quad (4)$$

$$C_{bp} = \frac{1}{V_b} \left[ \frac{\partial V_b}{\partial P_p} \right]_{P_c} \quad (5)$$

$$C_{pc} = \frac{-1}{V_p} \left[ \frac{\partial V_p}{\partial P_c} \right]_{P_p} \quad (6)$$

$$C_{pp} = \frac{1}{V_p} \left[ \frac{\partial V_p}{\partial P_p} \right]_{P_c} \quad (7)$$

并且[8]

$$C_{bp} = C_{bc} - C_m \quad (8)$$

$$C_{pp} = C_{pc} - C_m \quad (9)$$

$$C_{bp} = \phi C_{pc} \quad (10)$$

上述式(4)~(10)中:  $C_{bc}$  相当于多孔岩石在排水状态下的可压缩性,  $C_{bc} = 1/K_{dry}$ ;  $C_{bp}$  被称为虚拟体积可压缩性(Fatt, 1958) [9], 这个可压缩性被用着地层沉陷的计算(Geertsma, 1973) [10];  $C_{pc}$  和  $C_{pp}$  是孔隙的可压缩性, 指压力的变化对岩石孔隙空间体积的影响; Hall (1953)指出  $C_{pc}$  作为“地层压实”系数[11], 孔隙可压缩性  $C_{pp}$  被用着油藏分析, 因为它反映了超过孔隙流体的体积能被储存在孔隙空间中是由于孔隙压力的增加;  $C_m$  是岩石基质的可压缩性,  $C_m = 1/K_{ma}$ ;  $\phi$  是岩石的孔隙度。在这里围压  $P_c$  作用的方向为负方向(压缩), 孔隙流体压力  $P_p$  作用的方向为正方向。

此外, 我们还需要引入多孔岩石三个可压缩性定义(Green 和 Wang, 1986) [12]

$$C_u = \frac{-1}{V_b} \left[ \frac{\partial V_b}{\partial P_c} \right]_{m_f=const} \quad (11)$$

$$C_m = \frac{-1}{V_b} \left[ \frac{\partial V_b}{\partial P_c} \right]_{P_d=const} \quad (12)$$

$$C_\phi = \frac{-1}{V_p} \left[ \frac{\partial V_p}{\partial P_c} \right]_{dP_p=dP_c} \quad (13)$$

上述式(11)~(13)中:  $C_u$  是饱和岩石的可压缩性,  $C_u = 1/K_{sat}$ ,  $K_{sat}$  是饱和岩石的体积模量;  $C_m$  是压力差  $P_d$  保持不变( $P_d = P_c - P_p$ )时的岩石可压缩性, 岩石形变是由内在的矿物模量来描述的, 一般定义为岩石基质的可压缩性;  $C_\phi$  是围压变化量  $dP_c$  与孔隙流体压力变化量  $dP_p$  相等时的孔隙可压缩性,  $K_\phi^*$  是与之相对应的孔隙刚度(孔隙的体积模量),  $C_\phi = 1/K_\phi^*$ 。

在这里需要强调的是式(13)中岩石孔隙可压缩性  $C_\phi$  与 Zimmerman (1991) [8]定义的岩石孔隙可压缩性式(6)和式(7)是不同的, 式(13)中岩石孔隙可压缩性  $C_\phi$  是围压变化量  $dP_c$  与孔隙压力变化量  $dP_p$  两者相等时岩石孔隙的可压缩性。

### 3. 有效应力定理的力学机制

对于均匀线性弹性固体内部的单个或多个任意形状的孔隙空间, 有孔固体在干燥状态下的等效可压缩性(干燥体积模量的倒数)可以描述为(Walsh, 1965 [13]; Zimmerman, 1991 [8])

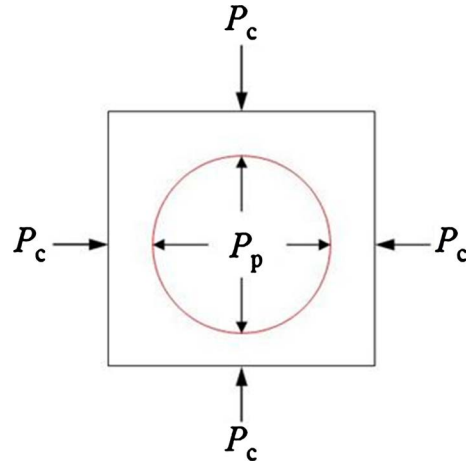
$$\frac{1}{K_{dry}} = \frac{1}{K_{ma}} + \frac{\phi}{K_\phi} \quad (14)$$

式中:  $K_{dry}$  为干燥岩石的等效体积模量;  $K_{ma}$  为岩石基质的体积模量;  $\phi$  为岩石孔隙度;  $K_\phi$  为干燥孔隙空间的刚度。式(14)的物理意义是干燥有孔岩石的可压缩性由两部分构成, 一是矿物内在的可压缩性; 二是由孔隙空间的存在所引起的附加可压缩性。

根据上述式(2)式(14)得

$$\frac{P_c}{K_{dry}} = \frac{P_e}{K_{dry}} + \frac{\phi P_p}{K_\phi} \quad (15)$$

式(15)描述了饱和岩石在围压的作用下, 孔隙压力保持不变的情况下的三维力平衡模型, 同时式(15)也说明了, 围压作用于饱和岩石, 保持孔隙压力不变的情况下, 岩石的总应变等于岩石骨架(岩石排水状态)的总应变, 岩石骨架(岩石排水状态)的总应变等于有效应力对岩石骨架引起的应变与岩石孔隙分担的孔隙压力引起的孔隙应变之和。对于固结的岩石, 如果对多孔岩石施加围压  $P_c$ , 当孔隙中没有流体时, 孔隙压力  $P_p = 0$ , 有效应力是作用在整个岩石骨架(干燥岩石)上的, 而不是作用在单个岩石矿物颗粒上的(图 2)。



**Figure 2.** The diagrammatic sketch of three-dimensional stress of the saturated rock  
**图 2.** 饱和岩石三维力平衡示意图

对于地下沉积岩而言，在弹性范围内，岩石的总应变受围压  $P_c$  和孔隙流体压力  $P_p$  控制

$$\varepsilon_b = \frac{\Delta V_b}{V_b} = f(P_c, P_p) \tag{16}$$

那么岩石总应变增量  $d\varepsilon_b$  为

$$d\varepsilon_b = -C_{bc}dP_c + C_{bp}dP_p \tag{17}$$

岩石的微小形变可认为是线性的，根据式(8)和式(17)得

$$\varepsilon_b = -C_{bc}P_c + (C_{bc} - C_m)P_p \tag{18}$$

如果对饱和岩石施加围压  $P_c$  的过程中，孔隙流体压力  $P_p$  保持不变，假如岩石的形变是线性的，那么岩石的总应变  $\varepsilon_b$  等于岩石骨架(排水状态的岩石)的应变，由此可根据式(4)和式(18)得

$$-C_{bc}P_e = -C_{bc}P_c + (C_{bc} - C_m)P_p \tag{19}$$

由式(19)得

$$\frac{P_e}{K_{dry}} = \frac{P_c}{K_{dry}} - \left( \frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{ma}} \right) P_p \tag{20}$$

式(20)等价于 Biot 和 Willis (1957) [2]提出的有效应力定理式(2)。

如果对饱和岩石施加围压  $P_c$  的过程中，孔隙流体与外界不连通，孔隙流体的质量保持不变，那么在围压  $P_c$  增加的过程中，假如岩石的形变是线性的，岩石的总应变  $\varepsilon_b$  等于整个饱和流体岩石的应变，由此可根据式(11)和式(18)得

$$-C_u P_c = -C_{bc}P_c + (C_{bc} - C_m)P_p \tag{21}$$

由式(21)得

$$\frac{P_p}{P_c} = \frac{\frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{sat}}}{\frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{ma}}} \tag{22}$$

式(22)描述了岩石在线性形变状态下, 孔隙流体与外界不连通, 并且孔隙压力增大时, 孔隙压力  $P_p$  与施加围压  $P_c$  的关系。

#### 4. Gassmann 方程隐含的力学机制

沉积物由水动力搬运至湖盆中, 在压实和成岩作用之前的最初沉积, 矿物颗粒是疏松的, 甚至是弱悬浮的, 此时沉积物所具有的孔隙度称为临界孔隙度  $\phi_{crit}$ 。当孔隙度低于  $\phi_{crit}$  时, 矿物承载, 而当孔隙度大于  $\phi_{crit}$  时, 岩石颗粒之间将失去接触和刚度, 岩石“散开”并且变成承载液体中的悬浮物, 岩石矿物颗粒所承受的有效应力与孔隙压力相等,  $\phi_{crit}$  的值取决于沉积过程中颗粒的分选和磨圆(Mavko *et al.*, 1998) [14]。沉积岩在压实成岩过程中, 埋藏深度逐渐增大, 孔隙度逐渐减小, 弹性刚度增加。当孔隙度小于  $\phi_{crit}$  之后, 岩石矿物颗粒要分担围压施加的应力, 并且孔隙流体压力不断增大。事实上, 沉积岩在压实成岩的过程中往往是一个非线性形变过程, 这一非线性形变过程主要表现在孔隙度逐渐减小, 饱和流体岩石的体积模量和与之对应的干岩石骨架的体积模量会逐渐增大(弹性刚度增加)。用式(17)描述沉积岩的孔隙流体力学机制要比式(18)更合理一些, 对于饱和岩石而言, 根据式(4)、式(11)和式(17)得

$$-C_u dP_c = -C_{bc} dP_c + (C_{bc} - C_m) dP_p \quad (23)$$

由式(23)得

$$\frac{dP_p}{dP_c} = \frac{\frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{sat}}}{\frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{ma}}} \quad (24)$$

式(24)是 Skempton 系数  $B$  (Skempton, 1954) 的[7]另外一种表达形式, 描述了岩石在不排水的状态下围压增加所引起孔隙压力增加的关系, 在数学上是孔隙压力  $P_p$  对围压  $P_c$  的导数,  $dP_p/dP_c = B$ 。

来源于 Zimmerman (1991, p. 62) [8]和 Jaeger 等人(2007, p. 177) [15]推导的 Skempton 系数  $B$  表达式为

$$\frac{dP_p}{dP_c} = B = \frac{1}{1 + K_\phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_{ma}} \right)} = \frac{1}{1 + \phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_{ma}} \right) \left( \frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{ma}} \right)^{-1}} \quad (25)$$

式(24)等价于式(25), 并且式(24)和式(25)可还原于 Gassmann 方程[16]中

$$\frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{sat}} = \frac{\left( \frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{ma}} \right)^2}{\phi \left( \frac{1}{K_f} - \frac{1}{K_{ma}} \right) + \left( \frac{1}{K_{dry}} - \frac{1}{K_{ma}} \right)} \quad (26)$$

式(26)是 Gassmann 方程(Gassmann 方程可以写成多种表达形式), 由式(24)和(25)可知, Gassmann 方程还可写成

$$K_{sat} = \frac{K_{dry}}{1 - \left( 1 - \frac{K_{dry}}{K_{ma}} \right) \left( \frac{dP_p}{dP_c} \right)} \quad (27)$$

式(27)揭示了 Gassmann 方程的力学和声学机制, 是地震数据应用于油藏监测的理论基础, 涉及到孔隙流体压力、地层应力和地震波反射信息。



除此之外, 根据 Gassmann 方程还可以得到与式(14)相类似的结论。对于均匀线性弹性固体内部的单个或多个任意形状的孔隙空间, 有孔固体在饱和状态下的等效可压缩性(饱和体积模量的倒数)可以描述为 [14]

$$\frac{1}{K_{sat}} = \frac{1}{K_{ma}} + \frac{\phi}{K_{\phi} + \frac{K_{ma}K_f}{K_{ma} - K_f}} \quad (28)$$

式中:  $K_{sat}$  是饱和岩石的体积模量;  $K_{ma}$  为岩石基质的体积模量;  $K_f$  是孔隙流体体积模量;  $\phi$  为岩石孔隙度;  $K_{\phi}$  为干燥孔隙空间的刚度。式(28)的物理意义是饱和岩石的可压缩性由两部分构成, 一是矿物内在的可压缩性, 二是由孔隙空间和孔隙流体耦合所引起的附加可压缩性。在干燥岩石中(岩石排水状态下), 孔隙中无流体, 流体体积模量  $K_f = 0$ , 那么式(28)等价于式(14)。由此可见, 同样矿物成分和孔隙度的干燥岩石, 注入流体饱和后, 岩石的体积模量会增大, 通过比较式(14)和式(28), 饱和岩石相对于干燥岩石增加的体积模量主要取决于孔隙流体与矿物本身的耦合效应。尽管 Gassmann 方程能较精确地描述了含流体岩石弹性形变状态下的力学机制, 但是 Brown 和 Korringa (1975) [17] 认为 Gassmann 方程建立在一个重要的理论假设基础之上。

Brown 和 Korringa (1975) 放宽了 Gassmann 方程的各向同性的内在假设, 并且推导出广义的 Gassmann 方程 [17]

$$C_d - C_u = \frac{(C_d - C_m)^2}{[(C_f - C_{\phi})\phi + (C_d - C_m)]} \quad (29)$$

式中:  $C_d$  是岩石排水状态下的可压缩性,  $C_d = 1/K_{dry}$ ;  $C_u$  是岩石不排水状态下的可压缩性,  $C_u = 1/K_{sat}$ ;  $C_m$  是岩石基质的可压缩性,  $C_m = 1/K_{ma}$ ;  $C_{\phi}$  是岩石孔隙可压缩性, 与式(13)一致,  $C_{\phi} = 1/K_{\phi}^*$ ,  $K_{\phi}^*$  是孔隙体积模量;  $C_f$  是孔隙流体可压缩性,  $C_f = 1/K_f$ ,  $K_f$  是孔隙流体体积模量;  $\phi$  是岩石的孔隙度。

Brown 和 Korringa (1975) 描述了岩石在不排水的状态下, Skempton 系数  $B$  值 (Skempton, 1954) 的表达式为 [17]

$$\frac{dP_p}{dP_c} = B = \frac{(C_d - C_m)}{(C_f - C_{\phi})\phi + (C_d - C_m)} \quad (30)$$

在式(29)和式(30)中, 如果  $C_{\phi} = C_m$ , 那么式(29)就可简化为 Gassmann 方程

$$C_d - C_u = \frac{(C_d - C_m)^2}{[(C_f - C_m)\phi + (C_d - C_m)]} \quad (31)$$

同时 Gassmann 方程还可以写成

$$C_d - C_u = B(C_d - C_m) \quad (32)$$

式(31)等价于上述式(26), 式(32)等价于上述式(24)、(27)。

从 Brown 和 Korringa (1975) [17] 给出的广义 Gassmann 方程可知, Gassmann 方程是基于  $C_{\phi} = C_m$  的假设条件,  $C_{\phi}$  很难直接地测量,  $C_{\phi}$  是多孔岩石的外部 and 内部承受同样的静水压力 ( $dP_c = dP_p$ ) 时的岩石孔隙可压缩性。对于饱含流体岩石而言, 围压  $dP_c$  与孔隙压力  $dP_p$  两者相等这种现象只存在于两种情况: 第一种情况是假想岩石中的孔隙被基质充填, 岩石是一个无孔的各向同性介质, 对其施加围压  $dP_c$ , 岩石内部应力处处相等, 并且等于  $dP_c$ , 此时  $C_{\phi} = C_m$ 。在这里需要强调一点的是 Zimmerman (1991) [8] 应用应力叠

加原理推导式(9)时用了这个假设, 式(9)实际为  $C_{pp} = C_{pc} - C_\phi$ ; Nur 和 Byerlee[4]在理论上推导 Biot 和 Willis (1957)的有效应力定理[2]时也用了这个假设(附录 A)。第二种情况, 对于孔隙饱含流体的岩石, 对其施加围压  $dP_c$  会产生孔隙压力  $dP_p$ , 因为岩石骨架要分担部分压力, 也就是岩石骨架的有效应力, 那么  $dP_p$  必定是小于  $dP_c$ , 要保证  $dP_p$  与  $dP_c$  相等, 必须要额外的增加孔隙流体压力, 同时保持  $dP_c$  不变, 使  $dP_p$  与  $dP_c$  相等, 此时岩石孔隙可压缩性  $C_\phi$  与第一种情况的物理模型是不一样的。对于海底疏松未固结的沉积物, 孔隙完全与海水连通时, 围压就是与之对应深度的海水压强  $P_h = \rho_w g h$  ( $\rho_w$  是海水密度,  $g$  是重力加速度,  $h$  是海水深度), 此时海水深度增加产生的围压增量  $dP_c$  与孔隙中的流体压力增量  $dP_p$  是相等的, 但是这种物理模型不适合固结的岩石。而对于地下的沉积岩而言, 对其施加围压  $dP_c$  所产生孔隙压力  $dP_p$  两者是不相等的, 因为岩石骨架要分担部分压力(有效应力),  $dP_p$  必定是小于  $dP_c$ 。

因此根据以上的分析可知,  $C_\phi$  是一个具有理论意义的参数。Thomsen (2010 [21]; 2017 [22])讨论了  $C_\phi$ , 认为 Gassmann 方程[3]应该修正为 Brown 和 Korrington (1975)提出的广义 Gassmann 方程式(29) [16], 但是在广义 Gassmann 方程式(29)中,  $C_\phi$  是一个不确定的参数, 限制了其自身在实践中的应用价值。Hart 和 Wang (2010)根据 Berea 砂岩和 Indiana 灰岩的实验室测量结果发现, 当岩石在较高的有效应力状态下(大于 5 MPa),  $C_\phi = C_m$  是有效的, 此时岩石呈现为线性弹性形变[17]。对于地下的沉积岩而言, 埋藏深度超过 600 米, 岩石的有效应力基本能达到 5 MPa 以上, 这一结果可以根据地层的平均密度估算得到。虽然 Thomsen (2010 [21]; 2017 [22])对 Biot-Gassmann 原理(Biot, 1956 [23]; Gassmann, 1951 [3])的有效性所持有的质疑略显犀利, 但是 Wang 等人(2016) [19]根据 Pickett (1963) [20]和他人的实验结果, 干燥岩石的泊松比常常近似地等于矿物的泊松比, 或  $K_{dry}/K_{ma} = \mu_{dry}/\mu_{ma}$  (Mavko *et al.*, 1998, p. 244) [14]的关系联立 Biot-Gassmann 原理推导出一种新的估算岩石基质体积模量  $K_{ma}$  和干燥岩石体积模量  $K_{dry}$  的方法, 其计算结果与理论非常吻合, 这说明 Biot-Gassmann 原理在实践应用中具有重要的价值。笔者认为上述  $C_\phi$  是一个值得研究的参数, 在这里之所以引入关于  $C_\phi$  的讨论, 主要目的是力求本文所涉及到的理论来源更具有原滋原味, 争取能起到抛砖引玉的作用。

## 5. 结论

Terzahi (1923)的有效应力定理[1]描述了地表饱和土壤的孔隙流体与土壤骨架(土壤骨架相当于排水状态下的多孔土壤)分担围压的力学机制, 但是其应变与应力关系是模糊的, 难以从土壤的三维力学模型解释其应变与应力的关系。Biot 和 Willis (1957) [2]提出的有效应力定理能从理论上解释岩石围压增加的过程中, 孔隙流体压力保持不变时岩石的应变与应力的关系, 并且 Biot 和 Willis (1957)提出的有效应力定理能解释 Terzahi (1923)的有效应力定理成立的条件, 对于地表的饱和土壤而言, 土壤骨架的体积模量  $K_{dry}$  要远小于土壤矿物颗粒的体积模量  $K_{ma}$  ( $K_{dry}/K_{ma} \approx 0$ ), 因此有效应力系数  $n \approx 1$ , Biot 和 Willis (1957)的有效应力定理式(2)可简化为 Terzahi(1923)的有效应力定理式(1)。

Biot 和 Willis (1957)提出的有效应力定理[2]描述了饱和多孔岩石在孔隙压力保持不变的情况下岩石应变与应力的关系, 饱和岩石在围压  $P_c$  不断增加的过程中, 要保持孔隙流体压力  $P_p$  不变, 岩石孔隙流体必须与外界连通, 排出部分流体才能保证孔隙流体压力不变(释放多余的压力)。从理论的严密性方面来讲, Biot 和 Willis (1957)的有效应力定理[2]是不足以描述孔隙不连通(非渗透)或者孔隙与外界不连通的饱和岩石的力学机制的, 如果岩石孔隙不连通, 意味着孔隙流体与外界不连通, 当围压  $P_c$  不断增加时, 孔隙内的部分流体无法排出, 多余孔隙压力无法得到释放, 随着围压  $P_c$  不断增加, 孔隙流体压力  $P_p$  不断增大。

Gassmann 方程[3]描述了饱和岩石在不排水的状态下(孔隙流体质量不变), 围压增量  $dP_c$  所引起孔隙压力增量  $dP_p$  的这一力学机制, 在数学上是孔隙压力  $P_p$  对围压  $P_c$  的导数。事实上, 对于饱和岩石, 孔隙流体与外界不连通时(孔隙流体质量不变), 在围压  $P_c$  不断增加的过程中, 孔隙压力  $P_p$  逐渐增大, 岩石骨



架(相当于排水状态下的岩石)和孔隙流体如何分担围压的问题并未得到完全地解决, Gassmann 方程只是确定了孔隙压力增量  $dP_p$  与围压增量  $dP_c$  的关系  $dP_p/dP_c = B$ , 而不是孔隙压力  $P_p$  与围压  $P_c$  的关系。

## 基金项目

中石化股份公司项目“古近系油藏地球物理识别技术研究”(P18051-2)和“储层流体的地震响应机理与油气判识”(P18051-3)联合资助。

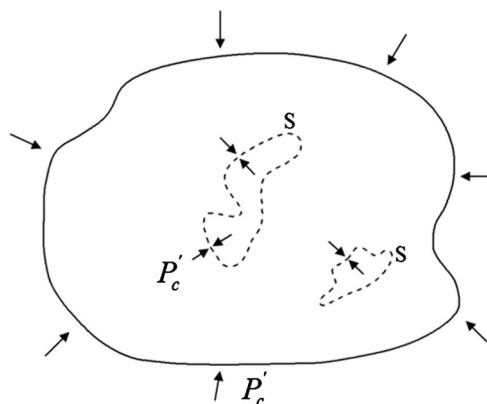
## 参考文献

- [1] Terzaghi, K. (1943) Theoretical Soil Mechanics. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken.  
<https://doi.org/10.1002/9780470172766>
- [2] Biot, M.A. and Willis, D.G. (1957) The Elastic Coefficients of the Theory of Consolidation. *Journal of Applied Mechanics*, **24**, 594-601.
- [3] Gassmann, F. (1951) Über die Elastizität poroser Medien. *Veierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, **96**, 1-23.
- [4] Sarker, R. and Batzle, M. (2008) Effective Stress Coefficient for North Sea Shale: An Experimental Study. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 1620-1624.
- [5] Nur, A. and Byerlee, J.D. (1971) An Exact Effective Stress Law for Elastic Deformation of Rocks with Fluids. *Journal of Geophysical Research Atmospheres*, **76**, 6414-6419. <https://doi.org/10.1029/JB076i026p06414>
- [6] Biot, M.A. (1941) General Theory of Three-Dimensional Consolidation. *Journal of Applied Physics*, **12**, 155-164.  
<https://doi.org/10.1063/1.1712886>
- [7] Skempton, A.W. (1954) The Pore Pressure Coefficients A and B. *Géotechnique*, **4**, 143-147.  
<https://doi.org/10.1680/geot.1954.4.4.143>
- [8] Zimmerman, R.W. (1991) Compressibility of Sandstones: Developments in Petroleum Science, Vol. 29. Elsevier Science Publishing Company Inc., Amsterdam.
- [9] Fatt, I. (1958) Compressibility of Sandstones at Low to Moderate Pressures. *Bulletin of the AAPG*, **42**, 1924-1957.
- [10] Geertsma, J. (1973) Land Subsidence above Compacting Oil and Gas Reservoirs. *SPE Journal of Petroleum Technology*, **25**, 734-744. <https://doi.org/10.2118/3730-PA>
- [11] Hall, H.N. (1953) Compressibility of Reservoir Rocks. *Petroleum Transactions of the AIME*, **198**, 309-311.  
<https://doi.org/10.2118/953309-G>
- [12] Green, D.H. and Wang, H.F. (1986) Fluid Pressure Response to Undrained Compression in Saturated Sedimentary Rock. *Geophysics*, **51**, 948-956. <https://doi.org/10.1190/1.1442152>
- [13] Walsh, J.B., Brace, W.F. and England, A.W. (1965) Effect of Porosity on Compressibility of Glass. *Journal of the American Ceramic Society*, **48**, 605-608. <https://doi.org/10.1111/j.1151-2916.1965.tb14687.x>
- [14] Mavko, G., Mukerji, T. and Dvorkin, J. (1998) The Rock Physics Handbook—Tools for Seismic Analysis in Porous Media. Cambridge University Press, Cambridge.
- [15] Jaeger, J.C., Cook, N.G.W. and Zimmerman, R.W. (2007) Fundamentals of Rock Mechanics. 4th Edition, Blackwell Publishing Ltd, Malden.
- [16] Brown, R.J. and Korrington, J. (1975) On the Dependence of the Elastic Properties of a Porous Rock on the Compressibility of the Pore Fluid. *Geophysics*, **40**, 608-616. <https://doi.org/10.1190/1.1440551>
- [17] Hart, D.J. and Wang, H.F. (2010) Variation of Unjacketed Pore Compressibility Using Gassmann's Equation and an Overdetermined Set of Volumetric Poroelastic Measurements. *Geophysics*, **75**, N9-N18.  
<https://doi.org/10.1190/1.3277664>
- [18] Muskhelishvili, N.I. (1963) Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groninger, Netherlands, 67-68.
- [19] Wang, H.S. and Hu, T.Y. (2016) Estimation of the Effective Stress Coefficient for Multilithology. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 3200-3204. <https://doi.org/10.1190/segam2016-13865959.1>
- [20] Pickett, G.R. (1963) Acoustic Character Logs and Their Applications in Formation Evaluation. *Journal of Petroleum Technology*, **15**, 659-667. <https://doi.org/10.2118/452-PA>
- [21] Thomsen, L. (2010) On the Fluid Dependence of Rock Compressibility: Biot-Gassmann Refined. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 2447-2451. <https://doi.org/10.1190/1.3513346>

- 
- [22] Thomsen, L. (2017) Fluid Dependence of Rock Compressibility, Post Biot-Gassmann. *SEG Technical Program Expanded Abstracts*, 3690-3694. <https://doi.org/10.1190/segam2017-17496120.1>
- [23] Biot, M.A. (1956) Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range; II. Higher-Frequency Range. *Journal of the Acoustical Society of America*, **28**, 168-191. <https://doi.org/10.1121/1.1908239>

### 附录 A:

Nur和Byerlee (1957) [5]对Biot和Willis (1957) [2]提出的有效应力定理进行了理论推导,假定有一个具有任意形状、孔隙互相连通的固体材料各向同性集料,承受一个围压 $P_c$ 和一个均匀的孔隙压力 $P_p$ ,压缩方向为正方向。该应力状态可从概念上分两步完成:第一步,施加孔隙压力 $P_p$ 和一个与之相等的围压 $P'_c$ ,即 $P'_c = P_p$ ;第二步,施加剩余的围压 $P''_c = P_c - P_p$ ,对孔隙压力不做任何进一步改变。如果现在假设集料在 $P_c$ 的压力范围内呈线性弹性,那么可以将这两步导致的应变场进行叠加。



**Figure A1.** A homogeneous aggregate with pores (The lines  $S$  represent the surfaces of the pores that are subject to a pore pressure that is equal to the confining pressure)

**图 A1.** 一个具有孔隙的各向同性集料(线  $S$  代表孔隙的表面,其承受的孔隙压力等于围压)

在分两步进行施加围压的时候,保持孔隙压力 $P_p$ 不变,仅仅由围压 $P''_c$ 导致集料的体积应变 $\theta''$ 为

$$\theta'' = \beta P''_c = \beta P_c - \beta P_p \tag{A-1}$$

式中: $\beta = 1/K$ 为干燥集料的有效压缩系数。

同时假定有一个相等集料,所有的孔隙都被固体充填,并且假定内切表面为 $S$ (图A1),在多孔集料中相当于孔隙的边界。如果假定固体是各向同性的(如忽略粒间应力偏差),外部围压 $P'_c$ 在固体中导致一个相等的静水压力 $P'_c$ 。固体的体积应变 $\theta'_s$ 为

$$\theta'_s = \beta_s P'_c \tag{A-2}$$

式中: $\beta_s = 1/K_s$ 为无孔隙固体的压缩系数(岩石基质的压缩系数)。正交于内切边界 $S$ 的压力等于 $P'_c$ 。假如现在去掉内切区域内的材料,用流体替代,仍然保持孔隙压力 $P'_p$ 等于 $P'_c$ 。现在对应力边界值使用唯一性定理(Mushkelishvili, 1963) [18]。定理规定当法向应力被指定在所有边界上时唯一可确定的是弹性固体的形变。因为用流体代替固体夹杂物没有改变 $S$ 上的应力,固体的形变仍然不变。因此,体积应变 $\theta'$ 等于 $\theta'_s$ ,即

$$\theta' = \theta'_s = \beta_s P'_c \tag{A-3}$$

结合以上公式,总应变为

$$\theta = \theta' + \theta'' = \beta P_c - (\beta - \beta_s) P_p \tag{A-4}$$

或按照体积模量

$$\theta = \frac{1}{K} P_c - \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) P_p \tag{A-5}$$

式中： $K$ 为干燥集料的体积模量； $K_s$ 为固体本身内在的体积模量。式(A-5)支持所有呈线性弹性具有连通孔隙的各向同性集料。在上述推导过程中，饱和岩石在围压的作用下孔隙压力是保持不变，孔隙介质形变是由干燥集料的体积模量 $K$ 来描述的，因此饱和岩石的总应变相当于干燥集料的总应变，干燥集料分担的是有效应力，因此有效应力 $P_e = K\theta$ ，那么式(A-5)可以写成

$$\frac{1}{K} P_e = \frac{1}{K} P_c - \left( \frac{1}{K} - \frac{1}{K_s} \right) P_p \quad (\text{A-6})$$

式(A-6)等价于Biot和Willis (1957)提出的有效应力定理。

#### 知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2163-3967，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[ag@hanspub.org](mailto:ag@hanspub.org)