

# Theoretical Research on Bifurcation Characteristics of Hodgkin-Huxley Neuron System

Sheng Gao, Jiqian Zhang\*, Shuoqiao Xie, Jiansheng Zhang, Shoufang Huang

College of Physics and Electronic information, Anhui Normal University, Wuhu Anhui  
Email: \*zhangcdc@ahnu.edu.cn

Received: Jul. 4<sup>th</sup>, 2017; accepted: Jul. 31<sup>st</sup>, 2017; published: Aug. 3<sup>rd</sup>, 2017

---

## Abstract

In this paper, by using the coupling Hodgkin-Huxley (HH) neural model, the bifurcation characteristic of neurons affected by noise, coupling strength, as well as system scale, is studied by computer simulation. It is found that, on the one hand, in the coupling system with certain scale and coupling strength, the bifurcation current of neurons may decrease with the increasing strength of noise, and this indicates that the appropriate noise can improve the response ability to the external weak signal. On the other hand, the bifurcation point will increase with the coupling strength, while will reduce with the increase of the number of coupling units. These indicate that the appropriate system scale and coupling strength are beneficial to the transmission of information. A better understanding of bifurcation characteristics is helpful to understand the regulation and internal mechanism of these factors on the dynamics of the system. The results will provide new insights for understanding the complex functions of the brain neural network and the relationship between the pathology and the state of the brain.

## Keywords

HH Neuron, Noise, Coupled System, System Scale

---

# Hodgkin-Huxley神经元体系分岔特性的理论研究

高升, 张季谦\*, 谢朔俏, 张健生, 黄守芳

安徽师范大学, 物理与电子信息学院, 安徽 芜湖  
Email: \*zhangcdc@ahnu.edu.cn

---

\*通讯作者。

文章引用: 高升, 张季谦, 谢朔俏, 张健生, 黄守芳. Hodgkin-Huxley 神经元体系分岔特性的理论研究[J]. 生物物理学, 2017, 5(3): 17-23. DOI: 10.12677/biphy.2017.53003

收稿日期：2017年7月4日；录用日期：2017年7月31日；发布日期：2017年8月3日

## 摘要

本文采用Hodgkin-Huxley (HH)神经元耦合系统为研究对象，通过计算机仿真模拟探讨体系内外环境中的噪声、耦合强度及系统尺度等因素对神经细胞分岔特性的影响。研究发现，一方面，在确定系统尺度和耦合强度的耦合体系中，增加噪声强度能够使神经元的分岔临界电流值降低，这表明适当的噪声有利于提高神经系统对外部微弱信号的响应能力。另一方面，耦合强度的增加会使得分岔点相应增大，而耦合单元数的增加则会使分岔点有所降低，表明合适的系统尺度和耦合强度有利于信息的传递。对分岔特性的深入了解，有助于理解这些因素对体系动力学行为调控作用规律和内在机理。其成果将为了了解大脑神经网络的复杂功能以及与病理状态之间的关系提供新的启示。

## 关键词

HH神经元，噪声，耦合系统，系统尺度，分岔特性

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

神经元是神经系统的基本组成单位，它具有传递信息、处理信息、整合信息的能力。大量神经元通过不同的耦合连接构成庞大的神经元系统。人们研究发现，信息在神经系统中编码与传递，不仅与神经元的放电序列以及动力学行为密切相关，而且还会受到各种内外环境因素的影响。其中引起科研工作特别关注的是，分岔现象在神经系统中的信息传递、同步响应，状态变化等过程都有十分重要的意义。当神经元体系控制参数发生变化时，会形成同步、混沌、分岔[1] [2] [3]等现象，这都会导致神经系统的动力学特征由一种状态向另一种状态转变，最终会对体系的动力学行为起到十分重要的调控作用。

众所周知，神经元体系内外环境中存在诸多作用因素，包括各类噪声扰动，不同频率的信号刺激等等。人们研究发现，这些外界因素的扰动对生物体的作用并不都是有害，生物体系有时会进行自适应的调整，以便对其做出最优响应。例如，噪声扰动可以提高体系对外刺激的响应能力和选择效应，可以增强各种同步现象，可以诱导各类随机共振现象[4] [5] [6] [7] [8]。不仅如此，系统的耦合尺度大小外部的刺激信号等等都对体系的动力学行为有至关重要的调节作用[9] [10] [11]。这些行为过程都伴随着体系的分岔过程，因此，有必要深入研究环境扰动等因素对复杂的神经元体系的分岔特性调节作用。

本文中，重点考察外部各类刺激因素对神经元本身的分岔行为的影响。

## 2. 模型与方法

在本文中我们以 HH 神经元为研究对象[12]，考察噪声等因素对神经元系统的分岔点的影响，采用双向链式耦合方式。其中，每个神经元之间都是双向耦合，动力学方程如下[10]：

$$C \frac{dV_i}{dt} = -g_{Na} m^3 h (V_i - V_{Na}) - g_K n^4 (V_i - V_K) - g_L (V_i - V_L) + I_{ext} + g \sum_{i=0}^{N-1} (V_{i+1} - V_i) + \xi(t) \quad (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_x(V)(1-x) - \beta_x(V)x \quad x \in m, h, n \quad (2)$$

其中:

$$\alpha_m(V) = \frac{0.1(25-V)}{\exp\left(\frac{25-V}{10}\right) - 1}, \quad \beta_m(V) = 4 \exp\left(-\frac{V}{18}\right), \quad \alpha_h(V) = 0.07 \exp\left(-\frac{V}{20}\right),$$

$$\beta_h(V) = \frac{1}{\exp\left(\frac{30-V}{10}\right) + 1}, \quad \alpha_n(V) = \frac{0.01(10-V)}{\exp\left(\frac{10-V}{10}\right) - 1}, \quad \beta_n(V) = 0.125 \exp\left(-\frac{V}{80}\right) \quad (3)$$

式中  $i = 0, 1, 2, \dots, N-1$ , 其中  $g \sum_{i=0}^{N-1} (V_{i+1} - V_i)$  为耦合项,  $g$  是耦合强度, 它是由神经元体系的耦合方式决定的,  $\xi(t)$  即为噪声项本文中, 我们采用高斯白噪声,  $\langle \xi(t)\xi(t') \rangle = D\delta(t-t')$ , 其中  $D$  为噪声强度;  $V_i$  表示为相应神经元的膜电位,  $m, h$  为 Na 离子通道的门参数,  $n$  为控制 K 离子通道的门参数, 相应的最大电导  $g_{Na} = 120 \text{ mS/cm}^2$ 、 $g_K = 36 \text{ mS/cm}^2$ 、 $g_L = 0.3 \text{ mS/cm}^2$ ;  $c = 1 \text{ }\mu\text{F/cm}^2$  为膜电容;  $I_{\text{ext}}$  是外部刺激电流,  $V_{Na} = 115 \text{ mV}$ ,  $V_K = -12 \text{ mV}$  分别为钠离子、钾离子的反转电动势,  $V_L = 10.599 \text{ mV}$  代表的主要以氯离子形成的反转电动势。

### 3. 结果与讨论

#### 3.1. 噪声对神经元分岔特性的影响

本文中, 将外部刺激电流  $I_{\text{ext}}$  设置为分岔控制参数, 采用双向链式耦合方式, 利用四阶龙格-库塔法进行数值模拟[13], 设定时间步长为  $0.002 \text{ s}$ , 静息电位设为  $0 \text{ mV}$ , 初始门参量的值设为  $0.5$ 。在第一个神经元细胞上引入外部高斯白噪声信号, 选取体系中耦合链末端的一个神经细胞作为研究对象, 记录不同参数条件下其输出膜电压的时间序列并进行分岔分析。

我们首先考察噪声扰动对神经元细胞分岔点的影响, 分别选取不同的耦合强度, 调节外部刺激电流, 考察这个外部刺激电流的分岔值随不同噪声强度的影响。模拟结果如图 1 所示。

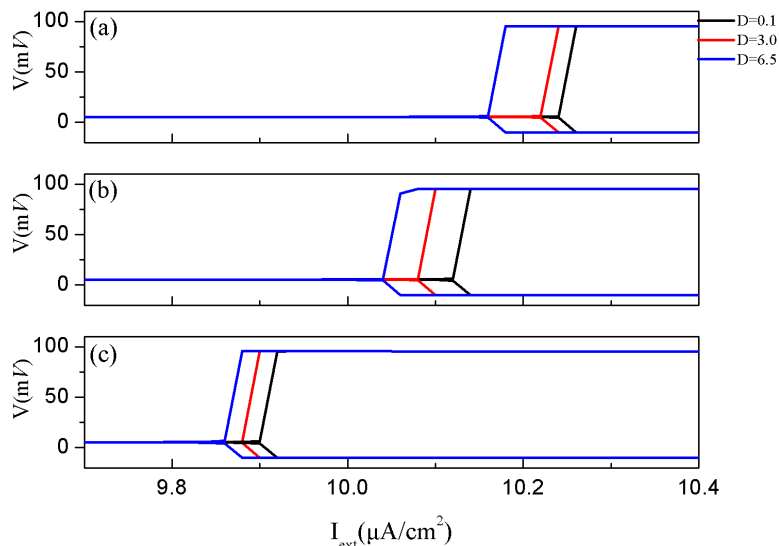
当耦合强度  $g = 0.8$  时, 我们发现, 随着噪声强度的增加, 体系的分岔点不断减低, 即临界电流的值朝着左侧移动, 如图 1(a)所示。若设置耦合强度  $g$  为  $0.5$  时, 电流的临界分岔点随噪声强度的增加仍然向左移动, 且比图 1(a)中分岔参数值的位置更向左移动。若进一步降低耦合强度为  $0.1$  时, 可以发现这种向左移动的现象更为明显, 如图 1(c)所示。这表明在一定的耦合强度下, 引入适当的外部噪声, 并调节噪声强度, 可以降低分岔点的值, 使得神经元对外界刺激的响应能力有所提高。

为了更全面了解噪声对分岔临界电流值的影响。在模拟过程中, 选取不同的耦合强度  $g = 0.1, 0.5, 0.8$  等, 设神经元数目为  $N = 50$  为例进行分析, 得到如图 2 所示结果。

从图中可以看出, 当耦合强度  $g = 0.8$  时, 不断增加噪声强度, 体系的分岔参数会逐渐减少, 即分岔点向减小方向移动。而当  $g$  分别取  $0.5, 0.1$  时, 可以发现, 分岔点会进一步降低。可见, 在给定数量的神经元耦合体系中, 在适当的耦合强度下, 增加噪声强度可以减小体系的分岔参数值, 从而有效地提高神经元体系对外部信号的响应能力。

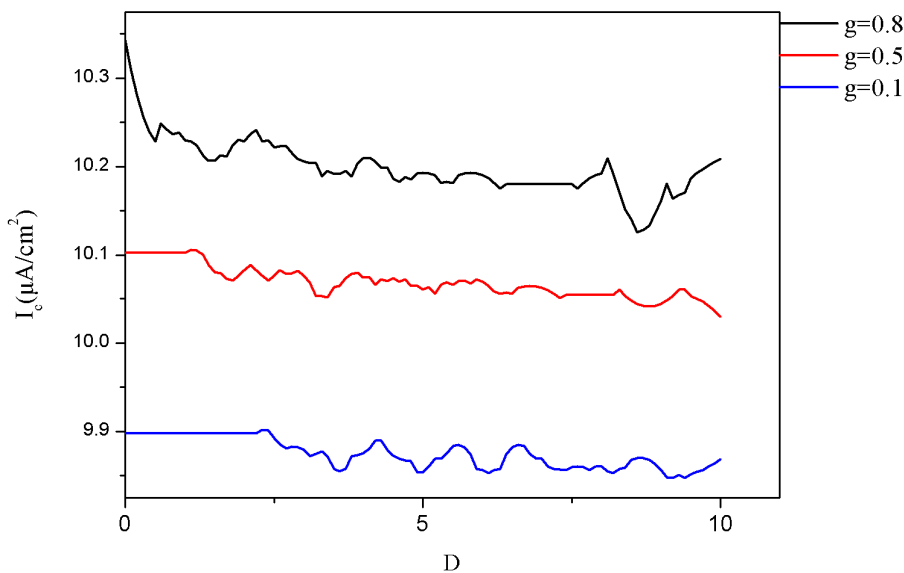
#### 3.2. 耦合强度和系统尺度对神经元分岔特性的影响

为考察系统耦合强度对分岔点的影响, 我们分别固定噪声强度, 对于不同耦合数量的体系, 按照上述方案进行数值计算, 记录相应的分岔电流值  $I_c$ , 绘出其随耦合强度的变化, 模拟结果如图 3 所示。分



**Figure 1.** Setting the three coupling intensities, diagrammatic sketch of the bifurcation about bifurcation parameters of neuron. (a)  $g = 0.8$ , (b)  $g = 0.5$ , (c)  $g = 0.1$

**图 1.** 设置有代表性的三个耦合强度，神经元分岔参数随噪声强度变化示意图。(a)  $g = 0.8$ , (b)  $g = 0.5$ , (c)  $g = 0.1$

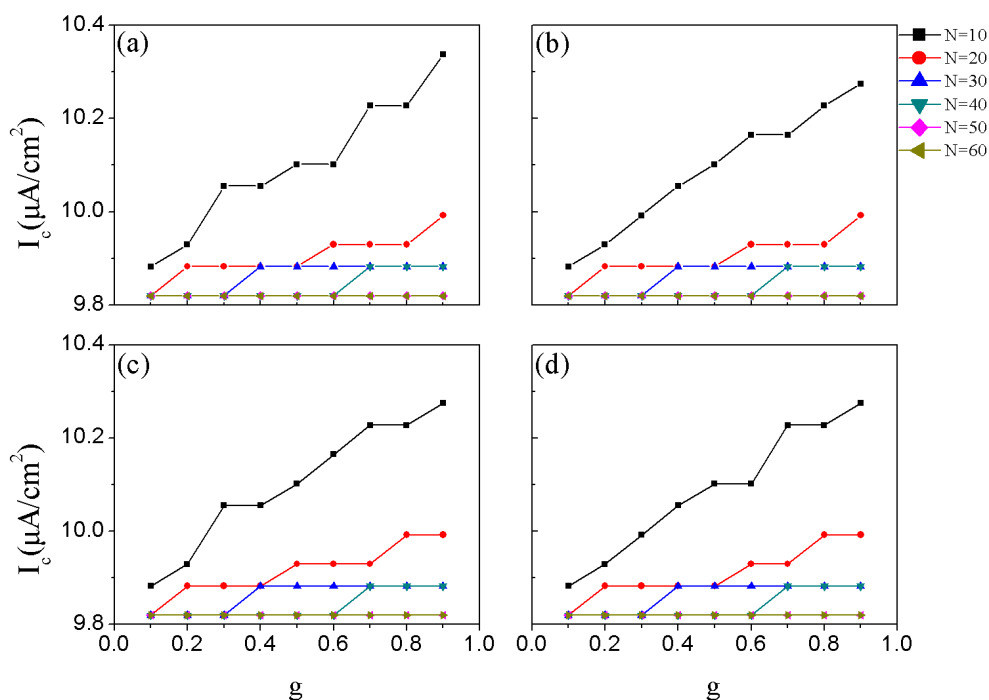


**Figure 2.** Under three typical coupling strengths, the effect of noise intensity on the critical bifurcation current value  $I_c$  of neuron

**图 2.** 在三个有代表性的耦合强度下，噪声强度对神经元分岔临界电流值  $I_c$  的影响示意图

别设置耦合单元数量为 10, 20, 30, 40, 50, 60 等，从图中可以看出，当耦合强度增加时，分岔电流值  $I_c$  都有一定程度的增加。

从图 3(a)中可以看出当  $D = 0.2$ ,  $N$  分别等于 10、20、30、40 时，随耦合强度的增加体系的分岔点参数值都有所增加，特别是对  $N = 10$  的网络，增加的幅度较大，而随着  $N$  的增加，分岔参数值增加的幅度逐步降低。当耦合数目增加且大于 60 时，分岔参数值  $I_c$  减小到较小的值，即  $I_c$  的值为  $9.8 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ ，且随



**Figure 3.** Under different noise intensity, schematic diagram of bifurcation parameters with the variation of coupling strength. The noise intensity respectively is (a)  $D = 0.2$ , (b)  $D = 0.5$ , (c)  $D = 0.8$ , (d)  $D = 1.5$ . The size of  $N$  in different graphs corresponding to different system scales

**图 3.** 不同噪声强度下, 分岔参数值随耦合强度变化示意图。噪声强度分别为: (a)  $D = 0.2$ , (b)  $D = 0.5$ , (c)  $D = 0.8$ , (d)  $D = 1.5$ 。图中不同曲线对应不同的体系尺度  $N$  的大小

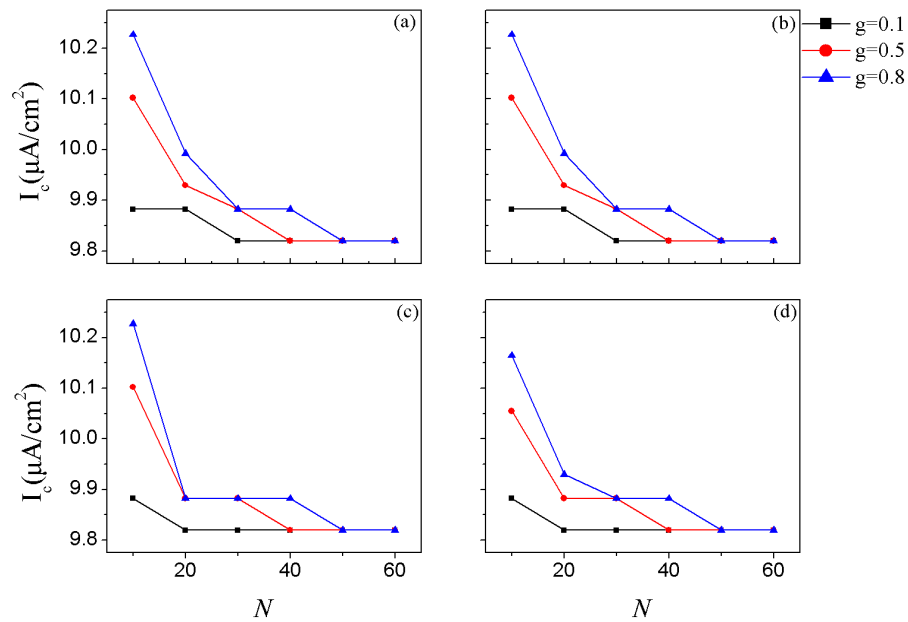
着耦合强度的增加, 基本维持在 9.8 值上保持不变。当增加噪声强度分别为  $D = 0.5$ 、 $D = 0.8$ 、 $D = 1.5$  时, 均可观察到有类似的规律。结果分别如图 3(b)~(d) 所示。

研究中发现, 系统尺度对神经元系统的分岔特性同样具有一定的调控作用。为考察该问题, 分别固定噪声强度和耦合强度, 考察系统尺度大小(耦合单元数)对神经元分岔临界电流值的影响, 得到如图 4 所示的结果。从图 4(a) 中可以看出, 当  $D = 0.2$ ,  $g = 0.1$  时, 随着体系耦合单元数目的增加, 即系统尺度的增加, 神经元的分岔临界电流值逐渐减小; 且对于耦合强度较大的系统中, 减小的幅度越迅速。最终, 当耦合数目增加到一定值以后, 例如  $N = 50$ , 神经元的分岔点将降低到最低值, 即  $I_c = 9.8 \mu\text{A}/\text{cm}^2$ , 且保持不变。当分别设置噪声强度为  $D = 0.8$ , 3.0, 6.0 时, 同样能观察到类似的现象, 如图 4(b)~(d) 所示。上述结果表明, 系统的耦合尺度大小对神经元的分岔特性也具有一定的调节作用。

在给定的耦合单元数目的系统中, 分别设置不同的噪声强度, 同样可以观察到神经元分岔临界电流随耦合强度的变化规律, 结果如图 5 所示。从图中可以看出, 当耦合数目增加到  $N = 20$  时, 虽然随着耦合强度的增加, 分岔临界参数值略有上升, 但分岔临界参数值整体向减小方向降低不少。若耦合单元数目增加到  $N = 30, 40$  时, 分岔点将进一步降低, 如图 5(c) 和图 5(d) 所示。随着耦合单元个数的进一步增加, 当  $N > 50$  时, 并且随着耦合强度的增加, 临界电流值保持在一个较低的水平上基本不变, 即  $I_c$  的值在  $9.82 \sim 9.88 \mu\text{A}/\text{cm}^2$  之间。即神经元体系耦合数目较大时, 临界电流受耦合强度和噪声强度的调节作用就降低了。

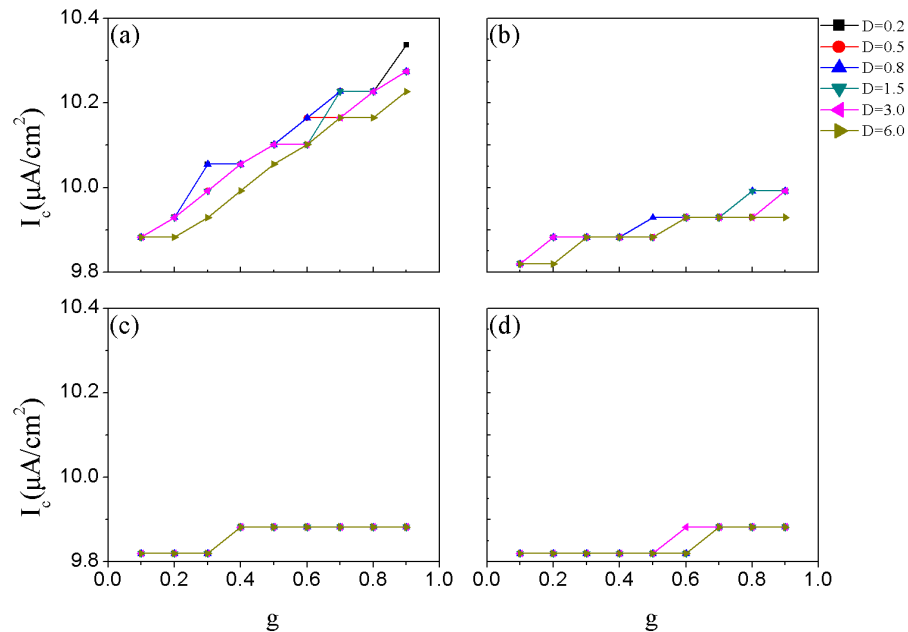
#### 4. 总结

本文中, 我们以 HH 神经元体系为研究对象, 考察了噪声扰动等因素对神经元分岔临界参数值的影



**Figure 4.** Under different coupling strengths, the effect of the system scale on the critical bifurcation current value of neuron. (a)  $D = 0.2$ , (b)  $D = 0.8$ , (c)  $D = 3.0$ , (d)  $D = 6.0$

**图 4.** 不同耦合强度下, 系统尺度对神经元分岔临界电流值的影响。(a)  $D = 0.2$ , (b)  $D = 0.8$ , (c)  $D = 3.0$ , (d)  $D = 6.0$



**Figure 5.** Under certain scale of system, Schematic diagram of bifurcation characteristics with the variation of coupling strength and noise intensity. (a)  $N = 10$ , (b)  $N = 20$ , (c)  $N = 30$ , (d)  $N = 40$

**图 5.** 一定系统尺度下, 分岔特性随耦合强度和噪声强度改变示意图(a)  $N = 10$ , (b)  $N = 20$ , (c)  $N = 30$ , (d)  $N = 40$

响。研究发现当噪声强度增加时能使神经元的分岔点的阈值降低, 表明适当的噪声扰动可以提高体系对外部刺激的响应能力即灵敏度。相反地, 对于给定系统尺度和噪声强度下, 分岔参数  $I_c$  随耦合强度的增

加而增加, 这将降低系统对外界的相应能力。

研究还发现增加系统的耦合单元数目也有助于降低分岔参数的阈值, 不过, 当体系的尺度大小增加到一定程度, 分岔临界电流值保持在一个较低的水平上基本不变, 此时, 神经元的分岔临界电流值不再随噪声强度和耦合强度的改变而变化。表明系统的尺度和耦合强度也需要保持在合适的水平, 才能够增加系统对外界的信号刺激的响应能力。

## 致 谢

感谢安徽省自然科学基金项目(1508085MA15), 高校学科(专业)拔尖人才学术资助重点项目(gxjZD2016014)资助。

## 参考文献 (References)

- [1] Zhang, J.Q., Huang, S.F., Pang, S.T., Wang, M.S. and Gao, S. (2015) Synchronization in the Uncoupled Neuron System. *Chinese Physics Letters*, **12**, 9-13. <https://doi.org/10.1088/0256-307X/32/12/120502>
- [2] Zhang, J.Q., Huang, S.F., Pang, S.T. and Wang, M.S. (2016) Response Ability to External Signal Enhanced by Biological Spatial Configuration in Coupled HR Neural System. *Chinese Journal of Chemical Physics*, **27**, 265-270.
- [3] Wang, P. and Zhang, J.Q. (2010) In and Anti-Transition of Firing Patterns Induced by Random Long-Range Connections in Coupled Hindmarsh-Rose Neurons System. *Chinese Journal of Chemical Physics*, **23**, 23-29. <https://doi.org/10.1088/1674-0068/23/01/23-29>
- [4] Wang, P. and Zhang, J.Q. and Ren, H.L. (2010) Transition of Firing Patterns in a Complex Neural Network. *Scholarly Research Exchange*, **2010**, 1-6. <https://doi.org/10.3814/2010/926370>
- [5] Huang, S.F., Zhang, J.Q. and Ding, S.J. (2009) State-to-State Transitions in a Hindmarsh-Rose Neuron System. *Chinese Journal of Chemical Physics*, **26**, 29-32.
- [6] Tanabe, S.J. and Pakdaman, K. (2001) Noise-Induced Transition in Excitable Neuron Models. *Biological Cybernetics*, **85**, 269-280. <https://doi.org/10.1007/s004220100256>
- [7] Takahata, T., Tanabe, S. and Pakdaman, K. (2002) White-Noise Stimulation of the Hodgkin-Huxley Model. *Biological Cybernetics*, **86**, 403-417.
- [8] Zhang, J.Q., Liu, J.Q. and Chen, H.S. (2008) Selective Effects of Noise by Stochastic Multi-Resonance in Coupled Cells System. *Science in China Series G*, **51**, 492-498. <https://doi.org/10.1007/s11433-008-0061-2>
- [9] Zhang, J.Q. and Chen, H.S. (2008) Enhanced Synchronization of Intercellular Calcium Oscillations by Noise Contaminated Signals. *Communications in Number Theory and Physics*, **50**, 903-906.
- [10] 王业道, 张季谦, 斯小琴, 汪春道, 张恒贵. (2011) 噪声对窦房结体系钠通道电导作用的计算机仿真研究[J]. 生物物理学报, 2011, 27(5): 443-452.
- [11] Hodgkin, A.L. and Huxley, A.F. (1952) A Quantitative Description of Membrane Current and Its Application to Conduction and Excitation in Nerve. *Journal of physiology*, **117**, 500-544.
- [12] Pankratova, E.V., Polovinkin, A.V. and Mosekilde, E. (2005) Resonant Activation in a Stochastic Hodgkin-Huxley Model, Interplay between Noise and Suprathreshold Driving Effects. *European Physical Journal B*, **45**, 391-397.
- [13] Zhang, S.Y., Deng, Z.C. and Li, W.C. (2007) A Precise Runge-Kutta Integration and Its Application for Solving Non-linear Dynamical Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **184**, 496-502. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.054>

**期刊投稿者将享受如下服务：**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：[biphy@hanspub.org](mailto:biphy@hanspub.org)