Hans 汉斯

整式代数方程统一解法原理

金瑞生 著

汉斯出版社

整式代数方程统一解法原理

金瑞生 著

Hans汉斯

整式代数方程统一解法原理

出版发行：汉斯出版社
ISBN: 978-1-64997-803-5
出版时间：2024年3月
字数：534千字
Web: http://www.hanspub.org/
地址：1521 Melwood Drive, Glendale, CA 91207, USA

有任何疑问请发邮件至：book@hanspub.org

整式代数方程统一解法原理

金瑞生

金华市中心医院　浙江金华 321000

摘　要: 本书要点之一是用新根号体系代替正整数次方根作为解整式代数方程所要用的数学符号。首先设立方程总根号,建立以总根号为原型的允许有重元集合的新集合论,用于证明方程总根号的相关运算性质和指导方程解法基础理论研究,再利用施图姆定理设立实根号,利用卢斯判别法设立方程分根号等,并确立相应的计算方法。要点之二是创建统一解法原理。新根号体系的建立需要满足各种特定条件,将它们作为代数课题纳入到统一解法的理论研究中,结合多项式相关知识创建代数学意义上构造性的整式代数方程统一解法原理。

关键词: 整式代数方程,总根号,允许有重元集合;实系数代数方程,施图姆序列,实根号;实系数多项式方程组;一对复根,一对复数解;中点;互素点;严格对称根全集,单层对称根全集,普通对称根全集;同实部复根,同实部根全集,实部点;卢斯判别法;分根号;复系数代数方程;一对对偶复根,一对对偶复数解;对影中点;卢-金判别法

前 言

根号是解整式方程所要用的数学符号。根据阿贝尔的证明和 Galois 的群论，一般五次及五次以上代数方程没有公式解，即用根式去求解一般五次及五次以上方程的公式解的道路是不存在的[1]。作者究其原因有二：一是正整数次方根的局限；二是公式解的限制。

随着计算机的应用，多项式代数的研究由建立存在性理论和方法开始向构造性和算法化方向转变，它的各种有效算法相继出现[2]，多项式求根的各种算法更是层出不穷[3]，但至今未能形成系统的多项式代数求根理论，高次方程求根问题还远未解决。

数学符号是数学的语言。既然原根号存在局限，那么可设立新根号，计算方法依据求根算法确立，用新根号代替原根号作为解整式方程所要用的数学符号，从新根号这一新的数学语言出发构建方程解法基础理论。

作者探明的方向：一是建立适合整式方程的新根号体系。首先设立方程总根号，建立以总根号为原型的允许有重元集合的新集合论，用于证明方程总根号的相关运算性质和指导方程解法基础理论研究，再利用施图姆定理设立实根号，利用卢斯判别法设立方程分根号等，并确立相应的计算方法。二是创建统一解法原理。新根号体系的建立需要满足各种特定条件，将它们作为代数课题纳入到统一解法理论研究中，结合多项式相关知识创建代数学意义上构造性的统一解法原理。

作者在这二个方面进行了长期不懈的探索和尝试，不断改进数学符号和表述方式，经长期积累沉淀终于成功，形成了相对完整、系统的整式代数方程统一解法原理。这一原理的形成是作者以新根号体系为媒介和工具将施图姆、卢斯等数学家的求根思想转化为代数课题进行全面系统研究并逐步理论化的产物。

全文研究整式代数方程在复数域里的求根问题，由三个部分组成：

预章 整式代数方程总根号的设立与新集合论的形成；

第一篇 实系数代数方程统一解法原理；

第二篇 复系数代数方程统一解法原理。

下面简略介绍各部分内容以及篇章分工：

预章首先设立方程总根号，作为由方程所有复根(含重根)组成的集合，其元素(复根)允许有重元，元的重数须与根的重数相等，要证其相关运算性质，Cantor 集合论已不适用。于是建立了以总根号为原型的允许有重元集合的新集合论，重新定义子集、集合相等、并集、差集、交集、全集等概念，研究了有限集合的运算律，并和交运算的交换律、结合律均成立，分配律、幂等律、吸收律各两个等式一个成立，另一个不成立(有条件成立)。有关结论表明：新集合论可在方程解法基础理论研究中发挥重要作用。其次研究了复平面的平移变换对方程根及其总根号的影响，并对总根号与正整数次方根的有效融合和转换进行了初步研究。此外，预章各节还穿插研讨其它诸多知识点，以方便之后各篇章使用。

第一篇实系数代数方程统一解法原理，第一章方程实根统一解法原理。首先，根据施图姆定理设立方程实根号，并确立计算方法，随后探讨实根号的基本性质和根的重数计算。方程的重实根可在施图姆序列扩展型内部进行实根号运算，根的重数就等于该扩展型在该实根隔离区间两个端点的变号数之差，统一解法随之完成：每个实根用一个实根号就可表达，根的重数可简单计算并用符号表示，于是实系数多项式的实根因式(包括重数)也能简洁表达。最后探讨实根号的一般性质，为之后的理论研究做准备，在探讨中新集合论和 Cantor 集合论相辅相成取得良好成效。解决了任意次方程求实根问题，就为解决共轭复根问题打下坚实基础。

第二章方程复根的求解路径之一。首先通过 $f(z)=f(x+iy)=i^n[f_0(x,y)-if_1(x,y)]$ 将原方程(n 次)与实系数二元多项式方程组相联系($f_0(x,y)$ 和 $f_1(x,y)$ 分别为 y 的奇偶函数)，又将二元方程组转化成恒定元为 $x=x_0$ 的一元方程组，引入最大公因式方程。探讨方程根和方程组解的性质，研究原方程根与方程组解和最大公因式方程根的关系，据此定义本篇重点数学概念：一对复根、一对复数解，方程组一对复数解 (x_0,y_0)， $(x_0,-y_0)$ 与原方程一对复根 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 对应，其中 x_0 称为 z_1， z_2 的中点，从而使研究获得并进入了更广泛的领域。最后将二元方程组的解与结式方程的根相联系，结式方程(n^2 次)是以原方程的所有复根以及所有成对复根的中点为根的方程，它是实系数代数方程。本章彻底理清了原方程根与二元方程组解及结式方程根这三者之间的关系，最大公因

式方程的次数与结式方程根的重数关系，在研究中新集合论起到了关键作用。

第三章施图姆序列之一。简写恒定元为实数 a 的方程组，作施图姆序列，再将第二章研究成果引入并作提升，为前三节内容，还依据序列最后多项式的次数定义原方程的互素点与非互素点概念，重要结论：**在复平面实轴上任意取一点，若它是结式方程的实根，则该点是原方程的非互素点，代表原方程的实系数多项式在非互素点可以分解成两个实系数多项式的乘积；否则就是原方程的互素点，原方程在通过互素点并且与虚轴平行的直线上没有根。**随后几节为原方程量身定制了在复平面上关于点 a 严格对称的根全集(及非 a 根全集)、单层对称的根全集、普通对称的根全集的概念。在对这些根全集的研究中，新集合论展现了神奇的魔力，形成了相应的性质，并得到了很多重要的结论，使它们成为统一解法原理不可或缺的重要组成部分。

第四章方程复根的求解路径之二。$f_0(x,y)$ 或 $f_1(x,y)$ 提取并消去一个 y 因子变成实系数二元多项式 $f_0^*(x,y^2)$, $f_1^*(x,y^2)$ ，本章方程组一个复数解 (x_0,y_0^2) 与原方程一对复根 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 对应，又将二元方程组转化成恒定元为 $x=x_0$ 的一元方程组，引入最大公因式方程。最后将二元方程组的解与结式方程的根相联系，本章结式方程($\frac{n(n-1)}{2}$次)是以原方程所有成对复根的中点为根的方程。本章彻底理清了原方程成对复根与二元方程组解及结式方程根这三者之间的关系，最大公因式方程的次数与结式方程根的重数关系，在研究中新集合论也起到了关键作用。

第五章施图姆序列之二。简写恒定元为实数 a 的方程组，作施图姆序列，再将第四章研究成果引入并作提升，为前三节内容，重要结论：**在复平面实轴上任意取一点，若它是第四章结式方程的实根，代表原方程的实系数多项式在该点也可以分解成两个实系数多项式的乘积。**随后几节为原方程量身定制了在复平面上关于点 a 成对严格对称的根全集(及非 a 根全集)、成对单层对称的根全集、成对普通对称的根全集的概念。新集合论在对这些根全集的研究中也展现了魔力，形成了相应性质，得到了很多重要的结论。

第六章方程间的多项式关系式以及实根号运算。通过对行列式的研究获得代表原方程的多项式与第二、四章结式的关系式，它反映了原方程与两个结式方程的关系；随后研究该关系式的实根号运算；对原方程的互素点与非互素点作进一步讨论。第二、

三章和第四、五章分别是第一种和第二种解法的理论基础，第六章研究两种解法的顶层链接。

第七章方程同实部复根的统一解法原理。首先将原方程的非互素点分成复根的实部点与非实部点，重要结论：**原方程在通过复根实部点并且与虚轴平行的直线上至少有一个根，而在通过非实部点并且与虚轴平行的直线上没有根。**随后运用前几章基础知识阐述原方程同实部复根的三种解法及其统一原理；最后通过论证找到了确定原方程复根所有实部点的方法：

先求出第二章结式方程所有各不相同的实根(用实根号)，它们就是原方程的所有非互素点，再弄清原方程在与结式方程某实根号上的区间相对应的带形区域内有没有根，若无根，则该实根是非实部点，舍去；若有根，则该实根是实部点，而且原方程在该区域内的所有根(含重根)都在通过该实部点并且与虚轴平行的直线上。

这个方法很重要，它也是判定复根已完成隔离的方法。最后的论证又为统一近似解法提供了理论依据。

第八章方程复根隔离的基本思想与统一解法。引进卢斯判别法与卢斯表格，结合前几章基础知识顺利找到判定原方程在与虚轴平行的任意一条直线上及其右半平面上有没有根以及有几个根的方法，进而给出判定原方程在与虚轴平行的任意一个带形区域内有没有根以及有几个根的方法，还发现：**若第二章结式方程在某区间内没有实根，则原方程在相应的带形区域内没有根。**在解决复根隔离问题后，设立了方程分根号和同实部根全集根号。

复根隔离的基本思想：首先，找到原方程所有复根的存在区域—与虚轴平行的带形区域(相应区间两个端点都是原方程的互素点并且为有限实数)，于是所有复根组成的集合可用一个分根号表示。

其次，对这个带形区域进行分割及判断，假设在相应区间内取到的分割点都是原方程的互素点，我们就可以将该区域分割成若干个带形的子区域，在每个子区域内原方程根的个数可以简单计算。若在某个子区域内根的个数为零，则把该子区域舍去，剩下的每个子区域内都含有原方程的若干个根，组成的集合可用分根号表示，然后在剩下区域相对应的区间内，判断第二章结式方程各不相同的实根个数。

(1) 若为 1，则结式方程在该区间内只有一个实根，它是原方程复根的实部点，该区域内原方程的复根都在通过该实部点并且与虚轴平行的直线上，它们具有相同的实部，于是该区域为该实部点的同实部根的隔离区域;

(2) 若大于 1，则对该区域继续进行这种分割及判断工作，直到每个子区域(都含有原方程的若干个根)相对应的区间内，结式方程各不相同的实根个数都为 1 为止，其各区域都是原方程复根各实部点的同实部根的隔离区域。

利用卢斯表格和结式方程以及施图姆定理，对原方程所有复根的存在区域所进行的这种分割判断工作，其实际效果是将原方程所有复根按实部大小进行分割、分类，并不断地将实部相等的复根归为一类的过程，而且只要经过有限多次的分割判断就能找到原方程复根所有实部点的同实部根的隔离区域，在每个隔离区域内原方程的复根都在通过实部点并且与虚轴平行的直线上，它们所组成集合可用同实部根全集根号表示。

原方程所有复根组成的集合(总根号)在复平面上分解成若干个带形区域内所有根(含重根)组成的集合(分根号)的并集后，只要再经过有限多次分割判断就能分解成原方程复根所有实部点的同实部根全集(全集根号)的并集，其中与全集根号上的区域相对应的区间就是结式方程实根号上的区间。

上述是隔离的基本思想，但要找到所有实部点的同实部根的隔离区域，还有更为便捷的方法：先求出第二章结式方程所有各不相同的实根(用实根号)，它们是原方程的所有非互素点，再从中找出原方程复根所有实部点，与实根号上的区间相对应的区域就是原方程复根实部点的同实部根的隔离区域。

卢斯表格可用来隔离复根却不能判定隔离是否已完成，用结式方程的实根号，指导复根隔离是作者独创，使隔离只要有限多次就可完成，这种巨大转变，使它克服了只能求最大实部根的缺陷，可以求原方程复根每个实部点的同实部根，从而求出所有复根，具有重要意义。

随后探求系列根号同步计算，研究同实部根全集的分类判定与统一解法的关系，使解法更加实用，最后介绍方程复根的统一近似解法。

第二篇作者成功地将实系数代数方程的研究方法、成果推广到了复系数代数方程，

定义了本篇重点数学概念：一对对偶复根、一对对偶复数解，形成了复系数代数方程统一解法原理。虽然两者在本质上有区别，但研究的思想方法却基本相同或类似，很多定理及推论也是类似的，有的甚至相同，两者的解法原理也是统一的。

整式代数方程统一解法的优点是：既构造性地验证了实系数和复系数多项式因式分解定理，又给出具体的求根方法，形式简单统一，便于学习和掌握。它克服了高次方程的实根需要绕道通过复数域才求得的弊端，还使得复根能以 $z = x + iy$ 的显性形式简洁地表达出来。

目 录

预章
整式代数方程总根号的设立与新集合论的形成

集合的概念是现代数学最基本的概念，它的观点和方法已渗透到数学的所有分支[4]。预章在建立以总根号为原型的允许有重元集合的新集合论的同时，还穿插研讨了其它诸多知识点，以方便之后各篇章使用。

§1 总根号和允许有重元的有限集合

代数方程通常指整式方程，即多项式方程。系数全为零的多项式是零多项式[5]，记为0。若$f(z)$为零多项式，则$f(z)\equiv 0$。本文多项式涵盖了所有系数在复数域中的一元多项式的全体，是复数域上的一元多项式环。由于在特定的复数域上研究，多项式知识的表述比较高等代数均可有所简略，如：

带余除法[5] 对于任意两个多项式$f(z)$与$g(z)$，其中$g(z)\neq 0$，一定有多项式$q(z)$，$r(z)$存在，使$f(z)=q(z)g(z)+r(z)$成立，其中$\deg\ r(z)<\deg\ g(z)$或者$r(z)\equiv 0$，并且这样的$q(z)$，$r(z)$是唯一决定的。

本文研究代数方程$f(z)=0$在复数域里的求根问题，在将表示复数z的平面称为z平面或复平面后，就可说是研究$f(z)=0$在z平面或复平面上的求根问题。设C为复数域，$z_0\in C$，若$f(z)$在$z=z_0$时函数值$f(z_0)=0$，则称z_0是$f(z)$或$f(z)=0$(在z平面上)的一个(复)根。显然，$f(z)$的根就是$f(z)=0$的根。

根据余数定理推论，则z_0是$f(z)=0$的根的充要条件是$(z-z_0)\mid f(z)$。

再设l为非负整数，若$(z-z_0)^l\mid f(z)$，但$(z-z_0)^{l+1}$不能整除$f(z)$，即$(z-z_0)$是$f(z)$的l重因式，则称z_0是$f(z)$或$f(z)=0$(在z平面上)的l重(复)根[5]。显然，$f(z)$的l重根就是$f(z)=0$的l重根。若$f(z)=0$至少有一个2重以上(含2重)根，则称$f(z)=0$有重根；若$f(z)=0$没有2重以上根，则称$f(z)=0$没有重根。若$f(z)=0$有重根，则$f(z)$有重因式；若$f(z)=0$没有重根，则$f(z)$没有重因式。

由代数基本定理[5]可知：任何n次代数方程$f(z)=0$在z平面上恰有n个根(重根按重数计算)。$f(z)=0$在z平面上的所有根(含重根)称为$f(z)=0$的所有复根。

设 $x_0 \in C$ 且 x_0 为常数，称为恒定元；i 为虚数单位，$i^2 = -1$。多项式 $f(z)$ 经过 $z = x_0 + iy$ 代换，$f(x_0 + iy)$ 可视为 y 的多项式，其整除具有

$f(z) = f(x_0 + iy)$ **整除性质** 设 $f(z) \neq 0$，$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z = x_0 + iy$，$z_0 = x_0 + iy_0$，l 为非负整数，则 $(z - z_0)^l \mid f(z)$ 的充要条件是：$(y - y_0)^l \mid f(x_0 + iy)$。

证明 显然 $l = 0$ 时，命题成立；下面证明 $l \geq 1$ 时，命题也成立。若 $(z - z_0)^l \mid f(z)$，则 $f(z)$ 可分解为 $f(z) = q(z)(z - z_0)^l$。$z = x_0 + iy$，$z_0 = x_0 + iy_0$，$f(z) = f(x_0 + iy)$，$q(z) = q(x_0 + iy)$，$(z - z_0) = i(y - y_0)$，$f(x_0 + iy) = i^l q(x_0 + iy)(y - y_0)^l$，故 $(y - y_0)^l \mid f(x_0 + iy)$。

反过来，若 $(y - y_0)^l \mid f(x_0 + iy)$，由带余除法，不妨设 $f(z) = q(z)(z - z_0)^l + r(z)$，其中 $r(z)$ 的次数 $< l$ 或者 $r(z) \equiv 0$，则同理可得 $f(x_0 + iy) = i^l q(x_0 + iy)(y - y_0)^l + r(x_0 + iy)$，其中 $r(x_0 + iy)$ 关于 y 的次数 $=$ $r(z)$ 的次数，故 $(y - y_0)^l \mid r(x_0 + iy)$。假如 $r(z)$ 的次数 $< l$，则 $r(x_0 + iy)$ 关于 y 的次数 $< l$，与 $(y - y_0)^l \mid r(x_0 + iy)$ 矛盾。因此 $r(z) \equiv 0$，于是 $f(z) = q(z)(z - z_0)^l$，所以 $(z - z_0)^l \mid f(z)$。】

由该性质，$z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的根的充要条件是：$(y - y_0) \mid f(x_0 + iy)$；$z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 l 重根的充要条件是：$(y - y_0)^l \mid f(x_0 + iy)$，但 $(y - y_0)^{l+1}$ 不能整除 $f(x_0 + iy)$。

显然，$z_0 = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的根充要条件是：$y \mid f(x_0 + iy)$；$z_0 = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 l 重根的充要条件是：$y^l \mid f(x_0 + iy)$，但 y^{l+1} 不能整除 $f(x_0 + iy)$。

定义 1 设 n 为非负整数，$a_0 \neq 0$，$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$，其中系数 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n$ 取实数或复数，则方程 $f(z) = 0$ 可以用 $n + 1$ 元有序数组 $(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)$ 来代表，于是将 $f(z) = 0$ 所有复根(含重根)组成的集合记作 $\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}$ (简写成 $\sqrt{f(\ )}$)，且称它为 $f(z) = 0$ 的总根号，于是

1) $n = 0$ 时，$\sqrt{(a_0)} = \phi$ (ϕ 为不含任何元素的空集)；

2) $n \geq 1$ 时，若 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)，则

$$\{z_1, z_2, \cdots, z_n\} = \sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}\ 。$$

由 $f(z) = 0$ 所有复根(含重根)组成的集合还可写成非根号形式 $\{\ z \mid f(z) = 0\ \ (z \in C)\ \}$，于是 $\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)} = \sqrt{f(\ )} = \{\ z \mid f(z) = 0\ \ (z \in C)\ \}$。

本文主张以根号取代非根号。设立总根号后，每个有次数多项式方程均有相应的总根号与之对应。作为由 $f(z)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合，总根号 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 与 Cantor 集合有本质区别。Cantor 集合元素具有确定性、互异性、无序性，但 $f(z)=0$ 会有重根，总根号 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的元素(复根)会有重元，并且元的重数必须与根的重数相等。像总根号 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 这样其元素具有确定性和无序性但没有互异性要求的集合就称为允许有重元的有限集合。

定义 2 设 A 是一个允许有重元的有限集合，l 为非负整数，若在 A 中有且仅有 l 个 a 元素，则称 a 是 A 的 l 重元素，记作 $a(l)\in A$，其中 $l=1$ 时，又称 a 是 A 的单元素，故 $l\geq 1$ 时，$a\in A$；$l=0$ 时，$a\notin A$。统计 A 元素的个数，重元素按重数计算。

显然，若 $A=\phi$，$a(l)\in A$，则 $l=0$，$a\notin A$。

设 z_0 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则在 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 中有且仅有 l 个 z_0，故 z_0 是它的 l 重元素，记作 $z_0(l)\in\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ (简写成 $z_0(l)\in\sqrt{f(\ )}$)

$l\geq 1$ 时，$z_0\in\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$；$l=0$ 时，$z_0\notin\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

显然，若 $n=0$，$z_0(l)\in\sqrt{(a_0)}=\phi$，则 $l=0$，$z_0\notin\sqrt{(a_0)}$。

z_0 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0(l)\in\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ (即 $z_0(l)\in\sqrt{f(\ )}$)。

定义 3 设 A 是一个允许有重元的有限集合，l 为正整数，若在 A 中至少有 l 个 a，则称 a 是 A 的 l 重以上(含 l 重)元素，记作 $a(\geq l)\in A$。

设 n 和 l 为正整数，z_0 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上(含 l 重)根，则在 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 中至少有 l 个 z_0，故 z_0 是 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的 l 重以上(含 l 重)元素，记作

$$z_0(\geq l)\in\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\quad (\text{简写成 } z_0(\geq l)\in\sqrt{f(\ )})。$$

定义 4 设 A 和 B 是二个允许有重元的有限集合，假如 a 是 A 的任意一个元素，若 a 是 A 的 l 重元素，就能推导出 a 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $\forall\ a\in A$，$a(l)\in A\Rightarrow a(\geq l)\in B$，则称 A 是 B 的子集，或者说 B 包含 A，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。当 A 不是 B 的子集时，通常记作 $A\not\subset B$。当且仅当 $A\subset B$ 且 $B\subset A$ 时，称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。当且仅当 $A\subset B$ 且 $A\neq B$ 时，称 A 是 B 的真子集。**规定** 空集 ϕ 是任何一个允许有重元集合的子集。

若 $a(l)\in B$，$l\geq 1$，则 $a(\geq l)\in B$。若满足条件：$\forall\ a\in A$，$a(l)\in A\Rightarrow a(l)\in B$，则 $A\subset B$。

定理 1 设 A 和 B 是二个允许有重元的有限集合，若能同时满足以下两个条件：

1) $\forall\ a \in A$，$a(l) \in A \Rightarrow a(l) \in B$；2) $\forall\ b \in B \Rightarrow b \in A$，则 $A = B$。

证明 由条件 1) 则 $A \subset B$。再证 $B \subset A$。对 $\forall\ b \in B$，$b(l) \in B$，由条件 2) 则 $b \in A$。不妨设 $b(l_0) \in A$，由条件 1) 则 $b(l_0) \in B$，于是 $l_0 = l$，$b(l) \in A$，即由 $\forall\ b \in B$，$b(l) \in B \Rightarrow b(l) \in A$，则 $B \subset A$。故 $A = B$。】

元素与集合**关系性质** 设 A, B 是二个允许有重元的有限集合，l 为非负整数。

1) 若 $a(l) \in A$，$l = 0$，则 $a \notin A$。2) 若 $a(l) \in A$ 或 $a(\geq l) \in A$，$l \geq 1$，则 $a \in A$。

3) 若 $a \in A$，$a(l) \in A$，则 $l \geq 1$。4) 若 $a \in A$，$A \subset B$，则 $a \in B$。

集合与集合**关系性质** 设 A, B, C 是三个允许有重元的有限集合，其中 A, B 的元素个数分别为 K_1, K_2。1) 若 $A \subset B$，则 $K_1 \leq K_2$；若 $A = B$，则 $K_1 = K_2$；若 $A \subset B$ 且 $A \neq B$，则 $K_1 < K_2$；若 $A \subset B$，$K_1 = K_2$，则 $A = B$。2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset C$，则 $A \subset C$；若 $A = B$ 且 $B = C$，则 $A = C$。

设 n 和 m 为非负整数，$a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$，

$$f_1(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n,\quad f_2(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m,$$

则将方程 $f_1(z) f_2(z) = 0$ 所有复根(含重根)组成的集合记作

$$\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)} \cup \sqrt{(b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}, b_m)}\ (\text{简写成} \sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )}),$$

并且称它是方程 $f_1(z) = 0$ 所有复根组成的集合与方程 $f_2(z) = 0$ 所有复根组成的集合的并集。

$f_1(z) f_2(z) = 0$ 所有复根组成的集合是把 $f_1(z) = 0$ 所有复根和 $f_2(z) = 0$ 所有复根放在一起组成的，于是 $\sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )}$ 是把 $\sqrt{f_1(\ )}$ 和 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有元素放在一起组成的。

若 $\sqrt{f_1(\ )} = \phi$，则 $\sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )} = \sqrt{f_2(\ )}$；若 $\sqrt{f_2(\ )} = \phi$，则 $\sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )} = \sqrt{f_1(\ )}$。

虽然沿用了符号 $\cup$，但此并集与 Cantor 集合的并集有本质区别。假设 z_0 既是 $f_1(z) = 0$ 的 5 重根，又是 $f_2(z) = 0$ 的 3 重根，那么 z_0 是 $f_1(z) f_2(z) = 0$ 的 8 重根，于是 $z_0(8) \in \sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )}$，$z_0(5) \in \sqrt{f_1(\ )}$，$z_0(3) \in \sqrt{f_2(\ )}$。

因此作为允许有重元的有限集合，并集 $\sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )}$ 的**本质特征**：1) 设 $z_0 \in C$，l, l_1, l_2 均为非负整数，则 $z_0(l) \in \sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )} \Leftrightarrow z_0(l_1) \in \sqrt{f_1(\ )}$，$z_0(l_2) \in \sqrt{f_2(\ )}$，其中 $l = l_1 + l_2$（$\Leftrightarrow$ 表示充要条件）；2) 设 $\sqrt{f_1(\ )}, \sqrt{f_2(\ )}, \sqrt{f_1(\ )} \cup \sqrt{f_2(\ )}$ 的元素个数依次为 K_1，K_2，K，则 $K = K_1 + K_2$。

推广到一般情形，则有

定义 5 设 A 和 B 是二个允许有重元的有限集合，则把 A 和 B 的所有元素放在一起组成的集合，称作是 A 与 B 的并集，记作 $A\bigcup B$。并集 $A\bigcup B$ 的**本质特征：** 1) 设 l,l_1,l_2 均为非负整数，则 $a(l)\in A\bigcup B \Leftrightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，其中 $l=l_1+l_2$；2) 设 A，B，$A\bigcup B$ 的元素个数依次为 K_1,K_2,K，则 $K=K_1+K_2$。

显然，$A\subset A\bigcup B$，$B\subset A\bigcup B$。并运算适合交换律和结合律等，证明详见§3。由结合律可定义多个允许有重元有限集合的并：$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_s=\bigcup\limits_{j=1}^{s}A_j$。假设 A_j 的元素个数为 K_j，$\bigcup\limits_{j=1}^{s}A_j$ 的元素个数为 K，则 $K=\sum\limits_{j=1}^{s}K_j$。

总根号的**性质**

性质 1 设 n，k，$n-k$ 均为非负整数，$a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，$c_0\neq 0$，若三个多项式

$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$g(z)=b_0z^k+b_1z^{k-1}+\cdots+b_{k-1}z+b_k$，

$h(z)=c_0z^{n-k}+c_1z^{n-k-1}+\cdots+c_{n-k-1}z+c_{n-k}$ 满足 $f(z)=g(z)h(z)$，则有

$$\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt{(b_0,b_1,\cdots,b_{k-1},b_k)}\cup\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-k-1},c_{n-k})}$$

证明 1) $\forall\ z_0\in\sqrt{f(\ )}$，$z_0(l)\in\sqrt{f(\ )}$，则 z_0 是 $f(z)=0$ 的任意根并且是 l 重根，由 $f(z)=g(z)h(z)$，则 z_0 是 $g(z)h(z)=0$ 的 l 重根，$z_0(l)\in\sqrt{g(\ )}\bigcup\sqrt{h(\ )}$，即由 $\forall\ z_0\in\sqrt{f(\ )}$，$z_0(l)\in\sqrt{f(\ )}\ \Rightarrow z_0(l)\in\sqrt{g(\ )}\bigcup\sqrt{h(\ )}$。2) $\forall\ z_0\in\sqrt{g(\ )}\bigcup\sqrt{h(\ )}$，则 z_0 是 $g(z)h(z)=0$ 的任意根，由 $f(z)=g(z)h(z)$，则 z_0 是 $f(z)=0$ 的根，$z_0\in\sqrt{f(\ )}$，即由 $\forall\ z_0\in\sqrt{g(\ )}\bigcup\sqrt{h(\ )}\Rightarrow z_0\in\sqrt{f(\ )}$。根据定理 1，则 $\sqrt{f(\ )}=\sqrt{g(\ )}\bigcup\sqrt{h(\ )}$。】

推论 1 设 n 为正整数，c 是非零常数，$a_0\neq 0$，则

$$\sqrt{(ca_0,ca_1,\cdots,ca_{n-1},ca_n)}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

于是有 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt{\left(1,\dfrac{a_1}{a_0},\cdots,\dfrac{a_{n-1}}{a_0},\dfrac{a_n}{a_0}\right)}$ 以及 $\sqrt{(a_0,a_1)}=\sqrt{\left(1,\dfrac{a_1}{a_0}\right)}=\left\{-\dfrac{a_1}{a_0}\right\}$。

证明 只须证第一个等式。显然，$\sqrt{(c)}=\phi$，不妨设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$g(z)=ca_0z^n+ca_1z^{n-1}+\cdots+ca_{n-1}z+ca_n$，则 $g(z)=cf(z)$，根据性质 1，则

$$\sqrt{(ca_0,ca_1,\cdots,ca_{n-1},ca_n)}=\sqrt{(c)}\cup\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\text{。】}$$

推论 1 表明 设多项式 $f(z)$ 的次数 ≥ 1，$g(z)=cf(z)$，c 是非零常数，则 $\sqrt{g(\ )}=\sqrt{f(\ )}$。

推论 2 设 n 为正整数，$a_0 \neq 0$，$z_j \in C$，$j=1,2,\cdots,n$，若 n 次多项式

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$$

则有

$$\begin{aligned}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}&=\sqrt{(1,-z_1)}\cup\sqrt{(1,-z_2)}\cup\cdots\cup\sqrt{(1,-z_n)}=\{z_1\}\cup\{z_2\}\cup\cdots\cup\{z_n\}\\&=\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}\end{aligned}$$

证明 根据性质 1 及其推论 1 以及并运算结合律即得。】

设 n 和 k 为正整数，$a_0 \neq 0$，n 次多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，令

$$f^k(z)=(a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n)^k$$

则将方程 $f^k(z)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合记作 $\overset{k}{\cup}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ (简写成 $\overset{k}{\cup}\sqrt{f(\ )}$)。若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)=0$ 的所有复根，则 $\overset{k}{\cup}\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\overset{k}{\cup}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ $=\overset{k}{\cup}\sqrt{f(\ )}$。

显然，
$$\begin{aligned}\overset{k}{\cup}\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}&=\overbrace{\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}\cup\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}\cup\cdots\cup\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}}^{k}\\&=\{\overbrace{z_1,z_1,\cdots,z_1}^{k}\}\cup\{\overbrace{z_2,z_2,\cdots,z_2}^{k}\}\cup\cdots\cup\{\overbrace{z_n,z_n,\cdots,z_n}^{k}\}\\&=\left[\overset{k}{\cup}\{z_1\}\right]\cup\left[\overset{k}{\cup}\{z_2\}\right]\cup\cdots\cup\left[\overset{k}{\cup}\{z_n\}\right]。\end{aligned}$$

$$\overset{k}{\cup}\sqrt{f(\ )}=\overbrace{\sqrt{f(\ )}\cup\sqrt{f(\ )}\cup\cdots\cup\sqrt{f(\ )}}^{k}。$$

推论 3 设 n,m,k 均为正整数，$n-mk \geq 0$，且 $a_0 \neq 0$，$b_0 \neq 0$，$c_0 \neq 0$，n 次多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=(b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m)^k(c_0z^{n-mk}+c_1z^{n-mk-1}$ $+\cdots+c_{n-mk-1}z+c_{n-mk})$，则

$$\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\left[\overset{k}{\cup}\sqrt{(b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m)}\right]\cup\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-mk-1},c_{n-mk})}$$

证明 根据性质 1 以及并运算结合律对 k 作数学归纳法即得。】

推论 4 设 n 和 k 为正整数，$n-k \geq 0$，$a_0 \neq 0$，$c_0 \neq 0$，$z_0 \in C$，n 次多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=(z-z_0)^k\left(c_0z^{n-k}+c_1z^{n-k-1}+\cdots+c_{n-k-1}z+c_{n-k}\right)$，则

$$\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\left[\bigcup^{k}\sqrt{(1,-z_0)}\right]\bigcup\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-k-1},c_{n-k})}$$
$$=\left[\bigcup^{k}\{z_0\}\right]\bigcup\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-k-1},c_{n-k})}$$
$$=\{\underbrace{z_0,z_0,\cdots,z_0}_{k}\}\bigcup\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-k-1},c_{n-k})}$$

证明 根据推论 3 和 1 即得。】

推论 5 设 n 和 k 为正整数，$n-k\geq 0$，$a_0\neq 0$，若 n 次多项式

$$f(z)=z^k(a_0z^{n-k}+a_1z^{n-k-1}+\cdots+a_{n-k-1}z+a_{n-k})$$

则 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-k-1},a_{n-k},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k})}=\{\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k}\}\bigcup\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-k-1},a_{n-k})}$

证明 由推论 4 即得。】

例 设 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 均为正整数，c 是非零常数，$p_1(z),p_2(z),\cdots,p_s(z)$ 都是次数 ≥ 1 的多项式，$f(z)=cp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$，则

$$\sqrt{f(\ )}=\left(\bigcup^{k_1}\sqrt{p_1(\ )}\right)\bigcup\left(\bigcup^{k_2}\sqrt{p_2(\ )}\right)\bigcup\cdots\bigcup\left(\bigcup^{k_s}\sqrt{p_s(\ )}\right)。$$

并运算适合交换律，于是

定义 6 设 A, B, C 是三个允许有重元的有限集合，$C=A\bigcup B$，记 $A=C-B$，$B=C-A$，且称 A 为 C 与 B 的差集，B 为 C 与 A 的差集。差运算是并运算的逆运算。

差集的**本质特征** 设 l,l_1,l_2 均为非负整数，于是

1) 若 $A=C-B$，则 $a(l_1)\in A\Leftrightarrow a(l)\in C$，$a(l_2)\in B$，其中 $l_1=l-l_2$；

2) 若 $B=C-A$，则 $a(l_2)\in B\Leftrightarrow a(l)\in C$，$a(l_1)\in A$，其中 $l_2=l-l_1$。

差集**性质** 设 A, B, C 是三个允许有重元的有限集合，则

1) $A=C-B\Leftrightarrow C=A\bigcup B$；2) $B=C-A\Leftrightarrow C=A\bigcup B$；

3) $A\bigcup B-B=A$，$A\bigcup B-A=B$。

性质 2 设 $f(z),g(z),h(z)$ 都是非零多项式，$h(z)=\dfrac{f(z)}{g(z)}$，则 $\sqrt{h(\ )}=\sqrt{f(\ )}-\sqrt{g(\ )}$。

证明 由题设 $f(z)=g(z)h(z)$，根据性质 1 则 $\sqrt{f(\ )}=\sqrt{g(\ )}\bigcup\sqrt{h(\ )}$，再由差集性质即得。】

性质 3 设 $f(z),g(z)$ 都是非零多项式，$\sqrt{g(\ )}\subset\sqrt{f(\ )}$，则 1) 存在多项式 $h(z)$ 满足

$f(z)=g(z)h(z)$，其中 $\sqrt{g(\ )}=\sqrt{f(\ )}$ 时，$h(z)$ 是非零常数；2) $g(z)\mid f(z)$。

证明 1) 令 $B=\sqrt{f(\ )}-\sqrt{g(\ )}$，$\forall\ z_0\in\sqrt{f(\ )}$，若 $z_0(l)\in\sqrt{f(\ )}$，$z_0(l_1)\in\sqrt{g(\ )}$，令 $l_2=l-l_1$，由差集本质特征，则 $z_0(l_2)\in B$，可求得 B 所有元素。根据差集性质，则 $\sqrt{f(\ )}=\sqrt{g(\ )}\cup B$。再以 B 作为方程 $h(z)=0$ 所有复根组成的集合，则 $h(z)$ 在可以相差一个(非零)常数倍的意义下是唯一确定的，因而可说存在多项式 $h(z)$ 满足 $f(z)=g(z)h(z)$，其中 $\sqrt{g(\ )}=\sqrt{f(\ )}$ 时，B 为空集，$h(z)$ 是非零常数。2) 由 1) 即得。】

§2 方程组的解集合和允许有重元集合的交集

设 $z_0 \in C$，两个多项式 $f_1(z), f_2(z)$，其中 $f_1(z) \not\equiv 0$，若 $f_1(z), f_2(z)$ 在 $z = z_0$ 时函数值满足 $f_1(z_0) = 0$ 且 $f_2(z_0) = 0$，则称 z_0 是方程组

$$\begin{cases} f_1(z) = 0 \\ f_2(z) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(在 z 平面上)的一个(复数)解。若 $f_2(z) \equiv 0$，则对 $\forall\ z_0 \in C$， $f_2(z)$ 在 $z = z_0$ 时函数值 $f_2(z_0) = 0$，于是 $f_1(z) = 0$ 的根就是(1)的解。

根据余数定理推论，则 z_0 是(1)的解的充要条件是：$(z - z_0) \mid f_1(z)$ 且 $(z - z_0) \mid f_2(z)$。

再设 l 为非负整数，若 $(z - z_0)^l \mid f_1(z)$ 且 $(z - z_0)^l \mid f_2(z)$，但 $(z - z_0)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_1(z), f_2(z)$，则称 z_0 是(1) (在 z 平面上)的 l 重(复数)解。若 $f_2(z) \equiv 0$，则 $f_1(z) = 0$ 的 l 重根就是(1)的 l 重解。统计解的个数，重解按重数计算。(1)在 z 平面上的所有解(含重解)称为(1)的所有复数解。由(1)所有复数解(含重解)组成的集合可写成

$$\left\{ z \,\middle|\, \begin{cases} f_1(z) = 0 \\ f_2(z) = 0 \end{cases} (z \in C) \right\}$$

1. 当 $f_2(z) \not\equiv 0$ 时，设 n 和 m 为非负整数， $a_0 \neq 0$， $b_0 \neq 0$，

$$f_1(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n\text{，}\quad f_2(z) = b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m\text{，}$$

则将(1)所有复数解(含重解)组成的集合记作

$$\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)} \cap \sqrt{(b_0, b_1, \cdots, b_{m-1}, b_m)}\ (\text{简写成} \sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )})$$

并且称它是方程 $f_1(z) = 0$ 所有复根组成的集合与方程 $f_2(z) = 0$ 所有复根组成的集合的交集。

若 $\sqrt{f_1(\ )} = \phi$ 或 $\sqrt{f_2(\ )} = \phi$，则 $\sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )} = \phi$。

z_0 是(1)的 l 重解的充要条件是： $z_0(l) \in \sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )}$。

虽然沿用了符号 $\cap$，但此交集与 Cantor 集合的交集有本质区别，公共元素也是如此。假设 z_0 既是 $f_1(z) = 0$ 的 5 重根，又是 $f_2(z) = 0$ 的 3 重根，那么 z_0 是(1)的 3 重解，于是

$$z_0(3) \in \sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )}\text{，}\quad z_0(5) \in \sqrt{f_1(\ )}\text{，}\quad z_0(3) \in \sqrt{f_2(\ )}\text{。}$$

因此作为允许有重元的有限集合，交集 $\sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )}$ 的**本质特征**：设 $z_0 \in C$，l, l_1, l_2

均为非负整数，则 $z_0(l)\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}\Leftrightarrow z_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}$，$z_0(l_2)\in\sqrt{f_2(\ )}$，其中 $l=\min(l_1,l_2)$。

$\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 公共元素的本质：设 $z_0\in C$，l_1,l_2 均为非负整数。1) 若 $z_0\in\sqrt{f_1(\ )}$ 且 $z_0\in\sqrt{f_2(\ )}$，则 z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的一个公共元素，$z_0\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$；2) 若 $z_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}$，$z_0(l_2)\in\sqrt{f_2(\ )}$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的 l 重公共元素，$z_0(l)\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$。统计个数，重公共元素按重数计算，则 $\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$ 恰好包含 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有公共元素。

$f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 公共根的本质：设 $z_0\in C$，l_1,l_2 均为非负整数。1) 若 z_0 既是 $f_1(z)=0$ 的根，又是 $f_2(z)=0$ 的根，则 z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的一个公共根，z_0 是(1)的解；2) 若 z_0 既是 $f_1(z)=0$ 的 l_1 重根，又是 $f_2(z)=0$ 的 l_2 重根，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的 l 重公共根，z_0 是(1)的 l 重解。统计个数，重公共根按重数计算，则(1)的所有复数解(含重解)等于是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根。

显然，1) z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的一个公共元素 $\Leftrightarrow$ z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的一个公共根；2) z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的 l 重公共元素 $\Leftrightarrow$ z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的 l 重公共根。故 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根就是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有公共元素，$\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$ 恰好包含 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根。

推广到一般情形，则有

定义 7 设 A 和 B 是二个允许有重元的有限集合，l_1,l_2 均为非负整数。1) 若 $a\in A$ 且 $a\in B$，则称 a 是 A 与 B 的一个公共元素；2) 若 $a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则称 a 是 A 与 B 的 l 重公共元素。统计公共元素的个数，重公共元素按重数计算，由 A 与 B 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 B 的交集，记作 $A\cap B$。

交集 $A\cap B$ 的**本质特征** 设 l,l_1,l_2 均为非负整数，则 $a(l)\in A\cap B\Leftrightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，其中 $l=\min(l_1,l_2)$。

显然，$A\cap B\subset A, A\cap B\subset B$。交运算适合交换律和结合律等，证明详见§3。由结合律可定义多个允许有重元有限集合的交：$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_s=\bigcap\limits_{j=1}^{s}A_j$。

2. 当 $f_2(z)\equiv 0$ 时，若仍然把 $f_2(z)=0$ 看作方程，则任意复数都是它的根，而且根的

重数都是无限次的。我们把由零多项式方程 $f_2(z)=0$ 所有复根组成的集合记为 $\sqrt{f_2(\ )}$，并称它为整式方程的**根全集**。根全集 $\sqrt{f_2(\ )}$ 是一个允许有重元的无限集合，任意复数都是它的元素，而且元素的重数也都是无限次的。

当 $f_1(z)\neq 0$，$f_2(z)\equiv 0$ 时，套用定义 4，则有 $\sqrt{f_1(\ )}\subset\sqrt{f_2(\ )}$，即可称 $\sqrt{f_1(\ )}$ 是 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的子集。为了统一，这时仍将(1)所有复数解(含重解)组成的集合记作 $\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$，并且称它是方程 $f_1(z)=0$ 所有复根组成的集合与零多项式方程 $f_2(z)=0$ 所有复根组成的集合的交集。这时，(1)转化为 $f_1(z)=0$，即两者是等价的，故交集 $\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$ 的**本质特征**是 $\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}=\sqrt{f_1(\ )}$。

$\sqrt{f_1(\ )}$ 与根全集 $\sqrt{f_2(\ )}$ 公共元素的本质：设 $z_0\in C$，l_1 为非负整数，1) 若 $z_0\in\sqrt{f_1(\ )}$，则 $z_0\in\sqrt{f_2(\ )}$，z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的一个公共元素，$z_0\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$；2) 若 $z_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}$，则 z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的 l_1 重公共元素，$z_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$。统计个数，重公共元素按重数计算，则 $\sqrt{f_1(\ )}$ 的所有元素就是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有公共元素，$\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$ 恰好包含了 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有公共元素。

$f_1(z)=0$ 与零多项式方程 $f_2(z)=0$ 公共根的本质：设 $z_0\in C$，l_1 为非负整数，1) 若 z_0 是 $f_1(z)=0$ 的根，则 z_0 是 $f_2(z)=0$ 的根，z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的一个公共根，z_0 是(1)的解；2) 若 z_0 是 $f_1(z)=0$ 的 l_1 重根，则 z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的 l_1 重公共根，z_0 是(1)的 l_1 重解。统计个数，重公共根按重数计算，则 $f_1(z)=0$ 的所有根(含重根)就是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根，(1)的所有复数解(含重解)等于是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根。

显然，1) z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的一个公共元素 $\Leftrightarrow$ z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的一个公共根；2) z_0 是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的 l 重公共元素 $\Leftrightarrow$ z_0 是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的 l 重公共根。故 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根就是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有公共元素，$\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$ 恰好包含 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根。

总之，设 $f_1(z)\neq 0$，则无论 $f_2(z)$ 是否是非零多项式，均有

1. $\left\{z\,\middle|\,\begin{cases}f_1(z)=0\\ f_2(z)=0\end{cases}(z\in C)\right\}=\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$

z_0 是(1)的 l 重解的充要条件是：$z_0(l)\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$。

2. (1)的解等于是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的公共根，(1)的 l 重解等于是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的 l 重公共根，(1)的所有复数解(含重解)等于是 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 的所有公共根。$\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$ 恰好包含 $f_1(z)=0$ 与 $f_2(z)=0$ 所有公共根，它们就是 $\sqrt{f_1(\ )}$ 与 $\sqrt{f_2(\ )}$ 的所有公共元素。

推广到一般情形，则有

定义 8 设 I 是一个允许有重元的无限集合，研究对象 A 是任意一个由 I 的部分元素组成的允许有重元的有限集合，套用定义 4，则有 $A\subset I$，即 A 是 I 的子集，若 I 不仅各不相同的元素个数无限，而且元素的重数也都是无限次的，则 I 称为研究领域的全集。

定义 9 设 I 为研究领域的全集，$A\subset I$，A 是由 I 的部分元素组成的允许有重元的有限集合，l_1 为非负整数，1) 若 $a\in A$，则 $a\in I$，称 a 是 A 与 I 的一个公共元素；2) 若 $a(l_1)\in A$，则称 a 是 A 与 I 的 l_1 重公共元素。统计公共元素的个数，重公共元素按重数计算，则 A 的所有元素就是 A 与 I 的所有公共元素。由 A 与 I 的所有公共元素组成的集合称为 A 与 I 的交集，记作 $A\cap I$。交集 $A\cap I$ 的**本质特征**是：$A\cap I=A$。

定理 2 设 $f_1(z)\neq 0$，$d(z)$ 是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，$z_0\in C$，l 为非负整数，则

1) z_0 是(1)的解的充要条件是：z_0 是 $d(z)=0$ 的根；

2) z_0 是(1)的 l 重解的充要条件是：z_0 是 $d(z)=0$ 的 l 重根。

证明 由于 $d(z)$ 是 $f_1(z), f_2(z)$ 的最大公因式，于是

1) $(z-z_0)\mid f_0(z)$ 且 $(z-z_0)\mid f_1(z)\Leftrightarrow(z-z_0)\mid d(z)$。故命题成立。

2) $(z-z_0)^l\mid f_1(z)$ 且 $(z-z_0)^l\mid f_2(z)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_1(z), f_2(z)$ $\Leftrightarrow$ $(z-z_0)^l\mid d(z)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $d(z)$。故命题成立。】

推论 1 设 $f_1(z)\neq 0$，$d(z)$ 是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，则(1)所有复数解(含重解)组成的集合与 $d(z)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合是两个相等集合，即

$$\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}=\sqrt{d(\ )}$$

于是 $d(z)=0$ 的所有复根就是(1)的所有复数解。

证明 $\forall\ z_0\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$，$z_0(l)\in\sqrt{f_1(\ )}\cap\sqrt{f_2(\ )}$，则 z_0 是(1)的任意解，且是 l 重解，根据定理 2，则 z_0 是 $d(z)=0$ 的 l 重根，$z_0(l)\in\sqrt{d(\ )}$。反过来，$\forall\ z_0\in\sqrt{d(\ )}$，则 z_0

是 $d(z)=0$ 的任意根，根据定理 2，则 z_0 是(1)的解，$z_0 \in \sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )}$。根据定理 1 则 $\sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )} = \sqrt{d(\ )}$，于是命题成立。】

例　设 $f_1(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$f_2(z)=b_0z^m+b_1z^{m-1}+\cdots+b_{m-1}z+b_m$，$d(z)=d_0z^k+d_1z^{k-1}+\cdots+d_{k-1}z+d_k$，其中 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$，$d_0\neq 0$，$d(z)$是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，则 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} \cap \sqrt{(b_0,b_1,\cdots,b_{m-1},b_m)} = \sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{k-1},d_k)}$

推论 2 设 $f_1(z)\neq 0$，$d(z)$是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，它的次数为 k，(1)复数解(含重解)的个数为 K，则 $K=k$，故(1)在 z 平面上有解的充要条件是：$k\geq 1$。

证明 由题设则 $d(z)=0$ 复根的个数为 k，根据推论 1，则 $K=k$，于是命题成立。】

推论 3 设 $f_1(z)\neq 0$，则(1)在 z 平面上无解的充要条件是：$(f_1(z), f_2(z))=1$。

证明 由推论 2 即得。】

推论 4 设 $f_1(z)\neq 0$，$d(z)$是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，则

1) 当 $f_2(z)\neq 0$ 时，设 $z_0\in C$，l,l_1,l_2 均为非负整数，则

$$z_0(l)\in \sqrt{d(\ )} \Leftrightarrow z_0(l_1)\in \sqrt{f_1(\ )},\quad z_0(l_2)\in \sqrt{f_2(\ )}，其中 l=\min(l_1,l_2)。$$

2) 当 $f_2(z)\equiv 0$ 时，则 $f_1(z)=cd(z)$，其中 c 是非零常数。

证明 根据推论 1，则 $\sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )} = \sqrt{d(\ )}$；由 $\sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )}$ 的本质特征，则

1) 当 $f_2(z)\neq 0$ 时，设 $z_0\in C$，l,l_1,l_2 均为非负整数，则 $z_0(l)\in \sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )} \Leftrightarrow$ $z_0(l_1)\in \sqrt{f_1(\ )}$，$z_0(l_2)\in \sqrt{f_2(\ )}$，其中 $l=\min(l_1,l_2)$。于是命题成立。

2) 当 $f_2(z)\equiv 0$ 时，$\sqrt{f_1(\ )} \cap \sqrt{f_2(\ )} = \sqrt{f_1(\ )}$，故 $\sqrt{d(\ )} = \sqrt{f_1(\ )}$，根据总根号性质 3，则 $f_1(z)=cd(z)$，其中 c 是非零常数。】

推论 5 设 $f_1(z), f_2(z)$ 都是非零多项式，$d(z)$是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，$z_0\in C$，若 z_0 分别是 $f_1(z)=0$ 的 l_1 重根，$f_2(z)=0$ 的 l_2 重根，$d(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=\min(l_1,l_2)$。

证明 由题设则 l,l_1,l_2 均为非负整数，$z_0(l_1)\in \sqrt{f_1(\ )}$，$z_0(l_2)\in \sqrt{f_2(\ )}$，$z_0(l)\in \sqrt{d(\ )}$，根据推论 4，则 $l=\min(l_1,l_2)$。】

引理 设 $f(z)\neq 0$，$d(z)$是 $f(z), f'(z)$的一个最大公因式，$z_0\in C$，l 为正整数，若 $(z-z_0)$是 $f(z)$的 l 重因式，则 $(z-z_0)$既是导数 $f'(z)$的 $l-1$ 重因式[5]，又是 $d(z)$的 $l-1$ 重因式。

证明 若$(z-z_0)$是$f(z)$的l重因式，则$(z-z_0)$是导数$f^{'}(z)$的$l-1$重因式。于是$(z-z_0)^{l-1} \mid f(z)$且$(z-z_0)^{l-1} \mid f^{'}(z)$，但$(z-z_0)^{l}$不能同时整除$f(z), f^{'}(z)$。$d(z)$是$f(z), f^{'}(z)$的最大公因式，故$(z-z_0)^{l-1} \mid d(z)$，但$(z-z_0)^{l}$不能整除$d(z)$，即$(z-z_0)$是$d(z)$的$l-1$重因式。】

定理 3 设$f(z)\neq 0$，$d(z)$是$f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，$z_0\in C$，l为正整数，若z_0是$f(z)=0$的l重根，则z_0既是$f^{'}(z)=0$的$l-1$重根，又是$d(z)=0$的$l-1$重根。

证明 由引理根据重因式与重根的关系即得。】

推论 1 设$f(z)\neq 0$，$z_0\in C$，l为正整数，若z_0是$f(z)=0$的l重根，则z_0是$f(z)=0$，$f^{'}(z)=0$，…，$f^{(l-1)}(z)=0$的根，但不是$f^{(l)}(z)=0$的根。

证明 根据定理 3，对l作数学归纳法即得。】

推论 2 设$f(z)\neq 0$，$z_0\in C$，则 1) z_0是$f(z)=0$的 2 重以上根的充要条件是：z_0是$\begin{cases} f(z)=0 \\ f^{'}(z)=0 \end{cases}$的解；2) z_0是$f(z)=0$的单根的充要条件是：$f(z_0)=0$且$f^{'}(z_0)\neq 0$。

证明 不妨设z_0是$f(z)=0$的l重根($l\geq 1$)，根据定理 3，则z_0是$f^{'}(z)=0$的$l-1$重根，于是

1) $l\geq 2$即$l-1\geq 1$的充要条件是：$f(z_0)=0$且$f^{'}(z_0)=0$。故命题成立。

2) $l=1$的充要条件是：$f(z_0)=0$且$f^{'}(z_0)\neq 0$。故命题成立。】

推论 3 设$f(z)\neq 0$，$d(z)$是$f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，$z_0\in C$，则 1) z_0是$f(z)=0$的 2 重以上根的充要条件是：z_0是$d(z)=0$的根；2) z_0是$f(z)=0$的单根的充要条件是：$f(z_0)=0$且$d(z_0)\neq 0$。

证明 1) 由推论 2 和定理 2 即得。2) 必要性由定理 3 即得，再证充分性。若$f(z_0)=0$且$d(z_0)\neq 0$，由定理 2，则z_0不是$\begin{cases} f(z)=0 \\ f^{'}(z)=0 \end{cases}$的解，故$f^{'}(z_0)\neq 0$，再由推论 2 即得。】

例 设$f(z)\neq 0$，$d(z)$是$f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，于是 1) 若$d(z)=0$没有实根，则$f(z)=0$的实根都是单根；2) 若$d(z)=0$没有虚根，则$f(z)=0$的虚根都是单根；3) 若$d(z)$是非零常数，则$f(z)=0$的根均为单根。

证明 由推论 3 即得。】

推论 4 设$f(z)\neq 0$，$d(z)$是$f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，则 1) $f(z)=0$没有重根

的充要条件是：$d(z)$是非零常数；2)　$f(z)=0$没有重根的充要条件是：$\left(f(z), f^{'}(z)\right)=1$。

证明 1) 根据推论 3，则 $f(z)=0$没有 3 重以上根的充要条件：$d(z)=0$没有根，即 $d(z)$是非零常数。故命题成立。2) 是 1) 的直接推论。】

例 设 $f(z)\neq 0$，则 $f(z)$没有重因式的充要条件是：$\left(f(z), f^{'}(z)\right)=1$。

推论 5 设 $f(z)\neq 0$，$d(z)$是 $f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，$z_0\in C$，k为正整数，若 z_0是$d(z)=0$的k重根，则z_0是 $f(z)=0$的$k+1$重根。

证明 由题设$d(z_0)=0$，不妨设z_0是 $f(z)=0$的l重根，根据推论 3，则$l\geq 2$，由定理 3，则z_0是$d(z)=0$的$l-1$重根，故$l-1=k$，$l=k+1$，命题成立。】

例 设 $f(z)\neq 0$，$d(z)$是 $f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，由推论 3 和推论 5，若$d(z)=0$有根，则这些根均为 $f(z)=0$的 2 重以上根，其重数为$d(z)=0$根的重数加 1。

推论 6 设 $f(z)\neq 0$，$d(z)$是 $f(z), f^{'}(z)$的一个最大公因式，$z_0\in C$，l为正整数，则

$$z_0(l)\in\sqrt{d(\ )}\Leftrightarrow\quad z_0(l+1)\in\sqrt{f(\ )},\quad z_0(l)\in\sqrt{f^{'}(\ )}。$$

证明 根据定理 3 及其推论 5 即得。】

§3 允许有重元有限集合的运算律

定理 4[4] 设所列集合都是允许有重元的有限集合，则

1. 下列运算律成立

 1) **交换律** $A\bigcup B=B\bigcup A$，$A\bigcap B=B\bigcap A$。

 2) **结合律** $A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$，$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C$。

2. 下列运算律的两个等式一个成立，另一个不成立(有条件成立)

 1) **分配律** $A\bigcup(B\bigcap C)=(A\bigcup B)\bigcap(A\bigcup C)$成立，但$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$不成立。若$B\bigcap C=\phi$，则$A\bigcap(B\bigcup C)=(A\bigcap B)\bigcup(A\bigcap C)$成立。

 2) **幂等律** $A\bigcap A=A$成立，但$A\bigcup A=A$不成立($A=\phi$除外)。

 3) **吸收律** $A\bigcap(B\bigcup A)=A$成立，但$A\bigcup(B\bigcap A)=A$不成立($B\bigcap A=\phi$除外)。

证明 1. 1) 交换律。设l,l_1,l_2均为非负整数，根据并集本质特征，则由$\forall\ a\in A\bigcup B$，$a(l)\in A\bigcup B\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，其中$l=l_1+l_2=l_2+l_1\Rightarrow a(l_2)\in B$，$a(l_1)\in A$，其中$l=l_2+l_1$ $\Rightarrow a(l)\in B\bigcup A$。因此$A\bigcup B\subset B\bigcup A$。同理可证$B\bigcup A\subset A\bigcup B$，故$A\bigcup B=B\bigcup A$。

根据交集本质特征，由$\forall\ a\in A\bigcap B$，$a(l)\in A\bigcap B\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，其中$l=\min(l_1,l_2)=\min(l_2,l_1)\Rightarrow a(l_2)\in B$，$a(l_1)\in A$，其中$l=\min(l_2,l_1)\Rightarrow a(l)\in B\bigcap A$。因此，$A\bigcap B\subset B\bigcap A$。同理可证$B\bigcap A\subset A\bigcap B$，故$A\bigcap B=B\bigcap A$。

2) 结合律。设$l,l_1,l_2,l_3,l_{12},l_{23}$均为非负整数，根据并集本质特征，由$\forall\ a\in A\bigcup(B\bigcup C)$，$a(l)\in A\bigcup(B\bigcup C)\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_{23})\in B\bigcup C$，其中$l=l_1+l_{23}\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中$l_{23}=l_2+l_3$，$l=l_1+(l_2+l_3)=(l_1+l_2)+l_3$，令$l_{12}=l_1+l_2\Rightarrow a(l_{12})\in A\bigcup B$，$a(l_3)\in C$，其中$l=l_{12}+l_3\Rightarrow a(l)\in(A\bigcup B)\bigcup C$。因此$A\bigcup(B\bigcup C)\subset(A\bigcup B)\bigcup C$。

同理可证$(A\bigcup B)\bigcup C\subset A\bigcup(B\bigcup C)$，故$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$。

根据交集本质特征由$\forall\ a\in A\bigcap(B\bigcap C)$，$a(l)\in A\bigcap(B\bigcap C)\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_{23})\in B\bigcap C$，其中$l=\min(l_1,l_{23})\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中$l_{23}=\min(l_2,l_3)$，$l=\min(l_1,\min(l_2,l_3))$ $=\min(\min(l_1,l_2),l_3)$，令$l_{12}=\min(l_1,l_2)\Rightarrow a(l_{12})\in A\bigcap B$，$a(l_3)\in C$，其中$l=\min(l_{12},l_3)\Rightarrow$ $a(l)\in(A\bigcap B)\bigcap C$。因此$A\bigcap(B\bigcap C)\subset(A\bigcap B)\bigcap C$。同理可证$(A\bigcap B)\bigcap C\subset A\bigcap(B\bigcap C)$，故

$$A\bigcap(B\bigcap C)=(A\bigcap B)\bigcap C。$$

2. 1) 分配律。设$l,l_1,l_2,l_3,l_{12},l_{13},l_{23}$均为非负整数由$\forall\ a\in A\bigcup(B\bigcap C)$，$a(l)\in A\bigcup(B\bigcap C)$

$\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_{23})\in B\cap C$，其中 $l=l_1+l_{23}\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中 $l_{23}=\min(l_2,l_3)$，$l=l_1+\min(l_2,l_3)=\min(l_1+l_2,l_1+l_3)$，令 $l_{12}=l_1+l_2$，$l_{13}=l_1+l_3\Rightarrow\ a(l_{12})\in A\cup B$，$a(l_{13})\in A\cup C$，其中 $l=\min(l_{12},l_{13})\Rightarrow a(l)\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$。因此，$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C)$。同理可证 $(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C)$，故 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

由 $a(l)\in A\cap(B\cup C)\Leftrightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_{23})\in B\cup C$，其中 $l=\min(l_1,l_{23})\Leftrightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中 $l_{23}=l_2+l_3$，$l=\min(l_1,l_2+l_3)$。

由 $a(l)\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\Leftrightarrow\ a(l_{12})\in A\cap B$，$a(l_{13})\in A\cap C$，其中 $l=l_{12}+l_{13}\Leftrightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中 $l_{12}=\min(l_1,l_2)$，$l_{13}=\min(l_1,l_3)$，$l=\min(l_1,l_2)+\min(l_1,l_3)$。

由于 $\min(l_1,l_2+l_3)\neq\min(l_1,l_2)+\min(l_1,l_3)$，故 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ 不成立。

若 $B\cap C=\phi$，由 $a(0)\in\phi=B\cap C\Leftrightarrow\ a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中 $0=\min(l_2,l_3)$。于是 l_2 和 l_3 至少有一个为 0，则 $\min(l_1,l_2+l_3)=\min(l_1,l_2)+\min(l_1,l_3)$ 成立。故由 $\forall\ a\in A\cap(B\cup C)$，$a(l)\in A\cap(B\cup C)\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中 $l=\min(l_1,l_2+l_3)\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_3)\in C$，其中 $l=\min(l_1,l_2)+\min(l_1,l_3)\Rightarrow a(l)\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。因此，$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$。同理可证 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C)$，故 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

2) 幂等律。设 l,l_0 均为非负整数，由 $\forall\ a\in A\cap A$，$a(l)\in A\cap A\Rightarrow a(l_0)\in A$，$a(l_0)\in A$，其中 $l=\min(l_0,l_0)=l_0\Rightarrow a(l)\in A$。因此 $A\cap A\subset A$。同理可证 $A\subset A\cap A$，故 $A\cap A=A$。

由 $a(l)\in A\cup A\ \Leftrightarrow\ a(l_0)\in A$，$a(l_0)\in A$，其中 $l=l_0+l_0=2l_0\ \Leftrightarrow\ a\left(\dfrac{l}{2}\right)\in A$。因此 $A\cup A\not\subset A$，故 $A\cup A=A$ 不成立。

3) 吸收律。设 l,l_0,l_1,l_2 均为非负整数，由 $\forall\ a\in A\cap(B\cup A)$，$a(l)\in A\cap(B\cup A)\ \Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_0)\in B\cup A$，其中 $l=\min(l_1,l_0)\Rightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_1)\in A$，其中 $l_0=l_2+l_1$，$l=\min(l_1,l_2+l_1)=l_1\ \Rightarrow\ a(l)\in A$。因此 $A\cap(B\cup A)\subset A$。同理可证 $A\subset A\cap(B\cup A)$，故 $A\cap(B\cup A)=A$。

由 $a(l)\in A\cup(B\cap A)\Leftrightarrow a(l_1)\in A$，$a(l_0)\in B\cap A$，其中 $l=l_1+l_0\Leftrightarrow\ a(l_1)\in A$，$a(l_2)\in B$，$a(l_1)\in A$，其中 $l_0=\min(l_2,l_1)$，$l=l_1+\min(l_2,l_1)\Rightarrow$ 当 $l_1\le l_2$ 时，$l=2l_1$，$a\left(\dfrac{l}{2}\right)\in A$；当 $l_1>l_2$ 时，$l=l_1+l_2$，$a(l-l_2)\in A$。因此 $A\cup(B\cap A)\not\subset A$，故 $A\cup(B\cap A)=A$ 不成立。】

推论 1 设 $f_1(z),f_2(z)$ 都是非零多项式，$\begin{cases}f_1(z)=d(z)g_1(z)\\ f_2(z)=d(z)g_2(z)\end{cases}$，则 $d(z)=0$ 的所有复根加

上$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解等于是$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解。

证明 由题设可令A,B,C依次是$d(z)=0$,$g_1(z)=0$,$g_2(z)=0$所有复根(含重根)组成的集合，则$A\cup B$,$A\cup C$分别代表$f_1(z)=0$,$f_2(z)=0$所有复根(含重根)组成的集合，故$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$所有复数解(含重解)组成的集合可用$(A\cup B)\cap(A\cup C)$表示，根据定理 4，则

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)=A\cup(B\cap C)$$

其中$B\cap C$代表$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$所有复数解(含重解)组成的集合，故命题成立。】

推论 2 设$f_1(z), f_2(z), f_3(z)$都是非零多项式，其中$(f_2(z), f_3(z))=1$，则$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$所有复数解加上$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_3(z)=0 \end{cases}$所有复数解等于是$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)f_3(z)=0 \end{cases}$所有复数解。

证明 由题设可令A,B,C依次是$f_1(z)=0$,$f_2(z)=0$,$f_3(z)=0$所有复根(含重根)组成的集合，则$A\cap B$,$A\cap C$,$B\cap C$,$A\cap(B\cup C)$依次代表$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$，$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_3(z)=0 \end{cases}$，$\begin{cases} f_2(z)=0 \\ f_3(z)=0 \end{cases}$，$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)f_3(z)=0 \end{cases}$所有复数解(含重解)组成的集合。由于$(f_2(z), f_3(z))=1$，根据定理 2 推论 3 则$\begin{cases} f_2(z)=0 \\ f_3(z)=0 \end{cases}$无解，于是$B\cap C=\phi$，根据定理 4，则$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，故命题成立。】

推论 3 设$f_1(z)\neq 0$，$\begin{cases} f_1(z)=d(z)g_1(z) \\ f_2(z)=d(z)g_2(z) \end{cases}$，则$d(z)=0$的所有复根加上$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解等于是$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解。

证明 由题设，若$f_2(z)\neq 0$，根据推论 1 命题成立；若$f_2(z)\equiv 0$，则$g_2(z)\equiv 0$，于是$f_1(z)=0$的所有复根就是$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解，$g_1(z)=0$的所有复根就是$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解，再由$f_1(z)=d(z)g_1(z)$可知命题也成立。】

定理 5 设$f_1(z)\neq 0$，$\begin{cases} f_1(z)=d(z)g_1(z) \\ f_2(z)=d(z)g_2(z) \end{cases}$，则 1) $d(z)$是$f_1(z), f_2(z)$的一个最大公因式

的充要条件是：$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$无解；2) $\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$无解的充要条件是：$(g_1(z), g_2(z))=1$。

证明 由题设则 $g_1(z)\neq 0$；根据定理 4 推论 3，则 $d(z)=0$ 的所有复根就是$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解的充要条件是：$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$无解。于是 1) 由定理 2 推论 1，则必要性成立；再证充分性。若$\begin{cases} g_1(z)=0 \\ g_2(z)=0 \end{cases}$无解，不妨设 $d_0(z)$ 是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式，由定理 2 推论 1 则 $d_0(z)=0$ 的所有复根就是$\begin{cases} f_1(z)=0 \\ f_2(z)=0 \end{cases}$的所有复数解，故 $d(z)=0$ 的所有复根就是 $d_0(z)=0$ 的所有复根，$d(z)=cd_0(z)$，其中 c 是非零常数，$d(z)$ 是 $f_1(z), f_2(z)$ 的一个最大公因式。2) 由定理 2 推论 3 即得。】

§4 复平面的平移变换

设$c \in C$，则称$s = z - c$是复平面的平移量为c的平移变换，s平面可看作是z平面在该变换的作用下平移一个向量c所得到的新平面。研究整式代数方程$f(z) = 0$在z平面上的求根问题，有时需要作复平面的平移变换。

n次多项式$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \ (a_0 \neq 0)$在$z$平面上点$c$的泰勒展开式为

$$f(z) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(z-c)^{n-1} + \cdots + \frac{f'(c)}{1!}(z-c) + f(c)$$

其中$\frac{f^{(n)}(c)}{n!} = a_0 \neq 0$。令$t(s) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}s^n + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}s^{n-1} + \cdots + \frac{f'(c)}{1!}s + f(c)$，则$t(s)$也为$n$次多项式。在平移变换$s = z - c$下，显然有

$$t(s) = t(z-c) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(z-c)^{n-1} + \cdots + \frac{f'(c)}{1!}(z-c) + f(c) = f(z),$$

即

$$t(s) = t(z-c) = f(z)$$

$t(s) = t(z-c) = f(z)$的**整除性质**

性质 设$f(z) \not\equiv 0$，$c \in C$，$t(s) = t(z-c) = f(z)$，$z_0 \in C$，$s_0 \in C$，$s_0 = z_0 - c$，l为非负整数，则$(z - z_0)^l \mid f(z)$的充要条件是：$(s - s_0)^l \mid t(s)$。

证明 显然$l = 0$时，命题成立，再证$l \geq 1$时，命题也成立。若$(z - z_0)^l \mid f(z)$，则$f(z)$可以分解为$f(z) = q(z)(z - z_0)^l$。由$t(s) = t(z-c) = f(z)$，$s = z - c$，$s_0 = z_0 - c$，$s - s_0 = z - z_0$，$q(z) = q(s + c)$，于是$t(s) = q(s+c)(s - s_0)^l$，故$(s - s_0)^l \mid t(s)$。

反过来，若$(s - s_0)^l \mid t(s)$，由带余除法，不妨设$f(z) = q(z)(z - z_0)^l + r(z)$，其中$r(z)$的次数$< l$或者$r(z) \equiv 0$，则同理可得$t(s) = q(s+c)(s - s_0)^l + r(s+c)$，其中$r(s+c)$关于$s$的次数$=$ $r(z)$的次数，故$(s - s_0)^l \mid r(s+c)$。假如$r(z)$的次数$< l$，则$r(s+c)$关于s的次数$< l$，与$(s - s_0)^l \mid r(s+c)$矛盾。因此$r(z) \equiv 0$，于是$f(z) = q(z)(z - z_0)^l$，所以$(z - z_0)^l \mid f(z)$。】

定理 6 设$f(z) \not\equiv 0$，$c \in C$，$t(s) = t(z-c) = f(z)$，$z_0 \in C$，$s_0 \in C$，$s_0 = z_0 - c$，l为非负整数，则

1) z_0是$f(z)=0$在z平面上的根的充要条件是：s_0是$t(s)=0$在s平面上的根；

2) z_0是$f(z)=0$在z平面上的l重根的充要条件是：s_0是$t(s)=0$在s平面上的l重根。

证明 根据$t(s)=t(z-c)=f(z)$的整除性质，则

1) $(z-z_0)|f(z)$的充要条件是：$(s-s_0)|t(s)$。于是命题成立。

2) $(z-z_0)^l|f(z)$，但$(z-z_0)^{l+1}$不能整除$f(z)$的充要条件是：$(s-s_0)^l|t(s)$，但$(s-s_0)^{l+1}$不能整除$t(s)$。于是命题成立。】

推论 1 设n和k为正整数，$k\le n$，$f(z)$为n次多项式，$c\in C$，$t(s)=t(z-c)=f(z)$，则$z_1,z_2,\cdots,z_k$是$f(z)=0$在z平面上的k个根的充要条件是：$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$,$\cdots$,$s_k=z_k-c$是$t(s)=0$在s平面上的k个根。

证明 根据定理 6 即得。】

推论 1 中可以含等根。在平移变换$s=z-c$下，$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$，则$s_1-s_2=z_1-z_2$，于是$z_1=z_2\Leftrightarrow s_1=s_2$。

推论 2 设n为正整数，$f(z)$为n次多项式，$c\in C$，$t(s)=t(z-c)=f(z)$，则$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$f(z)=0$在z平面上的所有根(含重根)的充要条件是：$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$,$\cdots$,$s_n=z_n-c$是$t(s)=0$在s平面上的所有根(含重根)。

证明 由题设，则$t(s)$也为n次多项式。若$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$f(z)=0$在z平面上的所有根，由推论 1，则$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$,$\cdots$,$s_n=z_n-c$是$t(s)=0$在s平面上的n个根，恰好等于$t(s)$的次数，于是$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$,$\cdots$,$s_n=z_n-c$是$t(s)=0$在s平面上的所有根。

反过来，若$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$,$\cdots$,$s_n=z_n-c$是$t(s)=0$在s平面上的所有根，由推论 1，则$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$f(z)=0$在z平面上的n个根，恰好等于$f(z)$的次数，于是$z_1,z_2,\cdots,z_n$是$f(z)=0$在z平面上的所有根。】

为方便之后各篇章节应用，定理 6 推论合计有 10 个，看似繁琐但很有必要。

设R为实数域，$b\in R$，则称$s=z-b$是复平面的平移量为b的水平平移变换。在该变换下，$\operatorname{Re}s=\operatorname{Re}z-b$，$\operatorname{Im}s=\operatorname{Im}z$，$z$平面的直线$x=b$即为$s$平面的虚轴$x=0$，于是$b>0$时，$s$平面可看作是$z$平面在该变换的作用下向右水平平移了$b$单位所得到的新平面；$b<0$时，$s$平面可看作是$z$平面在该变换的作用下向左水平平移$|b|$单位所

得到的新平面。

推论 3 设n和k为正整数，$k \le n$，$f(z)$为n次多项式，$b \in R$，$t(s)=t(z-b)=f(z)$，则$z_1, z_2, \cdots, z_k$是$f(z)=0$在z平面带形区域$\alpha < \mathrm{Re}\, z < \beta$内的所有根(含重根)的充要条件是：$s_1 = z_1 - b$，$s_2 = z_2 - b$，$\cdots$；$s_k = z_k - b$是$t(s)=0$在$s$平面带形区域$\alpha - b < \mathrm{Re}\, s < \beta - b$内的所有根(含重根)。

证明 由题设则$\alpha < \mathrm{Re} z_j < \beta$ $(j = 1,2,\cdots,k)$的充要条件是

$\alpha - b < \mathrm{Re} z_j - b = \mathrm{Re} s_j < \beta - b$ $(j = 1,2,\cdots,k)$。再由推论 1 即得。】

推论 4 设n和k为正整数，$k \le n$，$f(z)$为n次多项式，$b \in R$，$t(s)=t(z-b)=f(z)$，则$z_1, z_2, \cdots, z_k$是$f(z)=0$在z平面实轴上区间(α, β)内的所有根(或所有各不相同的根)的充要条件是：$s_1 = z_1 - b$，$s_2 = z_2 - b$，$\cdots$；$s_k = z_k - b$是$t(s)=0$在s平面实轴上区间$(\alpha - b, \beta - b)$内的所有根(或所有各不相同的根)。

证明 由题设则$\alpha < z_j < \beta$ $(j = 1,2,\cdots,k)$的充要条件是$\alpha - b < z_j - b = s_j < \beta - b$ $(j = 1,2,\cdots,k)$。再由推论 1 即得。】

推论 5 设$f(z) \not\equiv 0$，$a \in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，$y_j \in R$，K'为正整数，则$z_j = a + iy_j$ $(j = 1,2,\cdots,K')$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的所有根(含重根)的充要条件是：$s_j = iy_j$ $(j = 1,2,\cdots,K')$是$t(s)=0$在s平面虚轴上的所有根(含重根)。

证明 由题设则$s_j = z_j - a$，故$\mathrm{Re} z_j = a$ ($j = 1,2,\cdots,K'$)的充要条件是：$\mathrm{Re} s_j = 0$ ($j = 1,2,\cdots,K'$)。再由推论 1 即得。】

推论 6 设$f(z) \not\equiv 0$，$a \in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上没有根的充要条件是：$t(s)=0$在s平面的虚轴上没有根。

证明 由推论 5 即可得证。】

推论 7 设$f(z) \not\equiv 0$，$b_j > a$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，$y_j \in R$，r为正整数，则$z_j = b_j + iy_j$ $(j = 1,2,\cdots,r)$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$的右半平面上的所有根(含重根)的充要条件是$s_j = b_j - a + iy_j$ $(j = 1,2,\cdots,r)$是$t(s)=0$在s平面虚轴的右半平面上的所有根(含重根)。

证明 显然$s_j = z_j - a$，故$\mathrm{Re} z_j = b_j > a$ $(j = 1,2,\cdots,r)$的充要条件是$\mathrm{Re} s_j = b_j - a > 0$ $(j = 1,2,\cdots,r)$。再由推论 1 即得。】

推论 8 设$f(z) \not\equiv 0$，$a \in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$f(z)=0$在z平面直线$x=a$的

右半平面上没有根的充要条件是：$t(s)=0$ 在 s 平面虚轴的右半平面上没有根。

证明 由推论 7 即可得证。】

推论 9 设 $f(z)\not\equiv 0$，$a\in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 及其右半平面上没有根的充要条件是：$t(s)=0$ 在 s 平面的虚轴及其右半平面上没有根。

证明 由推论 6 和推论 8 即得。】

推论 10 设 $f(z)\not\equiv 0$，$a\in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，K 为正整数，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上有 K 个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：$t(s)=0$ 在 s 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根。

证明 由推论 5 和推论 8 即得。】

定理 7 设 n 为正整数，$a_0\neq 0$，n 次多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$c\in C$，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的充要条件是：

$$\{z_1-c,z_2-c,\cdots,z_n-c\}=\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{'}(c)}{1!},f(c)\right)}$$

证明 由题设，令 $t(s)=\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}s^n+\dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\dfrac{f^{'}(c)}{1!}s+f(c)$

其中 $\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}=a_0\neq 0$，则 $t(s)$ 也为 n 次多项式，且 $t(s)=t(z-c)=f(z)$，于是

1) $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的充要条件是：$z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)；

2) $\{z_1-c,z_2-c,\cdots,z_n-c\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_n\}=\sqrt{\left(\dfrac{f^{(n)}(c)}{n!},\dfrac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},\cdots,\dfrac{f^{'}(c)}{1!},f(c)\right)}$ 的充要条件是：$s_1=z_1-c$，$s_2=z_2-c$，⋯，$s_n=z_n-c$ 是 $t(s)=0$ 在 s 平面上的所有根(含重根)。

再由定理 6 推论 2 即得。】

推论 设 n 和 k 为正整数，$k\leq n$，$a_0\neq 0$，$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$c\in C$，$z=c$ 是 $f(z)=0$ 的 k 重根，若 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，则

$$\{z_1-c,z_2-c,\cdots,z_n-c\}=\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!},\frac{f^{(k)}(c)}{k!},\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k}\right)}$$

$$=\{\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k}\}\cup\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{(k+1)}(c)}{(k+1)!},\frac{f^{(k)}(c)}{k!},\right)}$$

证明 由 $z=c$ 是 $f(z)=0$ 的 k 重根，根据定理 3 推论 1，则

$$f(c)=f^{'}(c)=\cdots=f^{(k-1)}(c)=0\text{，}\quad f^{(k)}(c)\neq 0\text{。}$$

再根据定理 7 和总根号性质 1 推论 5 即得。】

§5 总根号与正整数次方根的有效融合和转换

设 $f(z)=a_0z^n+a_n$，其中 $n\ge 2$， $a_0\ne 0$，方程 $f(z)=0$ 的 n 个复根为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$。令 $s=z^n$，代入原方程可得辅助方程 $a_0s+a_n=0$，设其根为 s_1，则 $s_1=-\dfrac{a_n}{a_0}$，对 $z^n=s_1$ 用正整数次方根可得 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt[n]{s_1}=\sqrt[n]{-\dfrac{a_n}{a_0}}$

为使总根号与正整数次方根能有效融合和转换，先**规定** $\sqrt[n]{s_1}=\sqrt[n]{\{s_1\}}$。

性质 1 设 $f(z)=a_0z^n+a_n$，其中 $n\ge 2$， $a_0\ne 0$，方程 $f(z)=0$ 的 n 个复根为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n\right)}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n)}}=\sqrt[n]{\sqrt{\left(1,\frac{a_n}{a_0}\right)}}=\sqrt[n]{\left\{-\frac{a_n}{a_0}\right\}}=\sqrt[n]{-\frac{a_n}{a_0}}。$$

证明 由题设则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n\right)}$，将 $s=z^n$ 代入原方程可得 $a_0s+a_n=0$，设其根为 s_1，则 $\{s_1\}=\sqrt{(a_0,a_n)}=\sqrt{\left(1,\dfrac{a_n}{a_0}\right)}=\left\{-\dfrac{a_n}{a_0}\right\}$

对 $z^n=s_1$ 用正整数次方根可得 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt[n]{s_1}=\sqrt[n]{\{s_1\}}$，于是

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n\right)}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n)}}=\sqrt[n]{\sqrt{\left(1,\frac{a_n}{a_0}\right)}}=\sqrt[n]{\left\{-\frac{a_n}{a_0}\right\}}=\sqrt[n]{-\frac{a_n}{a_0}}。】$$

推论 设 $f(z)=a_0z^2+a_1z+a_2$，其中 $a_0\ne 0$，方程 $f(z)=0$ 的两个根为 z_1,z_2，则

$$\{z_1,z_2\}=\sqrt{(a_0,a_1,a_2)}=\left\{\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0},\ \frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}\right\}$$

证明 由题设，则 $\{z_1,z_2\}=\sqrt{(a_0,a_1,a_2)}$， $f(z)$ 在 z 平面上 $-\dfrac{a_1}{2a_0}$ 点的泰勒展开式为

$f(z)=a_0\left(z+\dfrac{a_1}{2a_0}\right)^2+\dfrac{-a_1^2+4a_0a_2}{4a_0}$，根据定理 7 和性质 1，则

$$\left\{z_1+\frac{a_1}{2a_0},z_2+\frac{a_1}{2a_0}\right\}=\sqrt{\left(a_0,0,\frac{-a_1^2+4a_0a_2}{4a_0}\right)}=\sqrt{\sqrt{\left(1,\frac{-a_1^2+4a_0a_2}{4a_0^2}\right)}}$$

$$=\sqrt{\frac{a_1^2-4a_0a_2}{4a_0^2}}=\left\{+\frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0},\ -\frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}\right\}。$$

于是 $z_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$， $z_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$，从而

$$\{z_1,z_2\}=\sqrt{(a_0,a_1,a_2)}=\left\{\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0},\ \frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}\right\}。】$$

为了融合和转换更有效率，**规定**

$$\left\{\frac{-a_1+\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0},\ \frac{-a_1-\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}\right\}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$$

于是推论的结论可写成 $\{z_1,z_2\}=\sqrt{(a_0,a_1,a_2)}=\dfrac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}$。

设 $f(z)=a_0z^{2n}+a_nz^n+a_{2n}$，其中 $n\geq 2$， $a_0\neq 0$，方程 $f(z)=0$ 的 $2n$ 个复根为 $z_1,z_2,\cdots,z_{2n}$。令 $s=z^n$，代入原方程可得辅助方程 $a_0s^2+a_ns+a_{2n}=0$，设它的 2 个复根为 s_1， s_2，则

$$s_1=\frac{-a_n+\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}，\quad s_2=\frac{-a_n-\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}。$$

对 $z^n=s_1$， $z^n=s_2$ 用正整数次方根，可得 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt[n]{s_1}$， $\{z_{n+1},z_{n+2},\cdots,z_{2n}\}=\sqrt[n]{s_2}$，于是 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}=\sqrt[n]{s_1}\cup\sqrt[n]{s_2}=\sqrt[n]{\dfrac{-a_n+\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}}\cup\sqrt[n]{\dfrac{-a_n-\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}}=\sqrt[n]{\dfrac{-a_n\pm\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}}$。

为有效融合和转换，**规定** $\sqrt[n]{s_1}\cup\sqrt[n]{s_2}=\sqrt[n]{\{s_1,s_2\}}$。

性质 2 设 $f(z)=a_0z^{2n}+a_nz^n+a_{2n}$，其中 $n\geq 2$， $a_0\neq 0$，方程 $f(z)=0$ 的 $2n$ 个复根为 $z_1,z_2,\cdots,z_{2n}$，则有

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}=\sqrt{\Big(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_{2n}\Big)}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n,a_{2n})}}=\sqrt[n]{\frac{-a_n\pm\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}}。$$

证明 由题设则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}=\sqrt{\Big(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_{2n}\Big)}$，将 $s=z^n$ 代入原方程可得

$a_0s^2+a_ns+a_{2n}=0$，设其 2 个复根为 s_1,s_2，则 $\{s_1,s_2\}=\sqrt{(a_0,a_n,a_{2n})}=\dfrac{-a_n\pm\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}$。

对 $z^n=s_1$， $z^n=s_2$ 用正整数次方根，可得 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt[n]{s_1}$， $\{z_{n+1},z_{n+2},\cdots,z_{2n}\}=\sqrt[n]{s_2}$

于是 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}=\sqrt[n]{s_1}\cup\sqrt[n]{s_2}=\sqrt[n]{\{s_1,s_2\}}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n,a_{2n})}}=\sqrt[n]{\dfrac{-a_n\pm\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}}$，

故 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{2n}\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_{2n}\right)}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n,a_{2n})}}=\sqrt[n]{\dfrac{-a_n\pm\sqrt{a_n^2-4a_0a_{2n}}}{2a_0}}$。】

设 n 为 ≥ 2 的整数， k 为正整数，则**规定** $\sqrt[n]{s_1}\cup\sqrt[n]{s_2}\cup\cdots\cup\sqrt[n]{s_k}=\sqrt[n]{\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}}$。

推论 设 $f(z)=a_0z^{kn}+a_nz^{(k-1)n}+\cdots+a_{(k-1)n}z^n+a_{kn}$，其中 $n\geq 2$，k 为正整数，$a_0\neq 0$，方程 $f(z)=0$ 的 kn 个复根为 $z_1,z_2,\cdots,z_{kn}$， 则有

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_{kn}\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n,\cdots,a_{(k-1)n}\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_{kn}\right)}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n,\cdots,a_{(k-1)n},a_{kn})}}。$$

证明 由题设，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{kn}\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n,\cdots,a_{(k-1)n}\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_{kn}\right)}$， 将 $s=z^n$ 代入原方程可得 $a_0s^k+a_ns^{k-1}+\cdots+a_{(k-1)n}s+a_{kn}=0$， 设其 k 个复根为 $s_1,s_2,\cdots,s_k$， 则

$$\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}=\sqrt{(a_0,a_n,\cdots,a_{(k-1)n},a_{kn})}$$

对 $z^n=s_1$， $z^n=s_2$，…， $z^n=s_k$ 用正整数次方根，可得

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt[n]{s_1}，\ \{z_{n+1},z_{n+2},\cdots,z_{2n}\}=\sqrt[n]{s_2}，\ \cdots，\{z_{(k-1)n+1},z_{(k-1)n+2},\cdots,z_{kn}\}=\sqrt[n]{s_k}，$$

于是 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{kn}\}=\sqrt[n]{s_1}\cup\sqrt[n]{s_2}\cup\cdots\cup\sqrt[n]{s_k}=\sqrt[n]{\{s_1,s_2,\cdots,s_k\}}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n,\cdots,a_{(k-1)n},a_{kn})}}$， 故

$\{z_1,z_2,\cdots,z_{kn}\}=\sqrt{\left(a_0,\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_n,\cdots,a_{(k-1)n}\underbrace{0,\cdots,0}_{n-1},a_{kn}\right)}=\sqrt[n]{\sqrt{(a_0,a_n,\cdots,a_{(k-1)n},a_{kn})}}$。】

第一篇

实系数代数方程
统一解法原理

第一章
方程实根统一解法原理

§1 施图姆定理与实根号

设多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，其中 $n\geq 1$，$a_0\neq 0$，$a_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$。为便于阐述，本篇 $f(z)$ 均为此式(在最后一章 $a_0>0$)。若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的所有根，由总根号定义，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

设立实根号，解决 $f(z)=0$ 求实根问题，必须先解决实根的隔离问题，为此我们以 $f_0(z)=f(z)$，$f_1(z)=f'(z)$ 为基作施图姆序列[6]

$$\{f(z),f'(z),f_2(z),\cdots,f_m(z)\} \tag{1}$$

(1)内均为实系数多项式，其中 $f_j(z)=q_j(z)f_{j+1}(z)-f_{j+2}(z)$，即 $f_{j+2}(z)=-rem(f_j(z),f_{j+1}(z))$，$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$，且 $f_{m+1}(z)\equiv 0$，最后多项式 $f_m(z)$ 是 $f_j(z),f_{j+1}(z)$ 的最大公因式。下面定理 1 及其推论根据预 章定理 2 及其推论即得。

定理 1 设 $z_0\in C$，l 为非负整数，$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$，则在序列(1)内

1) z_0 是 $\begin{cases}f_j(z)=0\\f_{j+1}(z)=0\end{cases}$ 的解的充要条件是：z_0 是 $f_m(z)=0$ 的根；

2) z_0 是 $\begin{cases}f_j(z)=0\\f_{j+1}(z)=0\end{cases}$ 的 l 重解的充要条件是：z_0 是 $f_m(z)=0$ 的 l 重根。

推论 1 在序列(1)内，$\begin{cases}f_j(z)=0\\f_{j+1}(z)=0\end{cases}$ 所有复数解(含重解)组成的集合与 $f_m(z)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即

$$\sqrt{f_j(\ )}\cap\sqrt{f_{j+1}(\ )}=\sqrt{f_m(\ )},\quad j=0,1,2,\cdots,(m-1)$$

于是 $f_m(z)=0$ 的所有复根就是 $\begin{cases}f_j(z)=0\\f_{j+1}(z)=0\end{cases}$ 的所有复数解。

序列(1)内由两个相邻多项式组成的这些方程组都具有相同的解集，称为同解方程组。$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}$ 即 $\sqrt{f(\ )}\cap\sqrt{f'(\ )}$，$f_m(z)=0$ 所有复根就是 $\begin{cases}f(z)=0\\f'(z)=0\end{cases}$ 所有复数解。

推论 2 设序列(1)内 $f_m(z)$ 的次数为 k，$\begin{cases} f_j(z)=0 \\ f_{j+1}(z)=0 \end{cases}$ 复数解(含重解)的个数为 K_j，则 $K_j=k$， $j=0,1,2,\cdots,(m-1)$，故 $\begin{cases} f_j(z)=0 \\ f_{j+1}(z)=0 \end{cases}$ 在 z 平面上有解的充要条件是：$k\ge 1$。

推论 3 $\begin{cases} f(z)=0 \\ f'(z)=0 \end{cases}$ 在 z 平面上无解的充要条件是：$(f(z),f'(z))=1$。

例 设序列(1)内，$\begin{cases} f(z)=f_m(z)g_0(z) \\ f'(z)=f_m(z)g_1(z) \end{cases}$，则 $\begin{cases} g_0(z)=0 \\ g_1(z)=0 \end{cases}$ 无解，$(g_0(z),g_1(z))=1$。

证明 根据预章定理 5 即得。】

下面定理 2 及其推论根据预章定理 3 及其推论即得。

定理 2 设 $z_0\in C$，l 为正整数，在序列(1)内，若 z_0 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 z_0 既是 $f'(z)=0$ 的 $l-1$ 重根，又是 $f_m(z)=0$ 的 $l-1$ 重根。

推论 1 设 $z_0\in C$，l 为正整数，若 z_0 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 z_0 是 $f(z)=0$，$f'(z)=0$,$\cdots$，$f^{(l-1)}(z)=0$ 的根，但不是 $f^{(l)}(z)=0$ 的根。

推论 2 设 $z_0\in C$，则 1) z_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根的充要条件是：z_0 是 $\begin{cases} f(z)=0 \\ f'(z)=0 \end{cases}$ 的解；2) z_0 是 $f(z)=0$ 的单根的充要条件是：$f(z_0)=0$ 且 $f'(z_0)\ne 0$。

推论 3 设 $z_0\in C$，在序列(1)内，1) z_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根的充要条件是：z_0 是 $f_m(z)=0$ 的根；2) z_0 是 $f(z)=0$ 的单根的充要条件是：$f(z_0)=0$ 且 $f_m(z_0)\ne 0$。

推论 4 在序列(1)内，1) $f(z)=0$ 没有重根的充要条件是：$f_m(z)$ 是非零常数；2) $f(z)=0$ 没有重根的充要条件是：$(f(z),f'(z))=1$。

推论 5 设 $z_0\in C$，k 为正整数，在序列(1)内，若 z_0 是 $f_m(z)=0$ 的 k 重根，则 z_0 是 $f(z)=0$ 的 $k+1$ 重根。

推论 6 设 $z_0\in C$，l 为正整数，则在序列(1)内

$$z_0(l)\in\sqrt{f_m(\ )}\Leftrightarrow z_0(l+1)\in\sqrt{f(\ )}，\quad z_0(l)\in\sqrt{f'(\ )}。$$

对于任意的 $a\in R$，序列(1)当 $z=a$ 时是一个实数序列 $\{f(a),f'(a),f_2(a),\cdots,f_m(a)\}$，将其中等于零的项拿出数列，若两个相邻数符号相反，就说这两个数之间有一次变号，则数列中各相邻数变号数之和定义为序列(1)在 z 平面实轴上点 a 的变号数[6]，记作

$$V_a = V\left\{f(a), f'(a), f_2(a), \cdots, f_m(a)\right\}。$$

定理 3 (施图姆定理[6])设$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，$x\in R$，序列(1)在点x的变号数记为V_x，则$f(z)=0$在z平面实轴上的区间(α,β)内共有$V_\alpha - V_\beta$个各不相同的根。若$f_m(z)$没有实根，则$f(z)=0$的实根都是单根；若$f_m(z)$有实根，则这些实根都是$f(z)=0$的 2 重以上根，其重数为$f_m(z)$根的重数加 1。

由定理 2 相关推论，该定理后半结论，显然成立，此外若$f_m(z)$没有虚根，则$f(z)=0$的虚根都是单根；若$f_m(z)$有虚根，则这些虚根都是$f(z)=0$的 2 重以上根，其重数为$f_m(z)$根的重数加 1。

推论 1 设$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，则$V_\alpha - V_\beta \geq 0$，其中$V_\alpha - V_\beta = 0$时，$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内没有根；$V_\alpha - V_\beta = k \geq 1$时，$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内共有$k$个各不相同的根。

证明 由定理 3 即得。】

推论 1 给出了判定$f(z)=0$在区间(α,β)内有没有根，有几个各不相同的根的方法，特别当$\alpha=-\infty$，$\beta=+\infty$时，可判定在整个实轴上有没有根，有几个各不相同的根。

推论 2 设$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，k为正整数，若已找到$f(z)=0$在(α,β)内的k个各不相同的根，则$V_\alpha - V_\beta \geq k$。

证明 根据定理 3 即得。】

例 设$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$，由推论 2，则$V_\alpha - V_\beta \geq 1$。

特别当$V_\alpha - V_\beta = 1$时，可以解决$f(z)=0$实根的隔离问题，从而设立实根号。

定义 设$f(z)=a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$($a_0\neq 0$)，$\alpha,\beta$均为有限实数，$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，$V_\alpha - V_\beta = 1$，则$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内只有一个根，设它为$x_0$，则$x_0$为 1 重以上实根，$f(x_0)=0$，称闭区间$[\alpha,\beta]$是实根$x_0$的一个隔离区间，并记

$$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (\text{简写成 } x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )})$$

且称${}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$是$f(z)=0$的一个实根号，它代表$x_0$的精确值，其中$[\alpha,\beta]$写在$\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$的左上方。

显然，${}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} \in \sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，简写成${}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )} \in \sqrt{f(\ )}$。

性质 设$f(z)=a_0z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n$($a_0\neq 0$)，则$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$的

充要条件是：α,β 均为有限实数，且 $\alpha < x_0 < \beta$， $f(\alpha)\neq 0$， $f(x_0)=0$， $f(\beta)\neq 0$， $V_\alpha - V_\beta = 1$。

若将区间 (α,β) 看作是点的集合，则 $\alpha < x_0 < \beta$ 也可表示为 $x_0 \in (\alpha,\beta)$。若 α,β 均为有限实数，则称 $[\alpha,\beta]$ 是与开区间 (α,β) 相对应的闭区间。

§2 实根的统一解法和实根号的计算方法

有了实根号，方程 $f(z)=0$ 实根的求解方法就变得简单和统一，就是利用§1 定理 3 寻找到每个实根(重根看作一个)的一个隔离区间，然后将每个实根用实根号表示出来。

显然，$f(-\infty)\neq 0$，$f(+\infty)\neq 0$。先计算 $V_{-\infty}-V_{+\infty}$，由§1 定理 3 推论 1，则

1. $V_{-\infty}-V_{+\infty}=0$ 时，$f(z)=0$ 没有实根。

2. $V_{-\infty}-V_{+\infty}=k_0\geq 1$ 时，$f(z)=0$ 在实轴上有 k_0 个各不相同的根，将 $(-\infty,+\infty)$ 分割成若干个子区间，判断每个子区间内 $f(z)=0$ 各不相同根的个数。若子区间内不含根，则把该区间舍去，剩下的每个子区间内都含有 $f(z)=0$ 的若干个各不相同的根。然后在剩下的区间内，作如下判断：1) 若区间内只含一个根(重根看作一个)，且该区间的两个端点均为有限实数，则将其相对应的闭区间作为该实根的隔离区间；2) 若区间内含有多个不同的根，或者虽然只含一个根，但该区间的两个端点中有一个是无限值($+\infty$ 或 $-\infty$)，则继续把该区间分割成若干个子区间，重复进行下一步的判断，直到每个子区间内只含一个根，且该区间的端点均为有限实数为止，其各区间相对应的闭区间都是 $f(z)=0$ 实根的隔离区间。

如此只要有限多次，就可在 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $f(z)=0$ 实根的 k_0 个隔离区间 $[\alpha_1,\beta_1]$, $[\alpha_2,\beta_2]$,$\cdots$, $[\alpha_{k_0},\beta_{k_0}]$，其中 $\alpha_1<\beta_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\cdots\leq\alpha_{k_0}<\beta_{k_0}$，且 $f(\alpha_j)\neq 0$，$f(\beta_j)\neq 0$，$V_{\alpha_j}-V_{\beta_j}=1$，$j=1,2,\cdots,k_0$。于是 $f(z)=0$ 的 k_0 个各不相同的实根就可表示为

$$x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\quad (\text{或 } x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{f(\ )}),\quad j=1,2,\cdots,k_0\text{。}$$

若先对实根的界[2]做出估计，找到包含所有实根的区间，则可使上述解法更便捷。

定理 1 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0\neq 0$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，于是 1) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$。2) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 或 V_β，其中 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 时，$x_0={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$；$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

证明 由题设则 α,β 均为有限实数，且 $\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$，$V_\alpha-V_\beta=1$，$\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$，1) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$。否则，假如 $x_0\neq\frac{\alpha+\beta}{2}$，

则 $f(z)=0$ 在 (α,β) 内有两个不相同的根 x_0 和 $\frac{\alpha+\beta}{2}$，与 $V_\alpha - V_\beta = 1$ 矛盾。2) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，根据§1 定理 3 推论 1，则 $V_\alpha \geq V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq V_\beta$。$V_\alpha > V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} > V_\beta$ 不可能成立，否则 $V_\alpha - V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq 1$ 且 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} - V_\beta \geq 1$，$V_\alpha - V_\beta \geq 2$，矛盾。故 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = V_\alpha$ 或 V_β，其中 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = V_\alpha$ 时，$V_\alpha - V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = 0$，$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} - V_\beta = V_\alpha - V_\beta = 1$，$x_0 \in (\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta) \subset (\alpha,\beta)$，$f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$，故 x_0 $= {}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = V_\beta$ 时，同理可证。】

定理 1 采用的分割法称为中点变号数分割法。$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 可用中点变号数分割法进行计算，方法如下：

1. 用中点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 把闭区间 $[\alpha,\beta]$ 分成两半，1) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$。2) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则计算序列(1)在点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的变号数 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$。$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = V_\alpha$ 时，记 $\alpha_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$，$\beta_1 = \beta$；$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = V_\beta$ 时，记 $\alpha_1 = \alpha$，$\beta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$。根据定理 1，则 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ $= {}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，其中 $x_0 \in (\alpha_1,\beta_1) \subset (\alpha,\beta)$，$\beta_1 - \alpha_1 = \frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

2. 以 $[\alpha_1,\beta_1]$ 作为新的隔离区间，重复上述做法，1) 若 $f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})=0$，则 $x_0 = \frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$。2) 若 $f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})\neq 0$，则有 $x_0 = {}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ $= {}^{[\alpha_2,\beta_2]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，其中 $x_0 \in (\alpha_2,\beta_2) \subset (\alpha_1,\beta_1)$，$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{1}{2^2}(\beta-\alpha)$。

3. 如此重复 N 次，可得 $x_0 = {}^{[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ $= {}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，其中 $x_0 \in (\alpha_N,\beta_N) \subset (\alpha_{N-1},\beta_{N-1}) \subset \cdots \subset (\alpha_1,\beta_1) \subset (\alpha,\beta)$，$\beta_N - \alpha_N = \frac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。若以 α_N 或 β_N 作为 x_0 的近似值，则误差小于 $\frac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。

若继续这种构造区间的步骤，将得到闭区间序列，后一个闭区间包含在前一个闭区间中，它是一递缩的闭区间套：$[\alpha,\beta] \supset [\alpha_1,\beta_1] \supset [\alpha_2,\beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_N,\beta_N] \supset \cdots\cdots$

由于 $\lim\limits_{N\to\infty}(\beta_N - \alpha_N) = \lim\limits_{N\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{2^N} = 0$，所以两变量 α_N 和 β_N 趋向于共同的极限，设为 a，

则 $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha_N=\lim\limits_{N\to\infty}\beta_N=a$ 且 $\alpha<a<\beta$，于是 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=a$ 。

计算实根号所用的中点变号数分割法既可求单实根，也可求2重以上(含 2 重)实根，这是普通二分法所不具备的，因而在理论的研究上具有不可替代的重要价值。普通二分法因其计算量小，更具实用性，但缺点是仅能求单实根。根据下面定理 3，我们可以用普通二分法计算单实根的根号。

定理 2[1] 在序列(1)内，若 $f_m(z)$没有实根，则 1) 任何两个相邻的多项式都没有公共实根；2) 若a是中间多项式 $f_{j_0}(z)$的实根($1\le j_0\le m-1$)，则 $f_{j_0-1}(a)=-f_{j_0+1}(a)$；3) 若$x$增加并经过某一个中间多项式 $f_{j_0}(z)$的实根a，则序列(1)的变号数不变；4) 若x增加并经过 $f(x)$的实根a，则 $f(x)$必然变号， $f(x)$与 $f'(x)$之间的变号数要减少一个。

证明 1) 用反证法。假如 $f_{j_0}(z)$和 $f_{j_0+1}(z)$有公共实根a，其中$0\le j_0\le m-1$，则a是 $\begin{cases} f_{j_0}(z)=0\\ f_{j_0+1}(z)=0\end{cases}$的实数解，从而$a$是 $f_m(z)$的实根，矛盾。故命题成立。

2) 由于 $f_{j_0-1}(a)=q_{j_0-1}(a)f_{j_0}(a)-f_{j_0+1}(a)$， $f_{j_0}(a)=0$，故 $f_{j_0-1}(a)=-f_{j_0+1}(a)$。

3) 由 $f_{j_0}(a)=0$ 和 1) 2)，则 $f_{j_0-1}(a)$和 $f_{j_0+1}(a)$均不为零且符号相反。不妨设 $f_{j_0-1}(a)<0$，$f_{j_0+1}(a)>0$，由多项式函数连续性，在实轴上存在充分小的区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，使 $f_{j_0-1}(x)$和 $f_{j_0+1}(x)$在该小区间内保持自己的符号，即 $f_{j_0-1}(x)<0$， $f_{j_0+1}(x)>0$，于是不论x在该小区间内取何值，则 $f_{j_0-1}(x),f_{j_0}(x),f_{j_0+1}(x)$之间的变号数都是 1，因而序列(1)的变号数在此邻域里保持不变。

4) 由$a\in R$， $f(a)=0$ 且 $f_m(a)\neq0$，故a是 $f(x)$的单根， $f'(a)\neq0$，于是 $f'(a)>0$ 或 $f'(a)<0$。由多项式函数连续性，在实轴上存在充分小的区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，使 $f(x)$在该小区间内仅有根a，$f'(x)$在此小区间内无根并且不变号，于是随着x增加并经过 $f(x)$的实根a，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$由负变正， $f(x)$与 $f'(x)$之间的变号数要减少一个；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$由正变负，$f(x)$与 $f'(x)$之间的变号数也要减少一个。故命题成立。】

引理 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0\neq0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，序列(1)内 $f_m(z)$没有实根，则 x_0 是 $f(z)=0$ 的单实根，且 $f(\alpha)f(\beta)<0$。

证明 由题设则α,β均为有限实数，且$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq0$，

$V_\alpha - V_\beta = 1$。$f_m(z)$没有实根，则x_0是$f(z)=0$的单实根，根据定理 2，若x增加并经过$f(x)$的实根x_0，则$f(x)$必然变号，于是 1) $f(\alpha)>0$时，必有$f(\beta)<0$。否则，假如$f(\beta)>0$，由多项式函数连续性，$f(z)=0$在(α,β)内至少有 2 个不相同的根，即$V_\alpha - V_\beta \ge 2$，矛盾。2) $f(\alpha)<0$时，同理可证$f(\beta)>0$。总之$f(\alpha)f(\beta)<0$。】

定理 3 设$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0\ne 0$)，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，序列(1)内$f_m(z)$没有实根，于是若 1) $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则$x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$。2) 若$f(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，则$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$时，$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$，$x_0 = {}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$；$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$时，$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$，$x_0 = {}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

证明 根据引理则$f(\alpha)f(\beta)<0$。由定理 1 则 1) 若$f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则$x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$。2) 若$f(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，则$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$或$V_\beta$，其中$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$时，假如$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$，由定理 1，则$x_0 = {}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，由引理则$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$，矛盾，于是$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$，再由定理 1 即得。$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$时，$f(\frac{\alpha+\beta}{2})f(\beta)>0$，同理可证$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$，再由定理 1 即得。】

当$(f(z),f'(z))=1$时，序列(1)内$f_m(z)$是非零常数，它当然没有实根。若$f_m(z)$没有实根，由定理 3 可用普通二分法计算$f(z)=0$单实根$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，方法如下：

1. 用中点$\frac{\alpha+\beta}{2}$把闭区间$[\alpha,\beta]$分成两半，1) 若$f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则$x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$。2) 若$f(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，则$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$时，记$\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\beta_1=\beta$；$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$时，记$\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$。由定理 3，则$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} = {}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，其中$x_0\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$，$\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

2. 以$[\alpha_1,\beta_1]$作为新的隔离区间，重复上述做法，1) 若$f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})=0$，则$x_0=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$。2) 若$f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})\ne 0$，则有$x_0 = {}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} = {}^{[\alpha_2,\beta_2]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，其中

$x_0 \in (\alpha_2, \beta_2) \subset (\alpha_1, \beta_1)$，$\beta_2 - \alpha_2 = \frac{1}{2^2}(\beta - \alpha)$。

3．如此重复 N 次，可得 $x_0 = {}^{[\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}]}\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)} = {}^{[\alpha_N, \beta_N]}\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}$，其中 $x_0 \in (\alpha_N, \beta_N) \subset (\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}) \subset \cdots \subset (\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$，$\beta_N - \alpha_N = \frac{1}{2^N}(\beta - \alpha)$。若以 α_N 或 β_N 作为 x_0 的近似值，则误差小于 $\frac{1}{2^N}(\beta - \alpha)$。

若继续这种构造区间的步骤，将得到闭区间序列，后一个闭区间包含在前一个闭区间中，它是一递缩的闭区间套：$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_N, \beta_N] \supset \cdots\cdots$

由于 $\lim\limits_{N \to \infty}(\beta_N - \alpha_N) = \lim\limits_{N \to \infty} \frac{\beta - \alpha}{2^N} = 0$，所以两变量 α_N 和 β_N 趋向于共同的极限，设为 a，则 $a \in (\alpha, \beta)$，于是 $x_0 = {}^{[\alpha, \beta]}\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)} = a$。

§3 实根号的基本性质与根的重数计算

引理 设 $\deg\ f(z)=n$，$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，b 为有限实数，令 $s=z-b$，

$$t(s)=\frac{f^{(n)}(b)}{n!}s^n+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(b)}{1!}s+f(b)$$

以 $t(s),t^{'}(s)$ 为基的施图姆序列在点 s（$s\in R$）的变号数记为 V_s^t，则 $V_\alpha-V_\beta=V_{\alpha-b}^t-V_{\beta-b}^t$。

证明 由题设则 $t(s)=t(z-b)=f(z)$，其中 $t(s)$ 也是实系数 n 次多项式。$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，于是 $\alpha-b<\beta-b$，$t(\alpha-b)=f(\alpha)\neq 0$，$t(\beta-b)=f(\beta)\neq 0$。

根据预章定理 6 推论 4，则 $f(z)=0$ 在 (α,β) 内各不相同根的个数等于 $t(s)=0$ 在 $(\alpha-b,\beta-b)$ 内各不相同根的个数，根据§1 定理 3，即 $V_\alpha-V_\beta=V_{\alpha-b}^t-V_{\beta-b}^t$。】

定理 1 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0\neq 0$），$b$ 为有限实数，则 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的充要条件是

$$x_0-b=s_0=\sqrt[{[\alpha-b,\beta-b]}]{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{'}(b)}{1!},f(b)\right)}$$

证明 由题设可令 $s=z-b$，$t(s)=\dfrac{f^{(n)}(b)}{n!}s^n+\dfrac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\dfrac{f^{'}(b)}{1!}s+f(b)$，则 $t(s)=t(z-b)=f(z)$。以 $t(s),t^{'}(s)$ 为基的施图姆序列在点 s $(s\in R)$ 的变号数记为 V_s^t，由引理则 α,β 均为有限实数，且 $\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$，$V_\alpha-V_\beta=1$ 的充要条件是：$\alpha-b$ 和 $\beta-b$ 均为有限实数，且 $\alpha-b<x_0-b=s_0<\beta-b$，$t(\alpha-b)\neq 0$，$t(x_0-b)=t(s_0)=0$，$t(\beta-b)\neq 0$，$V_{\alpha-b}^t-V_{\beta-b}^t=1$。于是命题成立。】

定理 2 设 $n,k,n-k$ 均为正整数，$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0\neq 0$），$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，序列(1)内 $f_m(z)=a_{m0}z^k+a_{m1}z^{k-1}+\cdots+a_{m\ k-1}z+a_{mk}$ $(a_{m0}\neq 0)$，且 $f(z)=f_m(z)q(z)$，其中 $q(z)=b_0z^{n-k}+b_1z^{n-k-1}+\cdots+b_{n-k-1}z+b_{n-k}$ $(b_0\neq 0)$，以 $f_m(z),f_m^{'}(z)$ 为基和以 $q(z),q^{'}(z)$ 为基的施图姆序列在点 x $(x\in R)$ 的变号数分别记为 $V_x^{(1)}$ 和 V_x^q，于是

1. $f_m(\alpha)\neq 0$，$f_m(\beta)\neq 0$，$V_\alpha-V_\beta\geq V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq 0$。

2. $q(z)$ 不含重因式且包含 $f(z)$ 的所有不同的根，这意味着：

   1) $f(z_0)=0$ 的充要条件是 $q(z_0)=0$；2) $V_\alpha-V_\beta=V_\alpha^q-V_\beta^q$；

3) $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}$ 的充要条件是： $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(b_0, b_1, \cdots, b_{n-k-1}, b_{n-k})}$ 。

(简写成 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )} \Leftrightarrow x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{q(\ )}$)

3. 若 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}$ ，则 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 或 1，其中

1) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 时， $f_m(x_0) \neq 0$ ， $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的单实根；

2) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$ 时， $f_m(x_0) = 0$ ， $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上实根，且有

$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_{m0}, a_{m1}, \cdots, a_{m\ \ k-1}, a_{mk})}$ (简写成 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_m(\ )}$)

证明 1. 由于 $\alpha < \beta$ ， $f(\alpha) \neq 0$ ， $f(\beta) \neq 0$ ， $f(z) = f_m(z)q(z)$ ，则 $f_m(\alpha) \neq 0$ ， $f_m(\beta) \neq 0$ 。不妨设 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = k_0$ ，由§1 定理 3 推论 1，则 $V_\alpha - V_\beta \geq 0$ ， $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = k_0 \geq 0$ ，于是 $k_0 = 0$ 时，有 $V_\alpha - V_\beta \geq 0 = V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}$ ； $k_0 \geq 1$ 时， $f_m(z) = 0$ 在 (α, β) 内有 k_0 个各不相同的根，由 $f(z) = f_m(z)q(z)$ 可知，这 k_0 个根也是 $f(z) = 0$ 在 (α, β) 内的 k_0 个各不相同的根，由§1 定理 3 推论 2 则 $V_\alpha - V_\beta \geq k_0 = V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}$ 。总之 $V_\alpha - V_\beta \geq V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \geq 0$ 。

2. $f_m(z)$ 为 $f(z), f'(z)$ 的最大公因式， $f_m(z)$ 就是 $f(z)$ 的重因式部分， $q(z) = \dfrac{f(z)}{f_m(z)}$ ，所以 $q(z)$ 就不含重因式且包含 $f(z)$ 的所有不同的根，这就意味着：1) 若 $f(z_0) = 0$ ，则 $q(z_0) = 0$ ；反过来，若 $q(z_0) = 0$ ，由 $f(z) = f_m(z)q(z)$ 则 $f(z_0) = 0$ 。2) $f(z)$ 与 $q(z)$ 在同一区间 (α, β) 内各不相同根的个数是相同的，根据§1 定理 3 即 $V_\alpha - V_\beta = V_\alpha^q - V_\beta^q$ 。3) 由 1) 和 2)，若 α, β 均为有限实数，且 $\alpha < x_0 < \beta$ ，则 $f(\alpha) \neq 0$ ， $f(x_0) = 0$ ， $f(\beta) \neq 0$ ， $V_\alpha - V_\beta = 1$ 的充要条件是： $q(\alpha) \neq 0$ ， $q(x_0) = 0$ ， $q(\beta) \neq 0$ ， $V_\alpha^q - V_\beta^q = 1$ 。于是命题成立。

3. 若 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}$ ，则 α, β 均为有限实数，且 $\alpha < x_0 < \beta$ ， $f(\alpha) \neq 0$ ， $f(\beta) \neq 0$ ， $f(x_0) = 0$ ， $V_\alpha - V_\beta = 1$ 。由题设和 1. 则 $f_m(\alpha) \neq 0$ ， $f_m(\beta) \neq 0$ ， $1 \geq V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \geq 0$ ，于是 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 或 1，其中 1) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 时， $f_m(z) = 0$ 在 (α, β) 内没有根， $\alpha < x_0 < \beta$ ，因此 $f_m(x_0) \neq 0$ 。又 $f(x_0) = 0$ ，故 $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的单实根。2) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$ 时，不妨设 $x_1 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_{m0}, a_{m1}, \cdots, a_{m\ \ k-1}, a_{mk})}$ ，则 $\alpha < x_1 < \beta$ ， $f_m(x_1) = 0$ 。由 $f(z) = f_m(z)q(z)$ ，则 $f(x_1) = 0$ 。于是 x_0, x_1 都是 $f(z) = 0$ 在 (α, β) 内的根， $V_\alpha - V_\beta = 1$ ，必有 $x_0 = x_1$ ，故 $f_m(x_0) = f_m(x_1) = 0$ ， $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上实根，且有 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_{m0}, a_{m1}, \cdots, a_{m\ \ k-1}, a_{mk})}$ 。】

推论 1 设 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，则 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 或 1，其中 1) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 的充要条件是 $f_m(x_0) \neq 0$；2) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$ 的充要条件是 $f_m(x_0) = 0$。

证明 根据定理 2 的 3 即得。】

推论 2 设 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，1) 若 $f_m(x_0) \neq 0$，则 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$；2) 若 $f_m(x_0) = 0$，则 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$，且 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f_m(\ )}$。

证明 根据定理 2 及其推论 1 即得。】

下面探讨方程 $f(z)=0$ 实根的重数计算。若 $V_{-\infty} - V_{+\infty} = k_0 \geq 1$，则 $f(z)=0$ 在实轴上有 k_0 个各不相同的根，不妨设为 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n)}$ (或 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{f(\ )}$)，$j = 1, 2, \cdots, k_0$，其中 $\alpha_1 < \beta_1 \leq \alpha_2 < \beta_2 \leq \cdots \leq \alpha_{k_0} < \beta_{k_0}$，且 $f(\alpha_j) \neq 0$，$f(\beta_j) \neq 0$，$V_{\alpha_j} - V_{\beta_j} = 1$，$j = 1, 2, \cdots, k_0$。设序列(1)内 $f_m(z)$ 的次数为 k。

1. 如果 $k = 0$，则 $(f(z), f'(z)) = 1$，那么 $x_1, x_2, \cdots, x_{k_0}$ 均为 $f(z)=0$ 的单实根。

2. 如果 $k \geq 1$，就作以 $f_m(z), f_m'(z)$ 为基的施图姆序列 $\{f_m(z), f_m'(z), f_{m+2}(z), \cdots, f_{m+m_1}(z)\}$ 记其在点 x $(x \in R)$ 的变号数为 $V_x^{(1)}$，于是

1) 若 $V_{-\infty}^{(1)} - V_{+\infty}^{(1)} = 0$，则 $f_m(z)=0$ 没有实根，$x_1, x_2, \cdots, x_{k_0}$ 均为 $f(z)=0$ 的单实根。

2) 若 $V_{-\infty}^{(1)} - V_{+\infty}^{(1)} = k^{(1)} \geq 1$，则 $f_m(z)=0$ 有 $k^{(1)}$ 个各不相同的实根，根据§1 定理 2 推论 3，则 $f(z)=0$ 有 $k^{(1)}$ 个 2 重以上实根。由于 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{f(\ )}$，根据定理 2 则 $V_{\alpha_j}^{(1)} - V_{\beta_j}^{(1)} = 0$ 或 1，其中 $V_{\alpha_j}^{(1)} - V_{\beta_j}^{(1)} = 0$ 时，$f_m(x_j) \neq 0$，$z = x_j$ 是 $f(z)=0$ 的单实根($k_0 - k^{(1)}$ 个)；$V_{\alpha_j}^{(1)} - V_{\beta_j}^{(1)} = 1$ 时，$f_m(x_j) = 0$，$z = x_j$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上实根，且有 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{f(\ )} = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{f_m(\ )}$，这时，若 deg $f_{m+m_1}(z) = 0$，则 x_j 是 $f(z)=0$ 的 2 重实根($k^{(1)}$ 个)。

3. 如果 deg $f_{m+m_1}(z) \geq 1$，就继续作以 $f_{m+m_1}(z), f_{m+m_1}'(z)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_{m+m_1}(z), f_{m+m_1}'(z), f_{m+m_1+2}(z), \cdots, f_{m+m_1+m_2}(z)\}$$

记其在点 x $(x \in R)$ 的变号数为 $V_x^{(2)}$，1) 若 $V_{-\infty}^{(2)} - V_{+\infty}^{(2)} = 0$，则当 $V_{\alpha_j} - V_{\beta_j} = V_{\alpha_j}^{(1)} - V_{\beta_j}^{(1)} = 1$ 时，$z = x_j$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重实根($k^{(1)}$ 个)。2) 若 $V_{-\infty}^{(2)} - V_{+\infty}^{(2)} = k^{(2)} \geq 1$，则 $f_{m+m_1}(z)=0$ 有 $k^{(2)}$ 个各不相同的实根，$f(z)=0$ 有 $k^{(2)}$ 个 3 重以上实根，当 $V_{\alpha_j} - V_{\beta_j} = V_{\alpha_j}^{(1)} - V_{\beta_j}^{(1)} = 1$，$V_{\alpha_j}^{(2)} - V_{\beta_j}^{(2)} = 0$

时，$z=x_j$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重实根($k^{(1)}-k^{(2)}$ 个)；当 $V_{\alpha_j}-V_{\beta_j}=V_{\alpha_j}^{(1)}-V_{\beta_j}^{(1)}=V_{\alpha_j}^{(2)}-V_{\beta_j}^{(2)}=1$ 时，$z=x_j$ 是 $f(z)=0$ 的 3 重以上实根，且 $x_j=\sqrt[\left[\alpha_j,\beta_j\right]]{f(\ )}=\sqrt[\left[\alpha_j,\beta_j\right]]{f_m(\ )}=\sqrt[\left[\alpha_j,\beta_j\right]]{f_{m+m_1}(\ )}$，这时，若 deg $f_{m+m_1+m_2}(z)=0$，则 x_j 是 $f(z)=0$ 的 3 重实根($k^{(2)}$ 个)。

此外，要注意：当 $V_{\alpha_j}-V_{\beta_j}=1$，$V_{\alpha_j}^{(1)}-V_{\beta_j}^{(1)}=0$ 时，根据定理 2 的 1，则

$$0=V_{\alpha_j}^{(1)}-V_{\beta_j}^{(1)}\geq V_{\alpha_j}^{(2)}-V_{\beta_j}^{(2)}\geq 0\text{，故 }V_{\alpha_j}^{(2)}-V_{\beta_j}^{(2)}=0\text{。}$$

4. 如果 deg $f_{m+m_1+m_2}(z)\geq 1$，那么继续重复上述做法，…，一直这样做可得到一个以 $f(z),f'(z)$ 为基扩展的施图姆序列

$$\left\{\ f(z),f'(z),\cdots,f_m(z),f_m'(z),\cdots,f_{m+m_1}(z),\cdots,f_{m+\sum\limits_{j=1}^{h}m_j}(z)\ \right\}\tag{2}$$

其中 $f_{m+\sum\limits_{j=1}^{h}m_j}(z)$ 是非零常数。我们称序列(2)是以 $f(z),f'(z)$ 为基的施图姆序列的扩展型，并记其在点 $x\ (x\in R)$ 的变号数为 U_x，则 $U_x=V_x+\sum\limits_{j=1}^{h}V_x^{(j)}$。下面将证明 $f(z)=0$ 的实根 $x_j=\sqrt[\left[\alpha_j,\beta_j\right]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的重数 $l_j=U_{\alpha_j}-U_{\beta_j}$，$j=1,2,\cdots,k_0$。$f(z)$ 的实根因式就可表示为 $\prod\limits_{j=1}^{k_0}\left(z-\sqrt[\left[\alpha_j,\beta_j\right]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\right)^{U_{\alpha_j}-U_{\beta_j}}$。

为叙述方便，称序列(1)是以 $f(z),f'(z)$ 为基的施图姆序列的标准型。

若 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$，则 $f_m(z)$ 是非零常数，$f(z)=0$ 没有重根，以 $f(z),f'(z)$ 为基的施图姆序列只有标准型，没有扩展型，为此特别约定：当 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，以 $f(z),f'(z)$ 为基的施图姆序列的扩展型等于标准型，在点 $x\ (x\in R)$ 的变号数有 $U_x=V_x$。

定理 3 设 $\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，则在序列(2)内，

1) $V_\alpha-V_\beta\geq V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}\geq\cdots\geq V_\alpha^{(h)}-V_\beta^{(h)}\geq 0$；2) $U_\alpha-U_\beta\geq V_\alpha-V_\beta\geq 0$；

3) $V_\alpha-V_\beta=0$ 的充要条件是 $U_\alpha-U_\beta=0$；4) 若 $U_\alpha-U_\beta=1$，则 $V_\alpha-V_\beta=1$。

证明 1) 根据定理 2 的 1，对 h 作数学归纳法即得。

2) 由 1)，则有$V_\alpha - V_\beta \ge 0$， $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge 0$,$\cdots$, $V_\alpha^{(h)} - V_\beta^{(h)} \ge 0$，从而

$$U_\alpha - U_\beta = (V_\alpha + \sum_{j=1}^{h} V_\alpha^{(j)}) - (V_\beta + \sum_{j=1}^{h} V_\beta^{(j)}) = (V_\alpha - V_\beta) + \sum_{j=1}^{h}(V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)}) \ge V_\alpha - V_\beta \ge 0 \text{。}$$

3) 若$V_\alpha - V_\beta = 0$，由 1)则$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$， $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 0$,$\cdots$, $V_\alpha^{(h)} - V_\beta^{(h)} = 0$。于是$U_\alpha - U_\beta = (V_\alpha - V_\beta) + \sum_{j=1}^{h}(V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)}) = 0$。反过来，若$U_\alpha - U_\beta = 0$，由 2)则$V_\alpha - V_\beta = 0$。

4) 若$U_\alpha - U_\beta = 1$，由 2)则$V_\alpha - V_\beta = 0$或1。假如$V_\alpha - V_\beta = 0$，由 3)则$U_\alpha - U_\beta = 0$，矛盾。所以$V_\alpha - V_\beta = 1$。】

引理 设$z_0 \in C$，l为正整数，在序列(2)内，若z_0是$f(z)=0$的l重根，则z_0是$f(z)=0$，$f_m(z)=0$,$\cdots$, $f_{m+\sum_{j=1}^{l-2} m_j}(z)=0$的根，但不是$f_{m+\sum_{j=1}^{l-1} m_j}(z)=0$的根。

证明 根据§1 定理 2，对l作数学归纳法即得。】

定理 4 设l为正整数，在序列(2)内，若$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$是$f(z)=0$的$l$重根，则$V_\alpha - V_\beta = 1$， $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$,$\cdots$, $V_\alpha^{(l-1)} - V_\beta^{(l-1)} = 1$，有

$$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )} = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_m(\ )} = \cdots = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_{m+\sum_{j=1}^{l-2} m_j}(\ )}$$

且$V_\alpha^{(l)} - V_\beta^{(l)} = 0, V_\alpha^{(l+1)} - V_\beta^{(l+1)} = 0$,$\cdots$, $V_\alpha^{(h)} - V_\beta^{(h)} = 0$，于是$l = U_\alpha - U_\beta$。

证明 由题设则α,β均为有限实数，且$\alpha < x_0 < \beta$，$f(\alpha) \ne 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta) \ne 0$，$V_\alpha - V_\beta = 1$。根据引理则$f(x_0)=0$， $f_m(x_0)=0$,$\cdots$, $f_{m+\sum_{j=1}^{l-2} m_j}(x_0)=0$，但$f_{m+\sum_{j=1}^{l-1} m_j}(x_0) \ne 0$。

根据定理 2 推论 2，由$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$且$f_m(x_0)=0$可得$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$且$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_m(\ )}$；由$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_m(\ )}$且$f_{m+m_1}(x_0)=0$可得$V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$且$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_{m+m_1}(\ )}$;$\cdots$;

由$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_{m+\sum_{j=1}^{l-3} m_j}(\ )}$且$f_{m+\sum_{j=1}^{l-2} m_j}(x_0)=0$可得$V_\alpha^{(l-1)} - V_\beta^{(l-1)} = 1$且$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_{m+\sum_{j=1}^{l-2} m_j}(\ )}$。

于是$V_\alpha - V_\beta = 1, V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$,$\cdots$, $V_\alpha^{(l-1)} - V_\beta^{(l-1)} = 1$，且

$$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )} = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_m(\ )} = \cdots = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_{m+\sum_{j=1}^{l-2} m_j}(\ )} \text{。}$$

由 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f_{m+\sum\limits_{j=1}^{l-2}m_j}(\ )}$ 且 $f_{m+\sum\limits_{j=1}^{l-1}m_j}(x_0)\neq 0$ 可得 $V_\alpha^{(l)}-V_\beta^{(l)}=0$。根据定理 3 有

$$V_\alpha^{(l)}-V_\beta^{(l)}\geq V_\alpha^{(l+1)}-V_\beta^{(l+1)}\geq\cdots\geq V_\alpha^{(h)}-V_\beta^{(h)}\geq 0\text{。}$$

于是 $V_\alpha^{(l)}-V_\beta^{(l)}=0,\ V_\alpha^{(l+1)}-V_\beta^{(l+1)}=0\ ,\cdots,\ V_\alpha^{(h)}-V_\beta^{(h)}=0$。

$$U_\alpha-U_\beta=(V_\alpha-V_\beta)+\sum_{j=1}^{h}(V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)})=(V_\alpha-V_\beta)+\sum_{j=1}^{l-1}(V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)})=1+(l-1)=l\text{。】}$$

定理 5 设 $\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上的区间 (α,β) 内共有 $U_\alpha-U_\beta$ 个根(含重根)。

证明 根据§1 定理 3 推论 1，则 $V_\alpha-V_\beta\geq 0$，其中

1) $V_\alpha-V_\beta=0$ 时，$f(z)=0$ 在 (α,β) 内没有根，由定理 3，$U_\alpha-U_\beta=0$，命题成立。

2) $V_\alpha-V_\beta=k_0\geq 1$ 时，$f(z)=0$ 在 (α,β) 内有 k_0 个各不相同的根，不妨设为 $x_j=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{f(\ )}$，$j=1,2,\cdots,k_0$，其中 $\alpha\leq\alpha_1<\beta_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\cdots\leq\alpha_{k_0}<\beta_{k_0}\leq\beta$，且 $\alpha_j<x_j<\beta_j$，$f(\alpha_j)\neq 0$，$f(x_j)=0$，$f(\beta_j)\neq 0$，$V_{\alpha_j}-V_{\beta_j}=1$，$j=1,2,\cdots,k_0$。

根据定理 4，实根 x_j 的重数 $l_j=U_{\alpha_j}-U_{\beta_j}$，$j=1,2,\cdots,k_0$。不妨设 $f(z)=0$ 在 (α,β) 内共有 L 个根(含重根)，则 $L=\sum\limits_{j=1}^{k_0}l_j=\sum\limits_{j=1}^{k_0}(U_{\alpha_j}-U_{\beta_j})$。又

$$U_\alpha-U_\beta=(U_\alpha-U_{\alpha_1})+\sum_{j=1}^{k_0}(U_{\alpha_j}-U_{\beta_j})+\sum_{j=1}^{k_0-1}(U_{\beta_j}-U_{\alpha_{j+1}})+(U_{\beta_{k_0}}-U_\beta)$$

由于 $V_\alpha-V_{\alpha_1}=0$，$V_{\beta_{k_0}}-V_\beta=0$，$V_{\beta_j}-V_{\alpha_{j+1}}=0$，$j=1,2,\cdots,(k_0-1)$，根据定理 3，则

$$U_\alpha-U_{\alpha_1}=0\text{，}U_{\beta_{k_0}}-U_\beta=0\text{，}U_{\beta_j}-U_{\alpha_{j+1}}=0\text{，}\ j=1,2,\cdots,(k_0-1)\text{。}$$

故有 $U_\alpha-U_\beta=\sum\limits_{j=1}^{k_0}(U_{\alpha_j}-U_{\beta_j})=\sum\limits_{j=1}^{k_0}l_j=L$，即 $L=U_\alpha-U_\beta$。于是命题成立。】

为便于今后运用，将施图姆定理和本节定理 3 至 5 进行归纳整理，写成定理 6。

定理 6 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0\neq 0$)，$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，$x\in R$，序列(1)和(2)在点 x 的变号数分别记为 V_x 和 U_x，则 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上的区间 (α,β) 内共有 $U_\alpha-U_\beta$ 个根，其中各不相同根的个数为 $V_\alpha-V_\beta$，而且 1) $U_\alpha-U_\beta\geq$

$V_\alpha - V_\beta \geq 0$；$V_\alpha - V_\beta = 0$的充要条件是$U_\alpha - U_\beta = 0$；若$U_\alpha - U_\beta = 1$，则$V_\alpha - V_\beta = 1$。2) 若$\alpha,\beta$均为有限实数，当$V_\alpha - V_\beta = 1$时，$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内只有一个根(重根看作一个)，设它为$x_0$，则$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$（或简写成$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$），根$x_0$的重数$l = U_\alpha - U_\beta$。

显然，${}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}(U_\alpha - U_\beta) \in \sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，或简写成

$${}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}(U_\alpha - U_\beta) \in \sqrt{f(\ )}。$$

推论 1 设$\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则$U_\alpha - U_\beta \geq 0$，其中$U_\alpha - U_\beta = 0$时，$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内没有根；$U_\alpha - U_\beta = k \geq 1$时，$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内共有$k$个根。

证明 由定理 6 即得。】

推论 1 给出了判定$f(z)=0$在区间(α,β)内有没有根，有几个根的方法，特别当$\alpha = -\infty$，$\beta = +\infty$时，可判定在整个实轴上有没有根，有几个根。

推论 2 设$\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，k为正整数，若已找到$f(z)=0$在(α,β)内的k个根，则$U_\alpha - U_\beta \geq k$。

证明 根据定理 6 即得。】

实系数代数方程实根的统一解法至此已经完成。在统一解法之下，每个实根用一个实根号就能表达，其重数就等于施图姆序列扩展型在该实根隔离区间的两个端点的变号数之差，于是实系数多项式的实根因式(包括重数)也能简洁表达，因而具有重要意义。

解决了任意次方程的求实根问题，就为解决共轭复根的实部与虚部问题打下了坚实的基础。下面，我们用一个简单的五次代数方程的实例，目的是验证一下上述定理及推论。

例：求方程$f(z) = z^5 - 5z^4 + 7z^3 - 2z^2 + 4z - 8 = 0$的实根及其重数。

解：用辗转相除法可求得以$f(z), f'(z)$为基的施图姆序列标准型$\{f(z), f'(z), f_2(z), f_3(z)\}$其中$f'(z) = 5z^4 - 20z^3 + 21z^2 - 4z + 4$，$f_2(z) = 6z^3 - 15z^2 - 12z + 36$，$f_3(z) = -z^2 + 4z - 4$
$f_3(z)$是$f(z), f'(z)$的最大公因式。$f_3(z) = -(z^2 - 4z + 4) = -(z-2)^2$有一个 2 重实根$z = 2$，由施图姆定理，原方程$f(z)=0$有一个 3 重实根$z = 2$。

记$f_4(z) = f_3'(z) = -2z + 4$，可求得以$f_3(z), f_3'(z)$为基的施图姆序列为$\{f_3(z), f_4(z)\}$。

记 $f_5(z)=f_4'(z)=-2$，因此以 $f_4(z),f_4'(z)$ 为基的施图姆序列为 $\{f_4(z),f_5(z)\}$。

故以 $f(z),f'(z)$ 为基的施图姆序列的扩展型为 $\{f(z),f'(z),f_2(z),f_3(z),f_4(z),f_5(z)\}$。

$q(z)=\dfrac{f(z)}{f_3(z)}=-z^3+z^2+z+2$，可求得以 $q(z),q'(z)$ 为基的施图姆序列 $\{q(z),q'(z),q_2(z),q_3(z)\}$，其中 $q'(z)=-3z^2+2z+1$，$q_2(z)=-8z-19$，$q_3(z)=1$。

下面列表计算施图姆序列的变号数：

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	V_x	$f_4(x)$	$f_5(x)$	U_x
$-\infty$	−	+	−	−	2	+	−	4
$+\infty$	+	+	+	−	1	−	−	1

$f(z)=0$ 共有 $U_{-\infty}-U_{+\infty}=4-1=3$ 个实根，其各不相同根的个数为 $V_{-\infty}-V_{+\infty}=2-1=1$。再作

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	V_x
$-\infty$	−	+	-	−	2
0	−	+	+	−	2
$+\infty$	+	+	+	−	1

x	$q(x)$	$q'(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	V_x^q
$-\infty$	+	-	+	+	2
0	+	+	−	+	2
$+\infty$	−	−	−	+	1

可知：$f(x)=0$ 有一个正根，$q(x)=0$ 有一个正根。再作

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	V_x	$f_4(x)$	$f_5(x)$	U_x
1	−	+	+	−	2	+	−	4
3	+	+	+	−	1	−	−	1

$V_1-V_3=2-1=1$　　　　　$U_1-U_3=4-1=3$

x	$q(x)$	$q'(x)$	$q_2(x)$	$q_3(x)$	V_x^q
1	+	0	-	+	2
3	−	−	−	+	1

$V_1^q-V_3^q=2-1=1$，因此在 z 平面实轴上的同一区间 $(1,3)$ 内有 $V_1-V_3=V_1^q-V_3^q$。作

x	$f_3(x)$	$f_4(x)$	$V_x^{(1)}$
1	−	+	1
3	−	−	0

$$V_1^{(1)}-V_3^{(1)}=1-0=1$$

x	$f_4(x)$	$f_5(x)$	$V_x^{(2)}$
1	+	−	1
3	−	−	0

$$V_1^{(2)}-V_3^{(2)}=1-0=1$$

因$1<3$，$f(1)\neq 0$，$f(3)\neq 0$，$V_1-V_3=1$，根据定理 6，$f(z)=0$在区间$(1,3)$内只有一个根，设它为x_0，则$x_0=\sqrt[{[1,3]}]{(1,-5,7,-2,4,-8)}$，根$x_0$的重数$l=U_1-U_3=3$。

根据定理 2 和 4，则还有

$$x_0=\sqrt[{[1,3]}]{(1,-5,7,-2,4,-8)}=\sqrt[{[1,3]}]{(-1,1,1,2)}=\sqrt[{[1,3]}]{(-1,4,-4)}=\sqrt[{[13]}]{(-2,4)}=2$$

上面实根号运算中，由于$\sqrt[{[1,3]}]{(-2,4)}\in\sqrt{(-2,4)}$，$\sqrt{(-2,4)}=\sqrt{(1,-2)}=\{2\}$，故$\sqrt[{[1,3]}]{(-2,4)}=2$。

$f(z)$的实根因式可表示为$\left(z-\sqrt[{[1,3]}]{(1,-5,7,-2,4,-8)}\right)^{4-1}=(z-2)^3$

该例表明：若$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$是$f(z)=0$所有复根中重数最大的根，则通过以$f(z), f'(z)$为基的施图姆序列扩展型内部的实根号运算，是可以求出其精确值的。

§4 实根号的一般性质

本节探讨实根号的一般性质，为下一步更深入的理论研究做准备。

设n次多项式$f(z)$可以分解成$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$，其中$n\geq 1$，$b\in R$，$b$是非零常数，$k_1,k_2,\cdots,k_s$均为正整数，$p_1(z),p_2(z),\cdots,p_s(z)$均为次数$\geq 1$的实系数多项式，则

$$\sqrt{f(\ )}=\left(\overset{k_1}{\cup}\sqrt{p_1(\ )}\right)\cup\left(\overset{k_2}{\cup}\sqrt{p_2(\ )}\right)\cup\cdots\cup\left(\overset{k_s}{\cup}\sqrt{p_s(\ )}\right)。$$

若$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，根据§1 定理 3，则$f(z)=0$在z平面实轴上的区间(α,β)内共有$V_\alpha-V_\beta$个各不相同的根，我们用$V_{(\alpha,\beta)}$表示由$f(z)=0$在(α,β)内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为$V_\alpha-V_\beta$，显然$V_{(\alpha,\beta)}$是不允许有重元的；根据§3 定理 6，则$f(z)=0$在(α,β)内共有$U_\alpha-U_\beta$个根，我们用$U_{(\alpha,\beta)}$表示由$f(z)=0$在(α,β)内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为$U_\alpha-U_\beta$，显然$U_{(\alpha,\beta)}$是允许有重元的，且元的重数必须与根的重数相等。

设$x\in R$，以$p_j(z),p_j'(z)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点x的变号数分别记为$V_x^{(j)}$和$U_x^{(j)}$，$j=1,2,\cdots,s$。若$\alpha<\beta$，$p_j(\alpha)\neq 0$，$p_j(\beta)\neq 0$，$j=1,2,\cdots,s$，则用$V_{(\alpha,\beta)}^{(j)}$表示由$p_j(z)=0$在(α,β)内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为$V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)}$；用$U_{(\alpha,\beta)}^{(j)}$表示由$p_j(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为$U_\alpha^{(j)}-U_\beta^{(j)}$。

当$s=1$时，$f(z)=bp_1^{k_1}(z)$，则$\sqrt{f(\ )}=\overset{k_1}{\cup}\sqrt{p_1(\ )}$，$f(z_0)=0$的充要条件是$p_1(z_0)=0$。

定理 1 设$f(z)=bp_1^{k_1}(z)$，若$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$(或$p_1(\alpha)\neq 0$，$p_1(\beta)\neq 0$)，则

1) $V_{(\alpha,\beta)}=V_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$，$V_\alpha-V_\beta=V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}$；

2) $U_{(\alpha,\beta)}=\overset{k_1}{\cup}U_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$，$U_\alpha-U_\beta=k_1\left(U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}\right)$。

证明 由题设，则$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$p_1(\alpha)\neq 0$，$p_1(\beta)\neq 0$，于是

1) $V_{(\alpha,\beta)}$的元素个数为$V_\alpha-V_\beta$；$V_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$的元素个数为$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}$。

$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}$，$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 都是不允许有重元的 Cantor 集合，其并运算和交运算遵循 Cantor 集合的运算律。由 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)$，有 $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}=\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$。由幂等律，则

$$\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}=\overbrace{\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\cup\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\cup\cdots\cup\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}}^{k_1}=\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$$

于是 $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}=\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$。故 $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}$ 的元素个数 $=\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 的元素个数，即 $V_\alpha-V_\beta=V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}$。

2) $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$ 的元素个数为 $U_\alpha-U_\beta$；$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 的元素个数为 $U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}$。

$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)},\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 都是允许有重元的有限集合，并运算和交运算遵循允许有重元有限集合的运算律，根据预 章定理 4，并运算幂等律不成立，于是当 $k_1\ge 2$ 时，

$$\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}=\overbrace{\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\cup\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\cup\cdots\cup\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}}^{k_1}\neq\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}。$$

由 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)$，有 $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}=\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$，则 $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$ 的元素个数 $=\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 的元素个数。根据预章并集的本质特征 2)，则 $\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 的元素个数 $=k_1\left(U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}\right)$，于是 $U_\alpha-U_\beta=k_1\left(U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}\right)$。】

定理 2 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)$，于是 1) $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$ 的充要条件是 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}$。

2) 若 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，$z=x_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l 重根和 $p_1(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l=k_1l_1$。

证明 1) 由于 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)$，若 α,β 均为有限实数，$\alpha<x_0<\beta$，根据定理 1，则 $f(\alpha)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$，$V_\alpha-V_\beta=1$ 的充要条件是：$p_1(\alpha)\neq 0$，$p_1(x_0)=0$，$p_1(\beta)\neq 0$，$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$。故命题成立。2) 若 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，由 1)则 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}$，根据§3 定理 6，则 $l=U_\alpha-U_\beta$，$l_1=U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}$。根据定理 1 有 $U_\alpha-U_\beta=k_1\left(U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}\right)$，故 $l=k_1l_1$。】

当 $s=2$ 时，$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，则 $\sqrt{f(\ )}=\left(\overset{k_1}{\cup}\sqrt{p_1(\ )}\right)\cup\left(\overset{k_2}{\cup}\sqrt{p_2(\ )}\right)$，$f(z_0)=0$ 的充要条件是 $p_1(z_0)=0$ 或 $p_2(z_0)=0$。

假设 $d(z)$ 是 $p_1(z),p_2(z)$ 的一个实系数最大公因式，则 $\sqrt{p_1(\ )}\cap\sqrt{p_2(\ )}=\sqrt{d(\ )}$。

设 $x \in R$，以 $d(z),d^{'}(z)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点 x 的变号数分别记为 V_x^d 和 U_x^d，其中 $d(z)$ 是非零常数时，规定 $U_x^d = V_x^d = 0$。若 $\alpha < \beta$，$d(\alpha) \neq 0$，$d(\beta) \neq 0$，则用 $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$ 表示由 $d(z)=0$ 在 (α,β) 内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为 $V_\alpha^d - V_\beta^d$；用 $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{d}$ 表示由 $d(z)=0$ 在 (α,β) 内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为 $U_\alpha^d - U_\beta^d$。

定理 3 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$d(z)$ 是 $p_1(z),p_2(z)$ 的一个最大公因式，若 $\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则 $p_1(\alpha) \neq 0$，$p_1(\beta) \neq 0$；$p_2(\alpha) \neq 0$，$p_2(\beta) \neq 0$；$d(\alpha) \neq 0$，$d(\beta) \neq 0$，于是

1) $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$，

$$V_\alpha - V_\beta = (V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}) + (V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}) - (V_\alpha^{d} - V_\beta^{d})；$$

2) $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)} = \left(\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\right) \cup \left(\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}\right)$，$U_\alpha - U_\beta = k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) + k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right)$。

证明 由题设，若 $\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则 $p_1(\alpha) \neq 0$，$p_1(\beta) \neq 0$；$p_2(\alpha) \neq 0$，$p_2(\beta) \neq 0$，故 α 和 β 都不是 $\begin{cases} p_1(z)=0 \\ p_2(z)=0 \end{cases}$ 的解，根据预章定理 2 则 $d(\alpha) \neq 0$，$d(\beta) \neq 0$，于是

1) $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}$ 的元素个数为 $V_\alpha - V_\beta$；$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 的元素个数为 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}$；$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$ 的元素个数为 $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}$；$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$ 的元素个数为 $V_\alpha^{d} - V_\beta^{d}$。$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)},\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)},\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)},\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$ 均为不允许有重元的 Cantor 集合，于是由 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，有

$$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)} = \left(\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\right) \cup \left(\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}\right) = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$$

再证 $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$。设 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，则 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 且 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，$\alpha < x_0 < \beta$，$\begin{cases} p_1(x_0)=0 \\ p_2(x_0)=0 \end{cases}$，从而 $d(x_0)=0$，故 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$，因此 $\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} \subset \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$。反过来设 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$，则 $\alpha < x_0 < \beta$，$d(x_0)=0$，$\begin{cases} p_1(x_0)=0 \\ p_2(x_0)=0 \end{cases}$，$x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$ 且 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，

故 $x_0 \in \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，因此$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d} \subset \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$。所以$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$。

由于$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$，于是$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}$的元素个数$=\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$的元素个数$+\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数$-\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数；$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cap \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数$=\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{d}$的元素个数$=V_\alpha^d - V_\beta^d$。所以

$$V_\alpha - V_\beta = (V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}) + (V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}) - (V_\alpha^d - V_\beta^d)\text{。}$$

2) $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$的元素个数为$U_\alpha - U_\beta$；$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$的元素个数为$U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}$；$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数为$U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}$。$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}, \boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}, \boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$均为允许有重元的有限集合，根据预章定理4，并运算幂等律不成立。由$f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，有$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)} = \left(\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\right) \cup \left(\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}\right)$，根据预章并集的本质特征 2)可知

$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$的元素个数$=\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$的元素个数$+\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数

其中$\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$的元素个数$=k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right)$，$\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数$=k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right)$，故

$$U_\alpha - U_\beta = k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) + k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right)\text{。】}$$

推论 设$f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，若$\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则有

1) $V_\alpha - V_\beta \le \left(V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}\right) + \left(V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}\right)$；2) $U_\alpha - U_\beta = k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) + k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right)$。

证明 不妨设$d(z)$是$p_1(z), p_2(z)$的最大公因式，根据定理 3 则$d(\alpha) \neq 0$，$d(\beta) \neq 0$且 1) $V_\alpha - V_\beta = \left(V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}\right) + \left(V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}\right) - \left(V_\alpha^d - V_\beta^d\right)$。由§1 定理 3 推论 1 则$V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$，故$V_\alpha - V_\beta \le \left(V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}\right) + \left(V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}\right)$。2) $U_\alpha - U_\beta = k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) + k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right)$。】

定理 4 设$f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$d(z)$是$p_1(z), p_2(z)$的一个最大公因式，若$\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则有

1) $V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$；

2) $V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \ge V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$；

3) $U_\alpha - U_\beta \ge k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) \ge k_1\left(U_\alpha^d - U_\beta^d\right) \ge 0$；

4) $U_\alpha - U_\beta \ge k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right) \ge k_2\left(U_\alpha^d - U_\beta^d\right) \ge 0$。

证明 根据定理3则有 $p_1(\alpha)\ne 0$，$p_1(\beta)\ne 0$；$p_2(\alpha)\ne 0$，$p_2(\beta)\ne 0$；$d(\alpha)\ne 0$，$d(\beta)\ne 0$

1) 不妨设$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = k$，由§1 定理 3 推论 1，则$V_\alpha - V_\beta \ge 0$，$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = k \ge 0$，于是当$k=0$时，$V_\alpha - V_\beta \ge 0 = V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}$；当$k \ge 1$时，$p_1(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内共有$k$个各不相同的根，由$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$可知，这$k$个根也是$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内的$k$个各不相同的根，由§1 定理 3 推论 2，则$V_\alpha - V_\beta \ge k = V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}$。总之$V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge 0$。

再证$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$。由题意不妨设$p_1(z)=d(z)h_1(z)$，于是当$\deg\ d(z)\ge 1$时，若$\deg\ h_1(z)\ge 1$则同理可证；若$\deg\ h_1(z)=0$，由定理 1 则$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = V_\alpha^d - V_\beta^d$，$V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$，结论成立。当$\deg\ d(z)=0$时，$V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$，结论也成立

所以，$V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$。

2) 与 1)同理可证。

3) 由定理 3，则有$U_\alpha - U_\beta = k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) + k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right)$。由§3 定理 6 推论 1，$U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)} \ge 0$，$U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)} \ge 0$，$k_1,k_2$均为正整数，于是$U_\alpha - U_\beta \ge k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) \ge 0$。

再证$U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)} \ge U_\alpha^d - U_\beta^d \ge 0$。由题意不妨设$p_1(z)=d(z)h_1(z)$，于是当$\deg\ d(z)\ge 1$时，若$\deg\ h_1(z)\ge 1$则同理可证；若$\deg\ h_1(z)=0$，由定理 1 则$U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)} = U_\alpha^d - U_\beta^d$，$U_\alpha^d - U_\beta^d \ge 0$，结论成立。当$\deg d(z)=0$时，$U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$，结论也成立。

$k_1 \ge 1$，所以$U_\alpha - U_\beta \ge k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) \ge: k_1\left(U_\alpha^d - U_\beta^d\right) \ge 0$。

4) 与 3)同理可证。】

推论 1 设$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，若$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\ne 0$，$f(\beta)\ne 0$，则有

1) $V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge 0$；　　2) $V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \ge 0$；

3) $U_\alpha - U_\beta \ge k_1\left(U_\alpha^{(1)} - U_\beta^{(1)}\right) \ge 0$；4) $U_\alpha - U_\beta \ge k_2\left(U_\alpha^{(2)} - U_\beta^{(2)}\right) \ge 0$。

证明 不妨设$d(z)$是$p_1(z),p_2(z)$的最大公因式，再由定理 4 即得。】

推论 2 设$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，则$\alpha < x_0 < \beta$，$p_1(\alpha)\ne 0$，$p_1(\beta)\ne 0$；$p_2(\alpha)\ne 0$，$p_2(\beta)\ne 0$；$1 \ge V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \ge 0$，$1 \ge V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \ge 0$，于是

1) $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$时， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}$；

2) $V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$时， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}$；

3) $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$时， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}$。

证明 由$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，则$\alpha,\beta$均为有限实数，且$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$， $V_\alpha-V_\beta=1$。由 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，则 $p_1(\alpha)\neq 0$， $p_1(\beta)\neq 0$； $p_2(\alpha)\neq 0$，$p_2(\beta)\neq 0$。由推论 1，则$1\geq V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq 0$， $1\geq V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}\geq 0$， 于是

1) $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$时，可设$x_1={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}$，则$\alpha<x_1<\beta$，$p_1(x_1)=0$，$f(x_1)=0$，故$x_0,x_1$都是$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内的根， $V_\alpha-V_\beta=1$， 必有$x_0=x_1$， 故$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}$。

2) 与 1)同理可证。3) 综合 1)和 2)即得。】

推论 3 设$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，则$\alpha<x_0<\beta$，$p_1(\alpha)\neq 0$，$p_1(\beta)\neq 0$；$p_2(\alpha)\neq 0$， $p_2(\beta)\neq 0$； $1\geq V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq 0$， $1\geq V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}\geq 0$， 于是

1) $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$的充要条件是$p_1(x_0)=0$； 2) $V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$的充要条件是$p_2(x_0)=0$。

证明 根据推论 2，则$\alpha<x_0<\beta$， $p_1(\alpha)\neq 0$， $p_1(\beta)\neq 0$； $p_2(\alpha)\neq 0$， $p_2(\beta)\neq 0$；$1\geq V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq 0$， $1\geq V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}\geq 0$， 而且 1)和 2)必要性均成立；再证充分性。

1) 若 $p_1(x_0)=0$，由§1 定理 3 推论 2，则$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq 1$， 于是$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$。

2) 与 1)同理可证。】

例 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$， 由推论 3 则

1) $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=0$的充要条件是$p_1(x_0)\neq 0$；2) $V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=0$的充要条件是$p_2(x_0)\neq 0$。

推论 4 设 $f(z)=z^k(a_0z^{n-k}+a_1z^{n-k-1}+\cdots+a_{n-k-1}z+a_{n-k})$，其中$n,k,n-k$均为正整数， $a_0\neq 0$， $a_{n-k}\neq 0$，若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，则

当$\alpha<0<\beta$时， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots a_{n-k-1},a_{n-k},\underbrace{0,\cdots,0}_{k})}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(1,0)}=0$；

当$\beta<0$或$\alpha>0$时， ${}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots a_{n-k-1},a_{n-k},\underbrace{0,\cdots,0}_{k})}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots a_{n-k-1},a_{n-k})}$。

证明 令 $p_1(z)=z$， $p_2(z)=a_0z^{n-k}+a_1z^{n-k-1}+\cdots+a_{n-k-1}z+a_{n-k}$， 则 $f(z)=p_1^k(z)p_2(z)$

由于 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，于是当 $\alpha < 0 < \beta$ 时，$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$，$V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 0$，由推论 2，则

$$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(1,0)} = 0;$$

当 $\beta < 0$ 或 $\alpha > 0$ 时，$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$，$V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$，由推论 2，则 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ $= {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}$。】

定理 5 设 $f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$d(z)$ 是 $p_1(z), p_2(z)$ 的一个最大公因式，若 $\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则 1. $V_\alpha - V_\beta = 0$ 的充要条件是 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$；2. $V_\alpha - V_\beta = 1$ 时，$1 \geq V_\alpha^d - V_\beta^d \geq 0$，其中

1) $V_\alpha^d - V_\beta^d = 1$ 的充要条件是：$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$，$V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$；

2) $V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$ 的充要条件是：$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}$ 和 $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}$ 一个为 1，另一个为 0。

证明 根据定理 3 和定理 4，则有 $V_\alpha - V_\beta = (V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)}) + (V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)}) - (V_\alpha^d - V_\beta^d)$，$V_\alpha - V_\beta \geq V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \geq V_\alpha^d - V_\beta^d \geq 0$；$V_\alpha - V_\beta \geq V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \geq V_\alpha^d - V_\beta^d \geq 0$。于是 1. 2. 均成立。】

推论 1 设 $f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，则 $V_\alpha - V_\beta = 0$ 的充要条件是：$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 0$。

证明 不妨设 $d(z)$ 是 $p_1(z), p_2(z)$ 的最大公因式，必要性由定理 5 即得，再证充分性。若 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 0$，由定理 4 则 $V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$，再由定理 5 即得。】

推论 2 设 $f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，若 $\alpha < \beta$，$f(\alpha) \neq 0$，$f(\beta) \neq 0$，$V_\alpha - V_\beta = 1$，则 $1 \geq V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \geq 0$，$1 \geq V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \geq 0$，而且 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$ 或 $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$。

证明 由定理 4 推论 1，则 $1 \geq V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \geq 0$，$1 \geq V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \geq 0$。假如 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$ 且 $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 0$，由推论 1，则 $V_\alpha - V_\beta = 0$，矛盾。故 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$ 或 $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$。】

推论 3 设 $f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，$z = x_0$ 分别是 $f(z) = 0$ 的 l 重根，$p_1(z) = 0$ 的 l_1 重根，$p_2(z) = 0$ 的 l_2 重根，则 $1 \geq V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} \geq 0$，$1 \geq V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} \geq 0$，而且 $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 1$ 或 $V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$，于是

1) $V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 1$ 时，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}$ 且 $l = k_1 l_1 + k_2 l_2$；

2) 当$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=0$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}$，且$l_2=0$，$l=k_1l_1$；

3) 当$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=0$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )}$，且$l_1=0$，$l=k_2l_2$。

证明 由$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，则$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$f(\beta)\neq 0$，$V_\alpha-V_\beta=1$。根据推论 2，则$1\geq V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\geq 0$，$1\geq V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}\geq 0$，而且$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$或$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$。由定理 3 推论，$U_\alpha-U_\beta=k_1\left(U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}\right)+k_2\left(U_\alpha^{(2)}-U_\beta^{(2)}\right)$，由定理 4 推论 2 和 3 及§3 定理 6 则

1) $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )}$，$l=U_\alpha-U_\beta$，$l_1=U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}$，$l_2=U_\alpha^{(2)}-U_\beta^{(2)}$，故$l=k_1l_1+k_2l_2$。

2) 当$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=0$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}$，$p_2(x_0)\neq 0$，$l=U_\alpha-U_\beta$，$l_1=U_\alpha^{(1)}-U_\beta^{(1)}$，$U_\alpha^{(2)}-U_\beta^{(2)}=0$，故$z=x_0$是$p_2(z)=0$的 0 重根，$l_2=0$，$l=k_1l_1$。

3) 与 2)同理可证。】

定理6 设$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$d(z)$是$p_1(z),p_2(z)$的一个最大公因式，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，$z=x_0$分别是$f(z)=0$的$l$重根，$p_1(z)=0$的$l_1$重根，$p_2(z)=0$的$l_2$重根，$d(z)=0$的$l_d$重根，则$l_d=\min(l_1,l_2)$，于是

1. 当$V_\alpha^d-V_\beta^d=0$时，$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}$和$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}$一个为 1，另一个为 0，其中

   1) 当$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=0$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}$，且$l_2=0$，$l=k_1l_1$；

   2) 当$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=0$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )}$，且$l_1=0$，$l=k_2l_2$。

2. 当$V_\alpha^d-V_\beta^d=1$时，$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$，有

$$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}，且 l=k_1l_1+k_2l_2。$$

证明 根据预章定理 2 推论 5，则$l_d=\min(l_1,l_2)$。由于$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，则$\alpha,\beta$均为有限实数，且$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$V_\alpha-V_\beta=1$。由定理 3，则$d(\alpha)\neq 0$，$d(\beta)\neq 0$，由定理 5 及其推论 3 则 1. 当$V_\alpha^d-V_\beta^d=0$时，结论成立；2. 当$V_\alpha^d-V_\beta^d=1$时，$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1$，$V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1$，有$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )}$，

且 $l=k_1l_1+k_2l_2$ 于是 $\begin{cases}p_1(x_0)=0\\p_2(x_0)=0\end{cases}$，因此 $d(x_0)=0$，故 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，结论成立。】

将定理3，定理4和定理5中的条件“若 $\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$”换成“若 $\alpha<\beta$，$p_1(\alpha)\neq 0$，$p_1(\beta)\neq 0$；$p_2(\alpha)\neq 0$，$p_2(\beta)\neq 0$”，则命题依然成立，原因是由 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$ 可以推出 $f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$。

定理 7 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$d(z)$ 是 $p_1(z),p_2(z)$ 的一个最大公因式，若 $\alpha<\beta$，$p_1(\alpha)\neq 0$，$p_1(\beta)\neq 0$；$p_2(\alpha)\neq 0$，$p_2(\beta)\neq 0$，则

1. 当 $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=V_\alpha^d-V_\beta^d=1$ 时，$V_\alpha-V_\beta=1$，若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，则

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}。$$

2. 当 $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}$ 和 $V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}$ 一个为 1，另一个为 0 时，$V_\alpha^d-V_\beta^d=0$，$V_\alpha-V_\beta=1$，其中

1) 若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$；

2) 若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

证明 由题设则 $f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$； $d(\alpha)\neq 0$，$d(\beta)\neq 0$。根据定理 3，则有 $V_\alpha-V_\beta=(V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)})+(V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)})-(V_\alpha^d-V_\beta^d)$，于是

1. 当 $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=V_\alpha^d-V_\beta^d=1$ 时，$V_\alpha-V_\beta=1$。若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，则 α,β 均为有限实数，且 $\alpha<x_0<\beta$，$d(x_0)=0$，故 $p_1(x_0)=0$ 且 $p_2(x_0)=0$，$f(x_0)=0$，于是

$$\alpha<x_0<\beta,\quad p_1(\alpha)\neq 0,\quad p_1(\beta)\neq 0,\quad p_1(x_0)=0,\quad V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1;$$

$$\alpha<x_0<\beta,\quad p_2(\alpha)\neq 0,\quad p_2(\beta)\neq 0,\quad p_2(x_0)=0,\quad V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1;$$

$$\alpha<x_0<\beta,\quad f(\alpha)\neq 0,\quad f(\beta)\neq 0,\quad f(x_0)=0,\quad V_\alpha-V_\beta=1。$$

故 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，于是

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_2(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}。$$

2. 当 $V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}$ 和 $V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}$ 一个为 1，另一个为 0 时，由定理 4，则 $V_\alpha^d-V_\beta^d=0$，于是 $V_\alpha-V_\beta=1$，其中 1) 若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_1(\ )}$，则 α,β 均为有限实数，且 $\alpha<x_0<\beta$，

$p_1(x_0)=0$， $f(x_0)=0$，故 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$，于是 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_1(\ )}=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。2) 与 1)同理可证。】

例 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$d(z)$是 $p_1(z),p_2(z)$的一个最大公因式，若 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{d(\ )}$，则 $\alpha<x_0<\beta$， $d(x_0)=0$， $p_1(x_0)=0$ 且 $p_2(x_0)=0$， $f(x_0)=0$。

用中点变号数分割法对 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{d(\ )}$ 继续计算可得 $x_0=\sqrt[[\alpha_N,\beta_N]]{d(\ )}$，其中

$$x_0\in(\alpha_N,\beta_N)\subset(\alpha_{N-1},\beta_{N-1})\subset\cdots\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta),\quad \beta_N-\alpha_N=\frac{1}{2^N}(\beta-\alpha)。$$

于是由多项式函数连续性，在实轴上存在充分小的区间 (α_N,β_N)，使得 $d(x)=0$，$p_1(x)=0$，$p_2(x)=0$ 在该小区间内仅有根 x_0，满足 $p_1(\alpha_N)\neq0$，$p_1(\beta_N)\neq0$；$p_2(\alpha_N)\neq0$，$p_2(\beta_N)\neq0$，且 $V_{\alpha_N}^{(1)}-V_{\beta_N}^{(1)}=V_{\alpha_N}^{(2)}-V_{\beta_N}^{(2)}=V_{\alpha_N}^{d}-V_{\beta_N}^{d}=1$。根据定理 7 就有 $V_{\alpha_N}-V_{\beta_N}=1$，而且

$$x_0=\sqrt[[\alpha_N,\beta_N]]{d(\ )}=\sqrt[[\alpha_N,\beta_N]]{p_1(\ )}=\sqrt[[\alpha_N,\beta_N]]{p_2(\ )}=\sqrt[[\alpha_N,\beta_N]]{f(\ )}。$$

推论 1 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$， $d(z)$ 是 $p_1(z),p_2(z)$ 的一个最大公因式，若 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_1(\ )}=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_2(\ )}$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{d(\ )}$， $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。

证明 由于 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_1(\ )}=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_2(\ )}$，则$\alpha,\beta$ 均为有限实数，且

$$\alpha<x_0<\beta,\quad p_1(\alpha)\neq0,\quad p_1(x_0)=0,\quad p_1(\beta)\neq0,\quad V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=1;$$

$$\alpha<x_0<\beta,\quad p_2(\alpha)\neq0,\quad p_2(x_0)=0,\quad p_2(\beta)\neq0,\quad V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=1。$$

又 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，故 $\alpha<x_0<\beta$， $f(\alpha)\neq0$， $f(\beta)\neq0$， $f(x_0)=0$。 $d(z)$ 是 $p_1(z),p_2(z)$的最大公因式，则 $\alpha<x_0<\beta$， $d(\alpha)\neq0$， $d(x_0)=0$， $d(\beta)\neq0$。由§1 定理 3 推论 2，则 $V_\alpha^d-V_\beta^d\geq1$。由定理 4，则有 $1\geq V_\alpha^d-V_\beta^d\geq0$。因此 $V_\alpha^d-V_\beta^d=1$，于是

$$V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}=V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}=V_\alpha^d-V_\beta^d=1$$

由定理 7，则 $V_\alpha-V_\beta=1$，故 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{d(\ )}$， $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。】

推论 2 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，若 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_1(\ )}=\sqrt[[\alpha,\beta]]{p_2(\ )}$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。

证明 不妨设 $d(z)$是 $p_1(z),p_2(z)$的最大公因式，再由推论 1 即得。】

推论 3 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)$，$\alpha<\beta$，$p_1(\alpha)\neq0$，$p_1(\beta)\neq0$；$p_2(\alpha)\neq0$，$p_2(\beta)\neq0$，

于是

1) 若 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )}$，$V_\alpha^{(2)} - V_\beta^{(2)} = 0$，则 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_1(\ )} = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$；

2) 若 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )}$，$V_\alpha^{(1)} - V_\beta^{(1)} = 0$，则 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_2(\ )} = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。

证明 不妨设 $d(z)$ 是 $p_1(z), p_2(z)$ 的最大公因式，再由定理 7 即得。】

当 $s \ge 3$ 时，$f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$，则

$$\sqrt{f(\ )} = \left(\overset{k_1}{\cup}\sqrt{p_1(\ )}\right)\cup\left(\overset{k_2}{\cup}\sqrt{p_2(\ )}\right)\cup\cdots\cup\left(\overset{k_s}{\cup}\sqrt{p_s(\ )}\right)。$$

$f(z_0) = 0$ 的充要条件是：存在 $\le s$ 的正整数 j_0，使得 $p_{j_0}(z_0) = 0$。换句话说，$f(z_0) \ne 0$ 的充要条件是 $p_j(z_0) \ne 0$，$j = 1,2,\cdots,s$。

定理 8 设 $f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$，若 $\alpha < \beta$，$f(\alpha) \ne 0$，$f(\beta) \ne 0$，则

$$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)} = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} \cup\cdots\cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(s)},\ \boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)} = \left(\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\right)\cup\left(\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}\right)\cup\cdots\cup\left(\overset{k_s}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}\right),$$

于是 1) $U_\alpha - U_\beta = \sum_{j=1}^{s} k_j\left(U_\alpha^{(j)} - U_\beta^{(j)}\right)$；2) $V_\alpha - V_\beta \le \sum_{j=1}^{s}\left(V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)}\right)$；

3) $V_\alpha - V_\beta \ge V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)} \ge 0$，$j = 1,2,\cdots,s$；

4) $U_\alpha - U_\beta \ge k_j(U_\alpha^{(j)} - U_\beta^{(j)}) \ge 0$，$j = 1,2,\cdots,s$；

5) $V_\alpha - V_\beta = 0$ 的充要条件是 $V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)} = 0$，$j = 1,2,\cdots,s$；

6) 若 $V_\alpha - V_\beta = 1$，则 $1 \ge V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)} \ge 0$，$j = 1,2,\cdots,s$，且存在 $\le s$ 的正整数 j_0，使得 $V_\alpha^{(j_0)} - V_\beta^{(j_0)} = 1$。

证明 由题设，则 $p_j(\alpha) \ne 0$，$p_j(\beta) \ne 0$，$j = 1,2,\cdots,s$，于是

$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}$ 的元素个数为 $V_\alpha - V_\beta$，$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(j)}$ 的元素个数为 $V_\alpha^{(j)} - V_\beta^{(j)}$，$j = 1,2,\cdots,s$。$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}$，$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}, \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}$ 均为不允许有重元的 Cantor 集合。由 $f(z) = bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$，则有

$$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)} = \left(\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\right)\cup\left(\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}\right)\cup\cdots\cup\left(\overset{k_s}{\cup}\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}\right) = \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(1)} \cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(2)} \cup\cdots\cup \boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}$$

$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$ 元素个数为 $U_\alpha - U_\beta$，$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(j)}$ 的元素个数为 $U_\alpha^{(j)} - U_\beta^{(j)}$，$j = 1,2,\cdots,s$。$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$，

$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$，$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$，…，，$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}$均为允许有重元的有限集合，根据预章定理 4 并运算幂等律不成立。由 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$则有

$$\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}=\left(\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}\right)\cup\left(\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}\right)\cup\cdots\cup\left(\overset{k_s}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}\right)。$$

于是 1) $\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}$的元素个数$=\overset{k_1}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(1)}$的元素个数$+\overset{k_2}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(2)}$的元素个数$+\cdots+\overset{k_s}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(s)}$的元素个数，其中$\overset{k_j}{\cup}\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}^{(j)}$的元素个数$=k_j\left(U_\alpha^{(j)}-U_\beta^{(j)}\right)$，故$U_\alpha-U_\beta=\sum_{j=1}^{s}k_j\left(U_\alpha^{(j)}-U_\beta^{(j)}\right)$。

2) 当$s=2$时，由定理 3 推论，则$V_\alpha-V_\beta\le\left(V_\alpha^{(1)}-V_\beta^{(1)}\right)+\left(V_\alpha^{(2)}-V_\beta^{(2)}\right)$，命题成立。假设当$s=h$时命题成立，那么当$s=h+1$时，$f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_h^{k_h}(z)p_{h+1}^{k_{h+1}}(z)$。

令 $f_*(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_h^{k_h}(z)$，则 $f(z)=f_*(z)p_{h+1}^{k_{h+1}}(z)$。$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\ne0$，$f(\beta)\ne0$，于是 $f_*(\alpha)\ne0$，$f_*(\beta)\ne0$。以 $f_*(z),f_*^{'}(z)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点x（$x\in R$）的变号数分别记为V_x^*和U_x^*。由归纳法假设，则有$V_\alpha^*-V_\beta^*\le\sum_{j=1}^{h}\left(V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)}\right)$。

由定理 3 推论，则有$V_\alpha-V_\beta\le\left(V_\alpha^*-V_\beta^*\right)+\left(V_\alpha^{(h+1)}-V_\beta^{(h+1)}\right)$，于是

$$V_\alpha-V_\beta\le\left(V_\alpha^*-V_\beta^*\right)+\left(V_\alpha^{(h+1)}-V_\beta^{(h+1)}\right)\le\sum_{j=1}^{h}\left(V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)}\right)+\left(V_\alpha^{(h+1)}-V_\beta^{(h+1)}\right)=\sum_{j=1}^{h+1}\left(V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)}\right)。$$

于是当$s=h+1$时，命题也成立。

3) 根据定理 4 推论 1 的 1)和 2)式，对s作数学归纳法即得；

4) 根据定理 4 推论 1 的 3)和 4)式，对s作数学归纳法即得；

5) 根据定理 5 推论 1，对s作数学归纳法即得；

6) 若$V_\alpha-V_\beta=1$，由 3)则$1\ge V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)}\ge0$，假如$V_\alpha^{(j)}-V_\beta^{(j)}=0$，$j=1,2,\cdots,s$，由 5)则$V_\alpha-V_\beta=0$，矛盾。故存在$\le s$的正整数$j_0$，使得$V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}=1$。】

定理 9 设 $f(z)=bp_1^{k_1}(z)p_2^{k_2}(z)\cdots p_s^{k_s}(z)$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，且$j_0$为$\le s$的正整数，则$\alpha<x_0<\beta$，$p_{j_0}(\alpha)\ne0$，$p_{j_0}(\beta)\ne0$，$1\ge V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}\ge0$，其中$V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}=1$时，有

$$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{p_{j_0}(\ )}$$

于是 1) $V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}=1$的充要条件是$p_{j_0}(x_0)=0$；2) $V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}=0$的充要条件是$p_{j_0}(x_0)\neq 0$。

证明 由题设则α,β均为有限实数，且$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，$f(x_0)=0$，$V_\alpha-V_\beta=1$，根据定理 8 则$p_{j_0}(\alpha)\neq 0$，$p_{j_0}(\beta)\neq 0$，$1\geq V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}\geq 0$，其中$V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}=1$时，可设$x_1={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_{j_0}(\ )}$，则$\alpha<x_1<\beta$，$p_{j_0}(x_1)=0$，$f(x_1)=0$。于是$x_0,x_1$都是$f(z)=0$在$(\alpha,\beta)$内的根，$V_\alpha-V_\beta=1$，必有$x_0=x_1$，故$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{p_{j_0}(\ )}$。于是 1) 必要性成立，再证充分性。若$p_{j_0}(x_0)=0$，由§1 定理 3 推论 2，则$V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}\geq 1$，所以$V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}=1$。2) 由$1\geq V_\alpha^{(j_0)}-V_\beta^{(j_0)}\geq 0$和 1)即得。】

第二章
方程复根的求解路径之一

实系数代数方程统一解法原理的形成，不仅要有实根的统一解法，还必须有共轭复根的统一解法，于是这一章阐述复根的求解路径之一。

§1 原方程与实系数二元多项式方程组的关系

设多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，其中 $n\ge 1$，$a_0\ne 0$，$a_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$。若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的所有根，由总根号定义，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\text{。}$$

在用实根号这一工具解决了任意次实系数代数方程求实根问题的基础上，为了能够通过设立分根号和同实部根全集根号来解决 $f(z)=0$ 求复根的问题，必须先解决在设立过程中遇到的各种问题，建立相应的统一解法理论，并从探寻复根的求解路径开始。

$f(z)$在 z 平面上任意点 x 的泰勒展开式为

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\cdots+\frac{f'(x)}{1!}(z-x)+f(x)$$

其中 $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}=a_0\ne 0$。令 $z-x=y$，则有

$$f(x+y)=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+\frac{f'(x)}{1!}y+f(x)$$

记
$$F_0(x,y)=\frac{f^{n}(x)}{n!}y^n+\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$$

$$F_1(x,y)=\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

于是 $f(x+y)=F_0(x,y)+F_1(x,y)$，令 $\begin{cases}F_0(x,iy)=i^n f_0(x,y)\\F_1(x,iy)=i^{n-1}f_1(x,y)\end{cases}$，其中 i 为虚数单位，则

$$\begin{cases}f_0(x,y)=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n-\dfrac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots\\[2ex] f_1(x,y)=\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots\end{cases}$$

其中 $f_0(x,y), f_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式， $\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}=a_0\neq 0$ 。令 $z=x+iy$ ，则

$$f(z)=f(x+iy)=F_0(x,iy)+F_1(x,iy)=i^n f_0(x,y)+i^{n-1}f_1(x,y)=i^n\left[f_0(x,y)-if_1(x,y)\right]$$

于是由

$$f(z)=f(x+iy)=i^n\left[f_0(x,y)-if_1(x,y)\right] \tag{1}$$

可得实系数二元多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $f_0(x,y), f_1(x,y)$ 为 y 的奇偶函数。我们称(1)是方程 $f(z)=0$ 与方程组(2)的多项式关系式。

§2 原方程根的性质

设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 $z_0 = x_0 + iy_0$，则 $\overline{z_0} = \overline{x_0 + iy_0} = \overline{x_0} + \overline{(i)}\overline{y_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$，其中 $\overline{z_0}$，$\overline{x_0}$，$\overline{y_0}$ 分别是 z_0，x_0，y_0 的共轭复数。

$f(z)=0$ 根的**性质** 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 $z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根，则 $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 也是 $f(z)=0$ 的根[1]。

证明 由于 $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$，其中 $a_0 \neq 0$ 且 $a_j \in R$，$j = 0,1,2,\cdots,n$。若 $z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根，则 $f(x_0 + iy_0) = f(z_0) = a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z_0 + a_n = 0$。显然 $a_j = \overline{a_j}$，于是 $f\left(\overline{x_0} - i\overline{y_0}\right) = f\left(\overline{z_0}\right) = a_0\left(\overline{z_0}\right)^n + a_1\left(\overline{z_0}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(\overline{z_0}\right) + a_n$

$$= \overline{a_0}\,\overline{z_0^n} + \overline{a_1}\,\overline{z_0^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0} + \overline{a_n} = \overline{a_0 z_0^n + a_1 z_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z_0 + a_n} = \overline{f(z_0)} = \overline{0} = 0 \text{。}$$

故 $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 也是 $f(z)=0$ 的根。】

$f(z)$ 为实系数多项式，性质证明可简写为：若 $f(z_0)=0$，则 $f\left(\overline{z_0}\right) = \overline{f(z_0)} = \overline{0} = 0$。

推论 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的根。

证明 $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 的共轭复数为 $z_0 = x_0 + iy_0$，充分性也由性质即得。】

例 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 互为共轭复数，故 $z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$z_2 = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的根。

推论 2 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_0 = x_0 + iy_0$，则 $(z - z_0) \mid f(z)$ 的充要条件是：$\left(z - \overline{z_0}\right) \mid f(z)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

例 2 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_0 = x_0 + iy_0$，则

$$(y - y_0) \mid f(x_0 + iy) \text{ 的充要条件是：} \left(y + \overline{y_0}\right) \mid f\left(\overline{x_0} + iy\right) \text{。}$$

证明 证必要性。若 $(y - y_0) \mid f(x_0 + iy)$，$z_0 = x_0 + iy_0$，令 $z = x_0 + iy$，则 $(z - z_0) = i(y - y_0)$，由 $f(z) = f(x_0 + iy)$ 整除性质，则 $(z - z_0) \mid f(z)$，由推论 2，则 $\left(z - \overline{z_0}\right) \mid f(z)$，其中 $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$，令 $z = \overline{x_0} + iy$，则 $\left(z - \overline{z_0}\right) = i\left(y + \overline{y_0}\right)$，由 $f(z) = f\left(\overline{x_0} + iy\right)$ 整除性质，则 $\left(y + \overline{y_0}\right) \mid f\left(\overline{x_0} + iy\right)$。充分性同理可证。】

推论 3 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_0 = x_0 + iy_0$，l 为非负整数，则

$$(z - z_0)^l \mid f(z) \text{ 的充要条件是：} \left(z - \overline{z_0}\right)^l \mid f(z) \text{。}$$

证明 1) 若 $z_0 \in R$，则 $z_0 = \overline{z_0}$，命题显然成立。

2) 若 $z_0 \notin R$，则 $l=0$ 时，命题显然成立；$l=1$ 时，由推论 2，命题也成立；假设当 $l=k$ 时，命题成立，即 $(z-z_0)^k \mid f(z)$ 的充要条件是 $\left(z-\overline{z_0}\right)^k \mid f(z)$。那么当 $l=k+1$ 时，证必要性。若 $(z-z_0)^{k+1} \mid f(z)$，则 $(z-z_0)^k \mid f(z)$，由归纳法假设 $\left(z-\overline{z_0}\right)^k \mid f(z)$。由 $z_0 \notin R$，$\overline{z_0} \neq z_0$，$\left((z-z_0)^k, \left(z-\overline{z_0}\right)^k\right)=1$，则 $(z-z_0)^k\left(z-\overline{z_0}\right)^k \mid f(z)$，于是可设

$$f(z)=(z-z_0)^k\left(z-\overline{z_0}\right)^k f_1(z)\text{，即 } f(z)=\left[(z-z_0)\left(z-\overline{z_0}\right)\right]^k f_1(z)$$

$f(z)$ 是实系数多项式，$(z-z_0)\left(z-\overline{z_0}\right)=z^2-\left(z_0+\overline{z_0}\right)z+z_0\overline{z_0}$ 是一个实系数二次不可约多项式，因此 $f_1(z)$ 也是实系数多项式，于是 $f(z)=0$ 根的性质及其推论 1 和 2 对于 $f_1(z)=0$ 也是适用的。由 $(z-z_0)^{k+1} \mid f(z)$ 和 $f(z)=(z-z_0)^k\left(z-\overline{z_0}\right)^k f_1(z)$ 可知 $(z-z_0) \mid f_1(z)$，由推论 2，则 $\left(z-\overline{z_0}\right) \mid f_1(z)$，于是 $\left(z-\overline{z_0}\right)^{k+1} \mid f(z)$。故必要性成立。充分性同理可证。于是当 $l=k+1$ 时，命题也成立。】

推论 4 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，则 $z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根。

证明 根据推论 3，则 $(z-z_0)^l \mid f(z)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $f(z)$ 的充要条件是：$\left(z-\overline{z_0}\right)^l \mid f(z)$，但 $\left(z-\overline{z_0}\right)^{l+1}$ 不能整除 $f(z)$。于是命题成立。】

设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_0 \notin R$，l 为非负整数，若 $z_0 = x_0 + iy_0$ 和 $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根，则称 $z_0 = x_0 + iy_0$，$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面上)的一对共轭(复)根；若 $z_0 = x_0 + iy_0$ 和 $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则称 $z_0 = x_0 + iy_0$，$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面上)的一对 l 重共轭(复)根。

显然，$z_0 = x_0 + iy_0$，$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对 0 重共轭复根的充要条件是：$z_0 = x_0 + iy_0$，$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 都不是 $f(z)=0$ 的根。

例 3 设 $x_0 \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上的一对共轭根；若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上的一对 l 重共轭根。

推论 5 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$， $z_0 \notin R$， l 为非负整数，则 $z_0 = x_0 + iy_0$， $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是：$(z-z_0)^l(z-\overline{z_0})^l \mid f(z)$，但 $(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1}$ 不能整除 $f(z)$。

证明 若 $z_0 = x_0 + iy_0$，$\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对 l 重共轭复根，则 $(z-z_0)^l \mid f(z)$ 且 $(z-\overline{z_0})^l \mid f(z)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 和 $(z-\overline{z_0})^{l+1}$ 都不能整除 $f(z)$。由于 $z_0 \notin R$， $\overline{z_0} \neq z_0$，则 $\left((z-z_0)^l, (z-\overline{z_0})^l\right)=1$，于是 $(z-z_0)^l(z-\overline{z_0})^l \mid f(z)$。但 $(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1}$ 不能整除 $f(z)$。否则，假如 $(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1} \mid f(z)$，则 $(z-z_0)^{l+1} \mid f(z)$， $(z-\overline{z_0})^{l+1} \mid f(z)$，矛盾。

反过来，若 $(z-z_0)^l(z-\overline{z_0})^l \mid f(z)$，但 $(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1}$ 不能整除 $f(z)$，则 $(z-z_0)^l \mid f(z)$ 且 $(z-\overline{z_0})^l \mid f(z)$。但 $(z-z_0)^{l+1}$ 和 $(z-\overline{z_0})^{l+1}$ 都不能整除 $f(z)$。否则，假如 $(z-z_0)^{l+1} \mid f(z)$ 或 $(z-\overline{z_0})^{l+1} \mid f(z)$，由推论 3，则 $(z-z_0)^{l+1} \mid f(z)$ 且 $(z-\overline{z_0})^{l+1} \mid f(z)$。由于 $z_0 \notin R$， $\overline{z_0} \neq z_0$， $\left((z-z_0)^{l+1}, (z-\overline{z_0})^{l+1}\right)=1$，则 $(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1} \mid f(z)$，矛盾。因此， $z_0 = x_0 + iy_0$， $\overline{z_0} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对 l 重共轭复根。】

推论 6 设 $x_0 \in C$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根的充要条件是：$\overline{x_0}$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。

证明 在推论 4 中令 $y_0 = 0$ 和 $l \geq 2$ 即得。】

§3 方程组解的性质与最大公因式方程(一)根的性质

设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 $f_0(x,y)$, $f_1(x,y)$ 在 $x = x_0$，$y = y_0$ 时函数值满足 $f_0(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_1(x_0, y_0) = 0$，则称 (x_0, y_0) 是方程组(2)的一个(复数)解。

方程组(2)解的**性质**

性质 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解，则 $(x_0, -y_0)$ 也是方程组(2)的解。

证明 若 (x_0, y_0) 是(2)的解，则 $f_0(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_1(x_0, y_0) = 0$。由 $f_0(x,y)$, $f_1(x,y)$ 关于 y 的奇偶性，不妨设 $f_0(x,y)$ 是 y 的偶函数，$f_1(x,y)$ 是 y 的奇函数，则

$$f_0(x_0, -y_0) = f_0(x_0, y_0) = 0 \text{ 且 } f_1(x_0, -y_0) = -f_1(x_0, y_0) = 0。$$

故 $(x_0, -y_0)$ 也是(2)的解。】

推论 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 (x_0, y_0) 是(2)的解的充要条件是：$(x_0, -y_0)$ 是(2)的解。

证明 $(x_0, -(-y_0)) = (x_0, y_0)$，充分性也由性质 1 即得。】

性质 2 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解，则 $\left(\overline{x_0}, \overline{y_0}\right)$ 也是方程组(2)的解。

证明 若 (x_0, y_0) 是(2)的解，则 $f_0(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_1(x_0, y_0) = 0$。由于 $f_0(x,y)$, $f_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式，于是 $f_0\left(\overline{x_0}, \overline{y_0}\right) = \overline{f_0(x_0, y_0)} = \overline{0} = 0$ 且 $f_1\left(\overline{x_0}, \overline{y_0}\right) = \overline{f_1(x_0, y_0)} = \overline{0} = 0$。故 $\left(\overline{x_0}, \overline{y_0}\right)$ 也是(2)的解。】

若 (x_0, y_0) 是(2)的解，由性质 1 和 2，则 $(x_0, -y_0)$，$\left(\overline{x_0}, \overline{y_0}\right)$，$\left(\overline{x_0}, -\overline{y_0}\right)$ 都是(2)的解。

例 4 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，若 (a, y_0) 是(2)的解，则 $(a, -y_0)$，$\left(a, \overline{y_0}\right)$，$\left(a, -\overline{y_0}\right)$ 都是(2)的解。

推论 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 (x_0, y_0) 是(2)的解的充要条件是：$(\overline{x_0}, \overline{y_0})$ 是(2)的解。

证明 $\left(\overline{\left(\overline{x_0}\right)}, \overline{\left(\overline{y_0}\right)}\right) = (x_0, y_0)$，充分性也由性质 2 即得。】

设 $x_0 \in C$，将方程组(2)转化成恒定元为 $x = x_0$ 的一元方程组

$$\begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} \tag*{$(2)^{x_0}$}$$

则 $(2)^{x_0}$ 是 y 的复系数多项式方程组(其中 $x_0 \in R$ 时，$(2)^{x_0}$ 是 y 的实系数多项式方程组)。

$\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=a_0\neq 0$，故 $f_0(x_0,y)$ 是 y 的次数为 n 的多项式，但 $f_1(x_0,y)$ 却有可能是 y 的零多项式，即当它关于 y 的系数全为零时。

设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 时函数值满足 $f_0(x_0,y_0)=0$ 且 $f_1(x_0,y_0)=0$，则称 y_0 是方程组 $(2)^{x_0}$ 的一个(复数)解。若 $f_1(x_0,y)$ 是 y 的零多项式，则对 $\forall\ y_0\in C$，$f_1(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 时函数值 $f_1(x_0,y_0)=0$，于是方程 $f_0(x_0,y)=0$ 的根就是方程组 $(2)^{x_0}$ 的解。根据余数定理推论，则 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是：

$$(y-y_0)\mid f_0(x_0,y)\text{ 且 }(y-y_0)\mid f_1(x_0,y)$$

再设 l 为非负整数，若 $(y-y_0)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^l\mid f_1(x_0,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$，则称 y_0 是方程组 $(2)^{x_0}$ 的 l 重(复数)解。若 $f_1(x_0,y)$ 是 y 的零多项式，则方程 $f_0(x_0,y)=0$ 的 l 重根就是方程组 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解。统计解的个数，重解按重数计算。

由 $(2)^{x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合可写成 $\left\{y \mid \begin{cases} f_0(x_0,y)=0\\ f_1(x_0,y)=0\end{cases}(y\in C)\ \ (2)^{x_0}\right\}$

定理 1 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 (x_0,y_0) 是方程组(2)的解的充要条件是：y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

证明 若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则有 $\begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0\\ f_1(x_0,y_0)=0\end{cases}$。于是将该 y_0 代入方程组 $(2)^{x_0}$ 后，也有 $\begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0\\ f_1(x_0,y_0)=0\end{cases}$，故 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

反过来，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $\begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0\\ f_1(x_0,y_0)=0\end{cases}$，故 (x_0,y_0) 是(2)的解。】

推论 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 (x_0,y_0) 是(2)的解的充要条件是：

$$(y-y_0)\mid f_0(x_0,y)\text{ 且 }(y-y_0)\mid f_1(x_0,y)。$$

证明 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)\mid f_1(x_0,y)$ 再由定理 1 即得。】

设 $d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 关于 y 的一个最大公因式，则 $d(x_0,y)$ 为 y 的偶或奇函数。$f_0(x_0,y)$，$f_1(x_0,y)$，$d(x_0,y)$ 可视为关于 x_0，y 的实系数二元多项式，于是当 $x_0\in C$ 时，$d(x_0,y)$ 是 y 的复系数多项式；当 $x_0\in R$ 时，$d(x_0,y)$ 是 y 的实系数多项式。

两个 y 的系数不全为零的多项式 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式总是一个 y 的系数不全为零的多项式，即它是非零多项式，于是用 $(f_0(x_0,y),f_1(x_0,y))$ 来表示 y 的首项系数是 1 的那个最大公因式。若 $(f_0(x_0,y),f_1(x_0,y))=1$，则称 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 关于 y 互素。

设 $x_0\in C$， $y_0\in C$， 若 $d(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 时函数值 $d(x_0,y_0)=0$， 则称 y_0 是方程 $d(x_0,y)=0$ 的一个(复)根。显然， y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根的充要条件是： $(y-y_0)\mid d(x_0,y)$。再设 l 为非负整数，若 $(y-y_0)^l\mid d(x_0,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0,y)$，则称 y_0 是方程 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重(复)根。统计根个数，重根按重数计算。

$d(x_0,y)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合可写成 $\{y\mid d(x_0,y)=0(y\in C)\}$。

下面定理 2 及其推论根据预章定理 2 及其推论即得。

定理 2 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$， l 为非负整数，则

1) y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是： y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根；

2) y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解的充要条件是： y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重根。

推论 1 设 $x_0\in C$，则 $(2)^{x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合与 $d(x_0,y)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即

$$\left\{y\mid \begin{cases} f_0(x_0,y)=0 \\ f_1(x_0,y)=0 \end{cases}(y\in C)\ \ (2)^{x_0}\right\}=\{y\mid d(x_0,y)=0(y\in C)\}$$

于是 $d(x_0,y)=0$ 的所有复根就是 $(2)^{x_0}$ 的所有复数解。

推论 2 设 $x_0\in C$，若 $(2)^{x_0}$ 复数解(含重解)的个数为 K_{x_0}，$d(x_0,y)$ 关于 y 的次数为 K，则 $K_{x_0}=K$， 故 $(2)^{x_0}$ 有解的充要条件是： $K\ge 1$。

推论 3 设 $x_0\in C$， 则 $(2)^{x_0}$ 无解的充要条件是： $(f_0(x_0,y),f_1(x_0,y))=1$。

定理 3 设 $x_0\in C$， $\begin{cases} f_0(x_0,y)=g_0(x_0,y)d(x_0,y) \\ f_1(x_0,y)=g_1(x_0,y)d(x_0,y) \end{cases}$， 则 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 无解， $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))=1$。

证明 $d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，根据预 章定理 5 即得。】

$d(x_0,y)=0$ 根的**性质**

性质 1 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$， 若 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根，则 $-y_0$ 也是 $d(x_0,y)=0$ 的根。

证明 若 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根，则 $d(x_0,y_0)=0$。于是 1) 当 $d(x_0,y)$ 为 y 的偶函数时，$d(x_0,-y_0)=d(x_0,y_0)=0$；2) 当 $d(x_0,y)$ 为 y 的奇函数时，$d(x_0,-y_0)=-d(x_0,y_0)=0$。故 $-y_0$ 也是 $d(x_0,y)=0$ 的根。】

推论 1 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根的充要条件是：$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的根。

证明 充分性也由性质 1 即得。】

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)\,|\,d(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y+y_0)\,|\,d(x_0,y)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l\,|\,d(x_0,y)$ 的充要条件是 $(y+y_0)^l\,|\,d(x_0,y)$。

证明 1) 若 $y_0=0$，命题显然成立。2) 若 $y_0\neq 0$，则 $l=0$ 时，命题显然成立；$l=1$ 时，由推论 2，命题也成立；假设当 $l=k$ 时，命题成立，即 $(y-y_0)^k\,|\,d(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y+y_0)^k\,|\,d(x_0,y)$。那么当 $l=k+1$ 时，证必要性。若 $(y-y_0)^{k+1}\,|\,d(x_0,y)$，则 $(y-y_0)^k\,|\,d(x_0,y)$，由归纳法假设 $(y+y_0)^k\,|\,d(x_0,y)$。由 $y_0\neq 0$，$\left((y-y_0)^k,(y+y_0)^k\right)=1$，$(y-y_0)^k(y+y_0)^k\,|\,d(x_0,y)$。于是可设 $d(x_0,y)=(y-y_0)^k(y+y_0)^k d_1(x_0,y)$，即 $d(x_0,y)=\left(y^2-y_0^2\right)^k d_1(x_0,y)$。$d(x_0,y)$ 为 y 的偶或奇函数，$\left(y^2-y_0^2\right)^k$ 为 y 的偶函数，因此 $d_1(x_0,y)$ 为 y 的偶或奇函数，故 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 1 及其推论 1，推论 2 对于 $d_1(x_0,y)=0$ 也是适用的。由 $(y-y_0)^{k+1}\,|\,d(x_0,y)$，$d(x_0,y)=(y-y_0)^k(y+y_0)^k d_1(x_0,y)$ 可知 $(y-y_0)\,|\,d_1(x_0,y)$，由推论 2 则 $(y+y_0)\,|\,d_1(x_0,y)$，于是 $(y+y_0)^{k+1}\,|\,d(x_0,y)$，必要性成立。充分性同理可证，于是当 $l=k+1$ 时，命题也成立。】

推论 4 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重根。

证明 根据推论 3，则 $(y-y_0)^l\,|\,d(x_0,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y+y_0)^l\,|\,d(x_0,y)$，但 $(y+y_0)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0,y)$。于是命题成立。】

设 $x_0\in C$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，若 y_0 和 $-y_0$ 都是 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重根，则称 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对 l 重(复)根，其中 1) $y_0\in R$ 时，称 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对 l 重实根；2) y_0 为纯虚数时，称 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对 l 重纯虚数根。

推论 5 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$， l 为非负整数，则 y_0， $-y_0$ 是 $d(x_0, y) = 0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$(y^2 - y_0^2)^l \mid d(x_0, y)$，但 $(y^2 - y_0^2)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0, y)$。

证明 若 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0, y) = 0$ 的一对 l 重根，则 $(y - y_0)^l \mid d(x_0, y)$ 且 $(y + y_0)^l \mid d(x_0, y)$，但 $(y - y_0)^{l+1}$ 和 $(y + y_0)^{l+1}$ 都不能整除 $d(x_0, y)$。由 $y_0 \neq 0$， $((y - y_0)^l, (y + y_0)^l) = 1$， 于是 $(y - y_0)^l (y + y_0)^l \mid d(x_0, y)$， 即 $(y^2 - y_0^2)^l \mid d(x_0, y)$。但 $(y^2 - y_0^2)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0, y)$，否则，假如 $(y^2 - y_0^2)^{l+1} \mid d(x_0, y)$，则 $(y - y_0)^{l+1} \mid d(x_0, y)$ 且 $(y + y_0)^{l+1} \mid d(x_0, y)$，矛盾。

反过来，若 $(y^2 - y_0^2)^l \mid d(x_0, y)$，但 $(y^2 - y_0^2)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0, y)$，则 $(y - y_0)^l \mid d(x_0, y)$ 且 $(y + y_0)^l \mid d(x_0, y)$。但 $(y - y_0)^{l+1}$ 和 $(y + y_0)^{l+1}$ 都不能整除 $d(x_0, y)$，否则假如 $(y - y_0)^{l+1} \mid d(x_0, y)$ 或 $(y + y_0)^{l+1} \mid d(x_0, y)$，由推论 3，则 $(y - y_0)^{l+1} \mid d(x_0, y)$ 且 $(y + y_0)^{l+1} \mid d(x_0, y)$。由于 $y_0 \neq 0$， $((y - y_0)^{l+1}, (y + y_0)^{l+1}) = 1$，则 $(y^2 - y_0^2)^{l+1} \mid d(x_0, y)$，矛盾。故 y_0， $-y_0$ 是 $d(x_0, y) = 0$ 的一对 l 重根。】

性质 2 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根，则 $\overline{y_0}$ 是 $d(\overline{x_0}, y) = 0$ 的根。

证明 若 y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根，则 $d(x_0, y_0) = 0$。 $d(x_0, y)$ 是关于 x_0， y 的实系数二元多项式，于是 $d(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = \overline{d(x_0, y_0)} = \overline{0} = 0$，故 $\overline{y_0}$ 是 $d(\overline{x_0}, y) = 0$ 的根。】

若 y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根，由性质 1 和 2，则 $-y_0$ 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根， $\overline{y_0}$ 和 $-\overline{y_0}$ 都是 $d(\overline{x_0}, y) = 0$ 的根。

例 5 设 $a \in R$， $y_0 \in C$， y_0 是 $d(a, y) = 0$ 的根，则 $-y_0$， $\overline{y_0}$， $-\overline{y_0}$ 都是 $d(a, y) = 0$ 的根。

推论 1 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $d(\overline{x_0}, y) = 0$ 的根。

证明 $\overline{(\overline{y_0})} = y_0$， $d(\overline{(\overline{x_0})}, y) = d(x_0, y)$，充分性也由性质 2 即得。】

推论 2 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $(y - y_0) \mid d(x_0, y)$ 的充要条件是：$(y - \overline{y_0}) \mid d(\overline{x_0}, y)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

例 6 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 $(y - y_0) \mid d(a, y)$ 的充要条件是：$(y - \overline{y_0}) \mid d(a, y)$。

推论 3 设 $a \in R$， $y_0 \in C$， l 为非负整数，则

$$(y-y_0)^l \mid d(a,y)\text{的充要条件是：}\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid d(a,y)$$

证明 $d(a,y)=0$ 是 y 的实系数代数方程，根据§2 性质推论 3 即得。】

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根。

证明 根据推论 3 即得。】

例 7 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，若 y_0 是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根，则 $-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$ 都是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根。

$(2)^{x_0}$ 解的**性质**

性质 1 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $-y_0$ 也是 $(2)^{x_0}$ 的解。

证明 若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $f_0(x_0,y_0)=0$ 且 $f_1(x_0,y_0)=0$。由 $f_0(x_0,y), f_1(x_0,y)$ 关于 y 的奇偶性，不妨设 $f_0(x_0,y)$ 是 y 的偶函数， $f_1(x_0,y)$ 是 y 的奇函数，则

$$f_0(x_0,-y_0)=f_0(x_0,y_0)=0 \quad \text{且}\ f_1(x_0,-y_0)=-f_1(x_0,y_0)=0\text{。}$$

故 $-y_0$ 也是 $(2)^{x_0}$ 的解。】

推论 1 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，则 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是：$-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

证明 充分性也由性质 1 即得。】

推论 2 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，则 $(y-y_0)\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)\mid f_1(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y+y_0)\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y+y_0)\mid f_1(x_0,y)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^l\mid f_1(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y+y_0)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y+y_0)^l\mid f_1(x_0,y)$。

证明 由于 $d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y), f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，因此

$(y-y_0)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^l\mid f_1(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid d(x_0,y)$。

$(y+y_0)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y+y_0)^l\mid f_1(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y+y_0)^l\mid d(x_0,y)$。

再由 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 1 推论 3 即得。】

推论 4 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解的充要条件是：$-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解。

证明 根据推论 3 即得。】

设 $x_0\in C$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l 为非负整数，若 y_0 和 $-y_0$ 都是方程组 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解，则称 y_0， $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的一对 l 重(复数)解，其中 1) $y_0\in R$ 时，称 y_0， $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的一对 l 重实数解；2) y_0 为纯虚数时，称 y_0， $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的一对 l 重纯虚数解。

推论 5 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l 为非负整数，则 y_0， $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的一对 l 重解的充要条件是 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_1(x_0,y)$， 但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(x_0,y),f_1(x_0,y)$。

证明 $d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y),f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，于是 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid d(x_0,y)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0,y)$ 的充要条件是： $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_1(x_0,y)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(x_0,y),f_1(x_0,y)$。

根据定理 2，则 y_0， $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的一对 l 重解的充要条件是： y_0， $-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对 l 重根。再由 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 1 推论 5 即得。】

性质 2 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $\overline{y_0}$ 是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的解。

证明 若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解,则 $f_0(x_0,y_0)=0$ 且 $f_1(x_0,y_0)=0$ 。由 $f_0(x_0,y),f_1(x_0,y)$ 是关于 x_0， y 的实系数二元多项式，于是 $f_0\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)=\overline{f_0\left(x_0,y_0\right)}=\overline{0}=0$ 且 $f_1\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)=\overline{f_1\left(x_0,y_0\right)}=\overline{0}=0$ 。故 $\overline{y_0}$ 是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的解。】

若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，由性质 1 和 2，则 $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的解， $\overline{y_0}$ 和 $-\overline{y_0}$ 都是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的解。

例 8 设 $a\in R$， $y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 $-y_0$， $\overline{y_0}$， $-\overline{y_0}$ 都是 $(2)^a$ 的解。

推论 1 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，则 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是： $\overline{y_0}$ 是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的解。

证明 充分性也由性质 2 即得。】

推论 2 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，则 $(y-y_0)\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)\mid f_1(x_0,y)$ 的充要条件是： $\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_0\left(\overline{x_0},y\right)$ 且 $\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_1\left(\overline{x_0},y\right)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $a\in R$， $y_0\in C$， l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^l\mid f_1(a,y)$ 的充要条件是： $\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid f_0(a,y)$ 且 $\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid f_1(a,y)$。

证明 由于 $d(a,y)$ 是 $f_0(a,y),\ f_1(a,y)$ 关于 y 的最大公因式，因此

$(y-y_0)^l \mid f_0(a,y)$且$(y-y_0)^l \mid f_1(a,y)$的充要条件是：$(y-y_0)^l \mid d(a,y)$

$(y-\overline{y_0})^l \mid f_0(a,y)$且$(y-\overline{y_0})^l \mid f_1(a,y)$的充要条件是：$(y-\overline{y_0})^l \mid d(a,y)$

再由$d(x_0,y)=0$根的性质 2 推论 3 即得。】

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则y_0是$(2)^a$的l重解的充要条件是：$\overline{y_0}$是$(2)^a$的l重解。

证明 根据推论 3 即得。】

例 9 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，若y_0是$(2)^a$的l重解，则$-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$都是$(2)^a$的l重解。

§4 原方程根与方程组解及最大公因式方程根的关系

定理 4 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l 为正整数，若 $(y-y_0)^l \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(x_0,y)$，则 $(y-y_0)^l \mid f(x_0+iy)$，即 $z_0 = x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。

证明 令 $z = x_0+iy$，则由关系式(1)可得

$$f(z)=f(x_0+iy)=i^n f_0(x_0,y)+i^{n-1}f_1(x_0,y) \qquad (1)^{x_0}$$

由题设则 $(y-y_0)^l \mid f(x_0+iy)$，$(z-z_0)=i(y-y_0)$，根据 $f(z)=f(x_0+iy)$ 的整除性质，则 $(z-z_0)^l \mid f(z)$，即 $z_0 = x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。】

推论 设 $x_0 \in C$，l 为正整数，若 $y^l \mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^l \mid f_1(x_0,y)$，则 $y^l \mid f(x_0+iy)$，即 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。

证明 在定理 4 中令 $y_0=0$ 即得。】

定理 5 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0,y_0) 是方程组(2)的解，则 $z_0 = x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。

证明 若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则 $f_0(x_0,y_0)=0$ 且 $f_1(x_0,y_0)=0$，于是

$$f(z_0)=f(x_0+iy_0)=i^n[f_0(x_0,y_0)-if_1(x_0,y_0)]=0$$

故 $z_0 = x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则 $z_1 = x_0+iy_0$，$z_2 = x_0-iy_0$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则 $(x_0,-y_0)$，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$，$(\overline{x_0},-\overline{y_0})$ 都是(2)的解，再由定理 5 即得。】

例 10 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，若 (a,y_0) 是(2)的解，则 $(a,-y_0)$，$(a,\overline{y_0})$，$(a,-\overline{y_0})$ 都是(2)的解；$z_1 = a+iy_0$，$z_2 = a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根，其中

1) 当 y_0 是实部及虚部均为零的复数时，$y_0=0$，$\overline{y_0}=0$，于是

$$(a,y_0)=(a,-y_0)=(a,\overline{y_0})=(a,-\overline{y_0})=(a,0)，\quad z_1=z_2=\overline{z_2}=\overline{z_1}=a；$$

2) 当 y_0 是实部不为零且虚部为零的复数时，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$ (这时 $y_0^2>0$)，$\overline{y_0}=y_0$，于是 $(a,\overline{y_0})=(a,y_0)$，$(a,-\overline{y_0})=(a,-y_0)$；$\overline{z_2}=z_1$，$\overline{z_1}=z_2$，$z_1,z_2$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上互为共轭复数。

3) 当 y_0 是实部为零且虚部不为零的复数时，y_0 为纯虚数(这时 $y_0^2<0$)，$\overline{y_0}=-y_0$。于是 $\left(a,\overline{y_0}\right)=\left(a,-y_0\right)$，$\left(a,-\overline{y_0}\right)=\left(a,y_0\right)$；$\overline{z_2}=z_2$，$\overline{z_1}=z_1$，$z_1,z_2$ 在 z 平面实轴上均为实数。

4) 当 y_0 是实部及虚部均不为零的复数时，由于 $y_0\neq 0$，$\overline{y_0}\neq y_0$，$\overline{y_0}\neq -y_0$，则 $\left(\overline{y_0}+y_0\right)\left(\overline{y_0}-y_0\right)\neq 0$，$\overline{y_0^2}\neq y_0^2$，$y_0^2\notin R$。这时 y_0，$-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$ 是 4 个不相同的复数，因此 $\left(a,y_0\right)$，$\left(a,-y_0\right)$，$\left(a,\overline{y_0}\right)$，$\left(a,-\overline{y_0}\right)$ 互不相同，相应的 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 恰好是 z 平面上某正方形的 4 个顶点，a 为该正方形的中心。

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由推论 1 和定理 1 即得。】

推论 3 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $d\left(x_0,y\right)=0$ 的根，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由推论 2 和定理 2 即得。】

定理 6 设 $z_0\in C$，则 z_0 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$\left(z_0,0\right)$ 是方程组(2)的解。

证明 由于 $\begin{cases}F_0(x,iy)=i^n f_0(x,y)\\ F_1(x,iy)=i^{n-1}f_1(x,y)\end{cases}$，令 $x=z_0$，$y=0$，则 n 为偶数时，有 $\begin{cases}i^n f_0\left(z_0,0\right)=F_0\left(z_0,0\right)=f\left(z_0\right)\\ i^{n-1}f_1\left(z_0,0\right)=F_1\left(z_0,0\right)=0\end{cases}$；$n$ 为奇数时，有 $\begin{cases}i^n f_0\left(z_0,0\right)=F_0\left(z_0,0\right)=0\\ i^{n-1}f_1\left(z_0,0\right)=F_1\left(z_0,0\right)=f\left(z_0\right)\end{cases}$

故无论 n 是偶数还是奇数，都有 $f\left(z_0\right)=0\Leftrightarrow\begin{cases}f_0\left(z_0,0\right)=0\\ f_1\left(z_0,0\right)=0\end{cases}$。

因此，若 z_0 是 $f(z)=0$ 的根，则 $\left(z_0,0\right)$ 是(2)的解；反过来，若 $\left(z_0,0\right)$ 是(2)的解，则 z_0 是 $f(z)=0$ 的根。】

推论 1 设 $x_0\in C$，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$\left(x_0,0\right)$ 是(2)的解。

证明 由定理 6 即得。】

设 $x_0\in C$，$z_0=x_0$，则点 z_0 在 z 平面上关于点 x_0 的对称点就是它 $\left(z_0\right)$ 自身，于是若 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的根，则 z_0 在 z 平面上关于点 x_0 对称。

推论 2 设 $x_0\in C$，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：0 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

证明 由推论 1 和定理 1 即得。】

推论 2 表明 设 $x_0 \in C$，则 $y \mid f(x_0+iy)$ 的充要条件是：$y \mid f_0(x_0,y)$ 且 $y \mid f_1(x_0,y)$。

设 $x_0 \in C$，$z = x_0 + iy$，则

$$f(z) = f(x_0+iy) = F_0(x_0,iy) + F_1(x_0,iy) = i^n f_0(x_0,y) + i^{n-1} f_1(x_0,y)$$

其中 $F_0(x_0,iy) = i^n f_0(x_0,y)$，$F_1(x_0,iy) = i^{n-1} f_1(x_0,y)$，$f_0(x_0,y)$，$f_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0，y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数。

若 $(2)^{x_0}$ 有解，由定理 2 推论 2，则 $f_0(x_0,y), f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式 $d(x_0,y)$ 关于 y 的次数 $K \ge 1$，$(f_0(x_0,y), f_1(x_0,y)) \ne 1$。$d(x_0,y)$ 是关于 x_0，y 的实系数二元多项式，为 y 的偶或奇函数，可设

$$\begin{cases} f_0(x_0,y) = g_0(x_0,y)d(x_0,y) \\ f_1(x_0,y) = g_1(x_0,y)d(x_0,y) \end{cases}$$

其中 $g_0(x_0,y), g_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0，y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，$g_0(x_0,y)$ 是 y 的系数不全为零的多项式，即它是非零多项式，但 $g_1(x_0,y)$ 却有可能是 y 的零多项式，由定理 3，则 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 无解，$g_0(x_0,y), g_1(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0(x_0,y), g_1(x_0,y)) = 1$。于是

$$f(z) = f(x_0+iy) = i^n f_0(x_0,y) + i^{n-1} f_1(x_0,y) = i^{n-K}[g_0(x_0,y) - ig_1(x_0,y)][i^K d(x_0,y)]$$

令 $g(z) = g(x_0+iy) = i^{n-K}[g_0(x_0,y) - ig_1(x_0,y)]$，则 $f(x_0+iy) = g(x_0+iy)\ [i^K d(x_0,y)]$。

再令 $F_d(x_0,iy) = i^K d(x_0,y)$，则 $f(z) = f(x_0+iy) = g(x_0+iy)F_d(x_0,iy)$，于是

$$f(z) = g(z)F_d(x_0, z-x_0)$$

该式与 x_0 有关，可称它是 $f(z)$ 在 z 平面上点 x_0 的分解式，其中 $g(z)$ 称为点 x_0 的 $g(z)$，$F_d(x_0,z-x_0) = F_d(x_0,iy) = i^K d(x_0,y)$，$F_d(x_0,z-x_0)$ 为 $(z-x_0)$ 的偶或奇函数，而且是关于 x_0，$(z-x_0)$ 的实系数二元多项式，且 $x_0 \in C$，故 $F_d(x_0,z-x_0)$ 是 $(z-x_0)$ 的复系数 K 次多项式，也是 z 的复系数 K 次多项式，$g(z)$ 为复系数 $n-K$ 次多项式。

由 $\begin{cases} f_0(x_0,y) = g_0(x_0,y)d(x_0,y) \\ f_1(x_0,y) = g_1(x_0,y)d(x_0,y) \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} i^n f_0(x_0,y) = i^{n-K} g_0(x_0,y)\ [i^K d(x_0,y)] \\ i^{n-1} f_1(x_0,y) = i^{n-K-1} g_1(x_0,y)\ [i^K d(x_0,y)] \end{cases}$

令 $G_0(x_0,iy) = i^{n-K} g_0(x_0,y)$，$G_1(x_0,iy) = i^{n-K-1} g_1(x_0,y)$，又 $F_0(x_0,iy) = i^n f_0(x_0,y)$，$F_1(x_0,iy) = i^{n-1} f_1(x_0,y)$，$F_d(x_0,iy) = i^K d(x_0,y)$，于是 $\begin{cases} F_0(x_0,iy) = G_0(x_0,iy)F_d(x_0,iy) \\ F_1(x_0iy) = G_1(x_0,iy)F_d(x_0,iy) \end{cases}$。

由 $z=x_0+iy$，则 $\begin{cases}F_0(x_0,z-x_0)=G_0(x_0,z-x_0)F_d(x_0,z-x_0)\\F_1(x_0,z-x_0)=G_1(x_0,z-x_0)F_d(x_0,z-x_0)\end{cases}$

其中 $F_0(x_0,z-x_0)$ 是 $(z-x_0)$ 的次数为 n 的多项式，但 $F_1(x_0,z-x_0)$ 却有可能是 $(z-x_0)$ 的零多项式，即当它关于 $(z-x_0)$ 的系数全为零时。由于 $(2)^{x_0}$ 有解，又

$\begin{cases}F_0(x_0,z-x_0)=F_0(x_0,iy)=i^n f_0(x_0,y)\\F_1(x_0,z-x_0)=F_1(x_0,iy)=i^{n-1}f_1(x_0,y)\end{cases}$，于是 $\begin{cases}F_0(x_0,z-x_0)=0\\F_1(x_0,z-x_0)=0\end{cases}$ 有解，根据预章定理 2 推论 3，则 $F_0(x_0,z-x_0)$, $F_1(x_0,z-x_0)$ 关于 $(z-x_0)$ 非互素，即 $(F_0(x_0,z-x_0),F_1(x_0,z-x_0))\neq 1$。

$\begin{cases}G_0(x_0,z-x_0)=0\\G_1(x_0,z-x_0)=0\end{cases}$ 无解。否则，假如 $\begin{cases}G_0(x_0,z-x_0)=0\\G_1(x_0,z-x_0)=0\end{cases}$ 有解，则 $\exists\ y_0\in C$，将 $z_0=x_0+iy_0$ 代入 $\begin{cases}G_0(x_0,z-x_0)=0\\G_1(x_0,z-x_0)=0\end{cases}$ 后，满足 $\begin{cases}G_0(x_0,z_0-x_0)=0\\G_1(x_0,z_0-x_0)=0\end{cases}$，从而

$$\begin{cases}G_0(x_0,z_0-x_0)=G_0(x_0,iy_0)=i^{n-K}g_0(x_0,y_0)=0\\G_1(x_0,z_0-x_0)=G_1(x_0,iy_0)=i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=0\end{cases}$$

因此 y_0 是 $\begin{cases}g_0(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$ 的解，矛盾。根据预章定理 5，则 $(G_0(x_0,z-x_0),G_1(x_0,z-x_0))=1$，即 $G_0(x_0,z-x_0)$, $G_1(x_0,z-x_0)$ 关于 $(z-x_0)$ 互素，$F_d(x_0,z-x_0)$ 是 $F_0(x_0,z-x_0)$, $F_1(x_0,z-x_0)$ 关于 $(z-x_0)$ 的一个最大公因式。

综上所述，设 $x_0\in C$，若 $(2)^{x_0}$ 有解，则 $d(x_0,y)$ 关于 y 的次数 $K\geq 1$，$f(z)$ 就能在 z 平面上的点 x_0 分解成两个 z 的复系数多项式 $g(z)$ 与 $F_d(x_0,z-x_0)$ 的乘积，即

$$f(z)=g(z)F_d(x_0,z-x_0)。$$

其中 $g(z)$ 为点 x_0 的 $g(z)$。由 $z=x_0+iy$，该式又可写成 $f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\ [i^K d(x_0,y)]$。于是说点 x_0 的 $g(z)$，就意味着 $f(z)=g(z)F_d(x_0,z-x_0)$ 或 $f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\ [i^K d(x_0,y)]$。反之亦然。

$g(z)=g(x_0+iy)$ 的**整除性质**与 $f(z)=f(x_0+iy)$ 的整除性质相同。

点 x_0 的 $g(z)$ **性质 1** 设 $x_0\in C$，$g(z)=g(x_0+iy)=i^{n-K}[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$，其中 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0，y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，并且 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))=1$，则 $g(x_0)\neq 0$，于是 $(z-x_0)$ 不能整除 $g(z)$，即 y 不能整除 $g(x_0+iy)$。

证明 由于 $g(z)=g(x_0+iy)=i^{n-K}[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$，于是

1) 当 $g_0(x_0,y)$ 为 y 的偶函数， $g_1(x_0,y)$ 为 y 的奇函数时，有

$$g_1(x_0,0)=0\text{，}\quad g(x_0)=i^{n-K}g_0(x_0,0)$$

2) 当 $g_0(x_0,y)$ 为 y 的奇函数， $g_1(x_0,y)$ 为 y 的偶函数时，有

$$g_0(x_0,0)=0\text{，}\quad g(x_0)=i^{n-K-1}g_1(x_0,0)$$

由 1)，2)可知， $g(x_0)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} g_0(x_0,0)=0 \\ g_1(x_0,0)=0 \end{cases}$

用反证法：假如 $g(x_0)=0$，则 0 是 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 的解。因此，$y\mid g_0(x_0,y)$ 且 $y\mid g_1(x_0,y)$，于是 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 非互素，矛盾。所以 $g(x_0)\neq 0$， $(z-x_0)$ 不能整除 $g(z)$，由 $g(z)=g(x_0+iy)$ 的整除性质，则 y 不能整除 $g(x_0+iy)$。】

点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1 表明 在分解式 $f(z)=g(z)F_d(x_0,z-x_0)$ 中 $g(x_0)\neq 0$。

下面继续定理 6 的推论

推论 3 设 $x_0\in C$， l 为非负整数，则

$y^l\mid f(x_0+iy)$ 的充要条件是： $y^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^l\mid f_1(x_0,y)$。

证明 当 $l=0$ 时，命题显然成立；当 $l\geq 1$ 时，由定理 4 推论充分性成立，再证必要性。若 $y^l\mid f(x_0+iy)$，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根， $l\geq 1$，故 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的根，由定理 6 推论 2，则 0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，于是有

$$f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\left[i^K d(x_0,y)\right]$$

由点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1， y 不能整除 $g(x_0+iy)$，于是 $(y^l,g(x_0+iy))=1$，因此 $y^l\mid d(x_0,y)$。$d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，故 $y^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^l\mid f_1(x_0,y)$。】

推论 4 设 $x_0\in C$， l 为非负整数，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：0 是 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解。

证明 由推论 3，则 $y^l\mid f(x_0+iy)$，但 y^{l+1} 不能整除 $f(x_0+iy)$ 的充要条件是： $y^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^l\mid f_1(x_0,y)$，但 y^{l+1} 不能同时整除 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$。故命题成立。】

推论 5 设 $x_0\in C$， l 为非负整数，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：0 是 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重根。

证明 由推论 4 和定理 2 即得。】

推论 6 设 n 为正整数， $g(z)$ 是复系数 n 次多项式， $x_0\in C$， l 为非负整数，

$$g(z)=g(x_0+iy)=i^n[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$$

其中 $g_0(x_0,y),g_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，并且 $g_0(x_0,y),\ g_1(x_0,y)$ 关于 y 非互素，即 $(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))\neq 1$，于是

1) $z_0=x_0$ 是 $g(z)=0$ 的根的充要条件是：0 是 $\begin{cases}g_0(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$ 的解；

2) $y^l\mid g(x_0+iy)$ 的充要条件是： $y^l\mid g_0(x_0,y)$ 且 $y^l\mid g_1(x_0,y)$。

证明 1) 由题设和 $g(z)=g(x_0+iy)=i^n[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$，参照点 x_0 的 $g(z)=0$ 性质 1 的证明，同理可知 $g(x_0)=0\Leftrightarrow\begin{cases}g_0(x_0,0)=0\\g_1(x_0,0)=0\end{cases}$。故命题成立。

2) 由 $g(x_0+iy)=i^n[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$ 即知充分性成立。证必要性。

由于 $(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))\neq 1$，则 $\begin{cases}g_0(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$ 有解。不妨设 $d^*(x_0,y)$ 是 $g_0(x_0,y),$ $g_1(x_0,y)$ 关于 y 的一个最大公因式，其次数为 K，则 $K\geq 1$，可设

$$\begin{cases}g_0(x_0,y)=g_0^*(x_0,y)d^*(x_0,y)\\g_1(x_0,y)=g_1^*(x_0,y)d^*(x_0,y)\end{cases}$$

于是 $g(z)=g(x_0+iy)=i^{n-K}[g_0^*(x_0,y)-ig_1^*(x_0,y)][i^Kd^*(x_0,y)]$，令

$$g^*(z)=g^*(x_0+iy)=i^{n-K}[g_0^*(x_0,y)-ig_1^*(x_0,y)]$$

其中 $g_0^*(x_0,y),\ g_1^*(x_0,y)$ 均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，并且 $g_0^*(x_0,y),\ g_1^*(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0^*(x_0,y),g_1^*(x_0,y))=1$。则

$$g(x_0+iy)=g^*(x_0+iy)[i^Kd^*(x_0,y)]$$

根据(点 x_0 的 $g(z)$)性质 1，则 $(z-x_0)$ 不能整除 $g^*(z)$，即 y 不能整除 $g^*(x_0+iy)$。

若 $y^l\mid g(x_0+iy)$，由于 $\begin{cases}g_0(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$ 有解，而且 $g(x_0+iy)=g^*(x_0+iy)[i^Kd^*(x_0,y)]$， y 不能整除 $g^*(x_0+iy)$，于是 $(y^l,g^*(x_0+iy))=1$，故 $y^l\mid d^*(x_0,y)$。 $d^*(x_0,y)$ 是 $g_0(x_0,y),$ $g_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，于是 $y^l\mid g_0(x_0,y)$ 且 $y^l\mid g_1(x_0,y)$。】

该推论在定理 8 推论 3 的证明中就要用到。

设 $x_0\in C$， $y_0\in C$， $z_0=x_0+iy_0$，若 $F_d(x_0,z-x_0)$ 在 $z=z_0$ 时函数值 $F_d(x_0,z_0-x_0)=$ $F_d(x_0,iy_0)=i^Kd(x_0,y_0)=0$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ (在 z 平面上)的一个(复)根。

显然，$z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的根的充要条件是：$(z-z_0)\mid F_d(x_0,z-x_0)$。

再设 l 为非负整数，若 $(z-z_0)^l\mid F_d(x_0,z-x_0)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_d(x_0,z-x_0)$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ (在 z 平面上)的 l 重(复)根。

$F_d(x_0,z-x_0)=F_d(x_0,iy)$ 的**整除性质** 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z=x_0+iy$，$z_0=x_0+iy_0$，则 $(z-z_0)^l\mid F_d(x_0,z-x_0)$ 的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_d(x_0,iy)$。

它与 $f(z)=f(x_0+iy)$ 的整除性质相同，仅有形式差异。$z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的根的充要条件是：$(y-y_0)\mid F_d(x_0,iy)$；$z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_d(x_0,iy)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_d(x_0,iy)$。

下面继续定理 6 的推论

推论 7 设 $x_0\in C$，l 为非负整数，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0=x_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的 l 重根。

证明 由题设和 $F_d(x_0,iy)=i^K d(x_0,y)$，则 $y^l\mid d(x_0,y)$，但 y^{l+1} 不能整除 $d(x_0,y)$ 的充要条件是：$y^l\mid F_d(x_0,iy)$，但 y^{l+1} 不能整除 $F_d(x_0,iy)$。即 0 是 $d(x_0,y)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0=x_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的 l 重根。再由推论 5 即得。】

§5 方程一对复根与方程组一对复数解

定义 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根，特别当 $y_0 = 0$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，即 $(z-x_0)^2 \mid f(z)$，则称 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面上)的一对(复)根。

定义解析：

1) 当 $y_0 = 0$ 时，若 $z_1 = x_0$， $z_2 = x_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根，则要求 x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，才能称 $z_1 = x_0$， $z_2 = x_0$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面上)的一对 x_0 (复)根。

事实上， $z_1 = x_0$， $z_2 = x_0$，若 x_0 是 $f(z)=0$ 的单根，则 z_1 和 z_2 实际上是 $f(z)=0$ 的同一个根；只有要求 x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，才能确保 z_1，z_2 是 $f(z)=0$ 的一对根。

2) 当 $y_0 \neq 0$ 时，若 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根，就可称 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面上)的一对非 x_0 (复)根。

由 $f(z)= f(x_0 + iy)$ 整除性质， x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根的充要条件是：$y^2 \mid f(x_0 + iy)$。

$f(z)=0$ 一对复根的**性质** 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) \mid f(x_0 + iy)$。

证明 若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $(z-z_1) \mid f(z)$ 且 $(z-z_2) \mid f(z)$。令 $z = x_0 + iy$，则 $(z-z_1)= i(y-y_0)$，$(z-z_2)= i(y+y_0)$，由 $f(z)= f(x_0 + iy)$ 的整除性质，则 $(y-y_0) \mid f(x_0+iy)$ 且 $(y+y_0) \mid f(x_0+iy)$，于是 1) 当 $y_0 \neq 0$ 时，$((y-y_0),(y+y_0))=1$，则 $(y-y_0)(y+y_0) \mid f(x_0+iy)$，即 $(y^2-y_0^2) \mid f(x_0+iy)$；2) 当 $y_0 = 0$ 时，由定义， x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，故 $y^2 \mid f(x_0+iy)$，必要性也成立。

反过来，若 $(y^2-y_0^2) \mid f(x_0+iy)$，则 $(y-y_0) \mid f(x_0+iy)$ 且 $(y+y_0) \mid f(x_0+iy)$，根据 $f(z)= f(x_0+iy)$ 的整除性质，则 $(z-z_1) \mid f(z)$ 且 $(z-z_2) \mid f(z)$，于是 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根，特别当 $y_0 = 0$ 时，由于 $y^2 \mid f(x_0+iy)$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，因此 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根。】

推论 设 $x_0 \in C$，则 $z_1 = x_0$， $z_2 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$y^2 \mid f(x_0+iy)$。

证明 在性质中令 $y_0=0$ 即得。】

定义 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 都是方程组(2)的解，特别当 $y_0=0$ 时，$y^2\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid f_1(x_0,y)$，则称 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对(复数)解。

定义解析：1) 当 $y_0\neq 0$ 时，若 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 都是(2)的解，就可称 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对(复数)解；2) 当 $y_0=0$ 时，若 $(x_0,0)$，$(x_0,0)$ 都是(2)的解，则要求满足 $y^2\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid f_1(x_0,y)$，才能称 $(x_0,0)$，$(x_0,0)$ 是(2)的一对(复数)解。

定理 7 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是方程组(2)的一对复数解。

证明 若 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $f(z)$ 的次数 $n\geq 2$，$f(z_1)=f(x_0+iy_0)=0$，$f(z_2)=f(x_0-iy_0)=0$，由关系式(1)有

$$\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=f(x_0+iy_0)=0 \\ i^n f_0(x_0,-y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,-y_0)=f(x_0-iy_0)=0 \end{cases}$$

1) n 为偶数时，$f_0(x,y)$ 是 y 的偶函数，$f_1(x,y)$ 是 y 的奇函数，于是

$$\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \\ i^n f_0(x_0,y_0)-i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad 故 \quad \begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0 \\ f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}。$$

2) n 为奇数时，$f_0(x,y)$ 是 y 的奇函数，$f_1(x,y)$ 是 y 的偶函数，于是

$$\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \\ -i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad 故 \quad \begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0 \\ f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}。$$

因此无论 n 为偶或奇数，(x_0,y_0) 都是(2)的解，由(2)解的性质，$(x_0,-y_0)$ 也是(2)的解。特别当 $y_0=0$ 时，由一对复根定义，x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，即 $y^2\mid f(x_0+iy)$，由定理 6 推论 3 则 $y^2\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid f_1(x_0,y)$，故 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对复数解。

反过来，若 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对复数解，由定理 5，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根。特别当 $y_0=0$ 时，由一对复数解定义，$y^2\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid f_1(x_0,y)$，由定理 6 推论 3，则 $y^2\mid f(x_0+iy)$，即 x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，于是 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根。】

推论 1 设 $x_0\in C$，则 $z_1=x_0$，$z_2=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$(x_0,0)$，$(x_0,0)$ 是(2)的一对复数解。

证明 在定理 7 中令 $y_0=0$ 即得。】

例 11 设 $a\in R$，则 $z_1=a$，$z_2=a$ 是 $f(z)=0$ 的一对实根的充要条件是：$(a,0)$，$(a,0)$ 是(2)的一对实数解。

推论 2 设 $a\in R$， $y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：(a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的一对复数解。

证明 在定理 7 中令 $x_0=a\in R$，即得。】

推论 3 设 $a\in R$， $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭根的充要条件是：(a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的一对实数解。

证明 在推论 2 中令 $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$ 即得。】

推论 4 设 $a\in R$， y_0 为纯虚数，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上的一对实根的充要条件是：(a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的一对复数解。

证明 在推论 2 中令 y_0 为纯虚数即得。】

推论 5 设 $a\in R$， $y_0\in R$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的充要条件是：(a,y_0) 是(2)的实数解。

证明 充分性由定理 5 即得，再证必要性。若 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，则

1) 当 $y_0=0$ 时，$z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，由定理 6 推论 1 则 $(a,0)$ 是(2)的实数解。

2) 当 $y_0\neq 0$ 时， $z_0=a+iy_0$， $\overline{z_0}=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一对共轭根，由推论 3，则 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的一对实数解，于是 (a,y_0) 是(2)的实数解。】

设 $x_0\in C$， $y_0\in C$，若 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由 $f(z)=0$ 根的性质，则它们的共轭复数 $\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 也是 $f(z)=0$ 的根。特别当 $y_0=0$ 时，$\overline{y_0}=0$，由一对复根定义，x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，由 $f(z)=0$ 根的性质推论 6，则 $\overline{x_0}$ 也是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，故 $\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 也是 $f(z)=0$ 的一对复根，其中

1. 当 $x_0\notin R$ 时，$\overline{x_0}\neq x_0$，则 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$； $\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根。

2. 当 $x_0=a\in R$， $y_0\neq 0$ 时，三种情形：

1) 若 $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$ ($y_0^2>0$)， $\overline{y_0}=y_0$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的

一对共轭复根。由于 $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}=a-iy_0=z_2$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}=a+iy_0=z_1$，则 $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 与 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的同一对共轭复根或两对相同的共轭复根。

2) 若 y_0 为纯虚数($y_0^2<0$)，$\overline{y_0}=-y_0$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对实根。由于 $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}=a+iy_0=z_1$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}=a-iy_0=z_2$，则 $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 与 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的同一对实根或两对相同的实根。

3) 若 $y_0^2\notin R$，$\overline{y_0^2}\neq y_0^2$，于是 y_0，$-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$ 是 4 个互不相同的复数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根。

设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对复数解，由(2)解的性质，则 $\left(\overline{x_0},-\overline{y_0}\right)$，$\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)$ 也都是(2)的解。特别当 $y_0=0$ 时，$\overline{y_0}=0$，由一对复数解定义，$y^2\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid f_1(x_0,y)$，由定理 6 推论 3，$y^2\mid f(x_0+iy)$，即 x_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，由 $f(z)=0$ 根的性质推论 6，则 $\overline{x_0}$ 也是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，即 $y^2\mid f\left(\overline{x_0}+iy\right)$，由定理 6 推论 3，则 $y^2\mid f_0\left(\overline{x_0},y\right)$ 且 $y^2\mid f_1\left(\overline{x_0},y\right)$，故 $\left(\overline{x_0},-\overline{y_0}\right)$，$\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)$ 也是(2)的一对复数解，其中 1. 当 $x_0\notin R$ 时，$\overline{x_0}\neq x_0$，则 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$；$\left(\overline{x_0},-\overline{y_0}\right)$，$\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)$ 是(2)的两对不相同的复数解。

2. 当 $x_0=a\in R$，$y_0\neq 0$ 时，三种情形：

1) 若 $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$($y_0^2>0$)，$\overline{y_0}=y_0$，则 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的一对实数解。由于 $\left(a,-\overline{y_0}\right)=(a,-y_0)$，$\left(a,\overline{y_0}\right)=(a,y_0)$，则 $\left(a,-\overline{y_0}\right)$，$\left(a,\overline{y_0}\right)$ 与 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的同一对实数解或两对相同的实数解。

2) 若 y_0 为纯虚数($y_0^2<0$)，$\overline{y_0}=-y_0$，则 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的一对复数解。由于 $\left(a,-\overline{y_0}\right)=(a,y_0)$，$\left(a,\overline{y_0}\right)=(a,-y_0)$，则 $\left(a,-\overline{y_0}\right)$，$\left(a,\overline{y_0}\right)$ 与 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是(2)的同一对复数解或两对相同的复数解。

3) 若 $y_0^2\notin R$，$\overline{y_0^2}\neq y_0^2$，于是 y_0，$-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$ 是 4 个互不相同的复数，则 (a,y_0)，$(a,-y_0)$；$\left(a,-\overline{y_0}\right)$，$\left(a,\overline{y_0}\right)$ 是(2)的两对不相同的复数解。

于是由定理 7 可得推论 6 和 7。

推论 6 设 $x_0\notin R$，$y_0\in C$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$；$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是：(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$；$\left(\overline{x_0},-\overline{y_0}\right)$，$\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)$ 是(2)

两对不相同的复数解。

例 12 设 $x_0 \notin R$，则 $z_1 = x_0$， $z_2 = x_0$； $\overline{z_1} = \overline{x_0}$， $\overline{z_2} = \overline{x_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是：$(x_0,0)$，$(x_0,0)$；$(\overline{x_0},0)$，$(\overline{x_0},0)$是(2)两对不相同的复数解。

推论 7 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是：(a, y_0)，$(a,-y_0)$；$(a,-\overline{y_0})$，$(a,\overline{y_0})$是(2)两对不相同的复数解。

例 13 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$。

证明 若 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根，由一对复根的性质，则 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid f(a+iy)$， $\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$。由 $y_0^2 \notin R$，$\overline{y_0^2} \neq y_0^2$， $\left(\left(y^2 - y_0^2\right), \left(y^2 - \overline{y_0^2}\right)\right) = 1$，于是 $\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$。

反过来，若 $\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$，则 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid f(a+iy)$，$\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$。由题设及一对复根的性质，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根。】

为了加深对定理 7 及其推论的理解，我们引入：

定义 设 z_j，z_h 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$，且 1) 当 $z_j \neq z_h$ 时，记 x_{jh} 为线段 $z_j z_h$ 的中点；2) 当 $z_j = z_h$ 时，取 $x_{jh} = z_j = z_h$，则称 x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点。

显然，若 x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点，则 x_{jh} 也是 z_h 和 z_j 的中点，且 z_j 和 z_h 在 z 平面上关于中点 x_{jh} 对称。

中点**性质** 设 z_j， z_h 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$，则 x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点的充要条件是： $x_{jh} = \dfrac{z_j + z_h}{2}$。

证明 由题设则 1) 当 $z_j \neq z_h$ 时，x_{jh} 为线段 $z_j z_h$ 的中点的充要条件是：$x_{jh} = \dfrac{z_j + z_h}{2}$；2) 当 $z_j = z_h$ 时，则 $x_{jh} = z_j = z_h$ 的充要条件是： $x_{jh} = \dfrac{z_j + z_h}{2}$。根据中点定义，命题成

立。】

例 设 $x_j, y_j, x_h, y_h \in R$， $z_j = x_j + iy_j$ 和 $z_h = x_h + iy_h$ 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$，则 x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点的充要条件是： $x_{jh} = \dfrac{x_j + x_h}{2} + i\dfrac{y_j + y_h}{2}$。

推论 1 设 z_j， z_h 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$， x_{jh} 为 z_j 和 z_h 的中点，若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，则 $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$。

证明 由题意根据中点性质，则 $x_{jh} = \dfrac{z_j + z_h}{2}$。若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，则

$$z_h = 2x_{jh} - z_j = 2x_{jh} - (x_{jh} + iy_{jh}) = x_{jh} - iy_{jh}。】$$

推论 2 设 z_j， z_h 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$，若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$， $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$，则 x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点。

证明 若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$， $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$，则 $x_{jh} = \dfrac{z_j + z_h}{2}$，再由中点性质即得。】

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是实系数 n 次代数方程 $f(z) = 0$ 的所有复根， z_j 和 z_h 是其中任意两个根 $(1 \leq j < h, h = 2,3,\cdots,n)$， x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点，令 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，由推论 1，则 $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$。 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$ 和 $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$ 都是 $f(z) = 0$ 的根，特别当 $y_{jh} = 0$ 时，$x_{jh} = z_j = z_h$，则 x_{jh} 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根，故 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$， $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$ 是 $f(z) = 0$ 以 x_{jh} 为中点(关于点 x_{jh} 对称)的一对复根。于是 $f(z) = 0$ 的这 n 个复根(无论是否有重根)共计可组成 $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 对复根。

设 $x_{jh} \in C$， $y_{jh} \in C$，若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$， $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对复根，则又称 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$， $z_h = x_{jh} - iy_{jh}$ 是 $f(z) = 0$ 以 x_{jh} 为中点(关于点 x_{jh} 对称)的成对根。

设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，若 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ 两对不相同的复根，则这两对根均为 $f(z) = 0$ 以 a 为中点(关于点 a 对称)的成对根，其中 $z_1, \overline{z_1}, z_2, \overline{z_2}$ 依次是 z 平面上某正方形的 4 个顶点，实轴上的点 a 为该正方形两条对角线 z_1z_2 和 $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ 的交点。

定义 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 y_0， $-y_0$ 都是方程组 $(2)^{x_0}$ 的解，特别当 $y_0 = 0$ 时，

$y^2 \mid f_0(x_0,y)$且$y^2 \mid f_1(x_0,y)$，则称y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对(复数)解。

定义解析：1) 当$y_0 \neq 0$时，若y_0，$-y_0$都是$(2)^{x_0}$的解，就可称y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对非零(复数)解。2) 当$y_0 = 0$时，若0，0都是$(2)^{x_0}$的解，则要求满足$y^2 \mid f_0(x_0,y)$且$y^2 \mid f_1(x_0,y)$，即0是$(2)^{x_0}$的2重以上解，才能称0，0是$(2)^{x_0}$的一对零实数解。

$(2)^{x_0}$一对复数解的**性质** 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对复数解的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) \mid f_0(x_0,y)$且$(y^2 - y_0^2) \mid f_1(x_0,y)$。

证明 若y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对复数解，则

$$(y-y_0) \mid f_0(x_0,y) \text{且} (y-y_0) \mid f_1(x_0,y)，\quad (y+y_0) \mid f_0(x_0,y) \text{且} (y+y_0) \mid f_1(x_0,y)$$

1) 当$y_0 \neq 0$时，$((y-y_0),(y+y_0)) = 1$，于是

$$(y-y_0)(y+y_0) \mid f_0(x_0,y) \text{且} (y-y_0)(y+y_0) \mid f_1(x_0,y)，$$

即$(y^2 - y_0^2) \mid f_0(x_0,y)$且$(y^2 - y_0^2) \mid f_1(x_0,y)$；

2) 当$y_0 = 0$时，由定义，则$y^2 \mid f_0(x_0,y)$且$y^2 \mid f_1(x_0,y)$，必要性也成立。

反过来，若$(y^2 - y_0^2) \mid f_0(x_0,y)$且$(y^2 - y_0^2) \mid f_1(x_0,y)$，即

$$(y-y_0)(y+y_0) \mid f_0(x_0,y) \text{且} (y-y_0)(y+y_0) \mid f_1(x_0,y)，\text{则有}$$

$$(y-y_0) \mid f_0(x_0,y) \text{且} (y-y_0) \mid f_1(x_0,y)，\quad (y+y_0) \mid f_0(x_0,y) \text{且} (y+y_0) \mid f_1(x_0,y)$$

于是y_0，$-y_0$都是$(2)^{x_0}$的解，特别当$y_0 = 0$时，有$y^2 \mid f_0(x_0,y)$且$y^2 \mid f_1(x_0,y)$，因此y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对复数解。】

引理 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$是方程组(2)的一对复数解的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对复数解。

证明 由题设和定义根据定理 1 即得。】

方程组(2)一对复数解的**性质** 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$是(2)的一对复数解的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) \mid f_0(x_0,y)$且$(y^2 - y_0^2) \mid f_1(x_0,y)$。

证明 由引理和$(2)^{x_0}$一对复数解的性质即得。】

定理 8 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$f(z) = 0$的一对复根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对复数解。

证明 由引理和定理 7 即得。】

定理 8 表明 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $\left(y^2-y_0^2\right) | f\left(x_0+iy\right)$的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right) | f_0\left(x_0,y\right) \text{且} \left(y^2-y_0^2\right) | f_1\left(x_0,y\right)。$$

推论 1 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$； $\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的两对不相同的复根的充要条件是： y_0， $-y_0$ 是 $(2)^{x_0}$ 的一对复数解； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的一对复数解。

证明 由题意根据定理 8 即得。】

它表明 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则 $\left(y^2-y_0^2\right) | f\left(x_0+iy\right)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f\left(\overline{x_0}+iy\right)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right) | f_0\left(x_0,y\right)$且$\left(y^2-y_0^2\right) | f_1\left(x_0,y\right)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f_0\left(\overline{x_0},y\right)$且$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f_1\left(\overline{x_0},y\right)$。

推论 2 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是： y_0， $-y_0$； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 两对不相同的复数解。

证明 由题意根据定理 8 即得。】

例 14 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 y_0， $-y_0$； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 两对不相同的复数解的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f_0(a,y)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f_1(a,y)$。

证明 由于 $x_0 = a \in R$， $y_0^2 \notin R$， $\overline{y_0^2} \neq y_0^2$， $\left(\left(y^2-y_0^2\right),\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\right)=1$，根据 $(2)^{x_0}$ 一对复数解的性质即得。】

推论 2 表明 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f(a+iy)$ 的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f_0(a,y) \text{且} \left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right) | f_1(a,y)。$$

点 x_0 的 $g(z)$ **性质 2** 设 $x_0 \in C$， $g(z) = g\left(x_0+iy\right) = i^{n-K}\left[g_0\left(x_0,y\right) - ig_1\left(x_0,y\right)\right]$，其中 $g_0\left(x_0,y\right)$，$g_1\left(x_0,y\right)$ 均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，并且 $g_0\left(x_0,y\right)$，$g_1\left(x_0,y\right)$ 关于 y 互素，即 $\left(g_0\left(x_0,y\right), g_1\left(x_0,y\right)\right)=1$，于是

1) $g(z)=0$ 没有以 x_0 为中点的成对根；

2) 设 $y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$， $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$，则 $(z - z_1)$ 和 $(z - z_2)$ 不能同时整除 $g(z)$，即 $(y - y_0)$ 和 $(y + y_0)$ 不能同时整除 $g(x_0 + iy)$。

证明 1) 用反证法：假如 $g(z)=0$ 有以 x_0 为中点的成对根，设为 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ (其中 $y_0 \in C$)则 $y_0 \neq 0$ (否则，假如 $y_0 = 0$，则 x_0 是 $g(z)=0$ 的 2 重以上根，$g(x_0)=0$，与点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1， $g(x_0)\neq 0$ 矛盾)， $g(z_1)=g(x_0+iy_0)=0$，$g(z_2)=g(x_0-iy_0)=0$。于是由 $g(x_0+iy)=i^{n-K}g_0(x_0,y)+i^{n-K-1}g_1(x_0,y)$，有

$$\begin{cases} i^{n-K}g_0(x_0,y_0)+i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=g(x_0+iy_0)=0 \\ i^{n-K}g_0(x_0,-y_0)+i^{n-K-1}g_1(x_0,-y_0)=g(x_0-iy_0)=0 \end{cases}$$

① 当 $g_0(x_0,y)$ 是 y 的偶函数， $g_1(x_0,y)$ 是 y 的奇函数时，有

$$\begin{cases} i^{n-K}g_0(x_0,y_0)+i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=0 \\ i^{n-K}g_0(x_0,y_0)-i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad \text{故} \quad \begin{cases} g_0(x_0,y_0)=0 \\ g_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

② 当 $g_0(x_0,y)$ 是 y 的奇函数， $g_1(x_0,y)$ 是 y 的偶函数时，有

$$\begin{cases} i^{n-K}g_0(x_0,y_0)+i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=0 \\ -i^{n-K}g_0(x_0,y_0)+i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=0 \end{cases} \quad \text{故} \quad \begin{cases} g_0(x_0,y_0)=0 \\ g_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

因此，无论是①还是②， y_0 都是 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 的解，由 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 的奇偶性可知，$-y_0$ 也是 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 的解， $y_0 \neq 0$，因此 y_0， $-y_0$ 是 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 的一对复数解(该结论与定理 8 一致，但 $g(z)$ 是复系数多项式)，于是

$$\left(y^2-y_0^2\right) | \, g_0(x_0,y) \text{且} \left(y^2-y_0^2\right) | \, g_1(x_0,y)$$

$g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 非互素，矛盾。故 $g(z)=0$ 没有以 x_0 为中点的成对根。

2) 由 1)，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 不能同时整除 $g(z)$。 $z = x_0 + iy$， $z - z_1 = i(y - y_0)$，$z - z_2 = i(y + y_0)$，由 $g(z)=g(x_0+iy)$ 的整除性质，则 $(y - y_0)$ 和 $(y + y_0)$ 不能同时整除 $g(x_0+iy)$。】

下面继续定理 8 的推论

推论 3 设 n 为正整数， $g(z)$ 为复系数 n 次多项式， $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，

$$g(z)=g(x_0+iy)=i^n\left[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)\right]$$

其中 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，且

$g_0(x_0,y)$，$g_1(x_0,y)$关于 y 非互素，即$(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))\neq 1$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：y_0，$-y_0$ 是$\begin{cases}g_1(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$的一对复数解。

证明 若 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的一对复根，则 1) $y_0=0$ 时，$z_1=x_0$，$z_2=x_0$ 是 $g(z)=0$ 的一对复根，则 x_0 是 $g(z)=0$ 的 2 重以上根，即 $y^2\mid g(x_0+iy)$，由定理 6 推论 6，则 $y^2\mid g_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid g_1(x_0,y)$，故 0，0 是$\begin{cases}g_1(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$的一对实数解，命题成立。

2) $y_0\neq 0$ 时，参照点 x_0 的 $g(z)$ 性质 2。1)的证明，可证得 y_0，$-y_0$ 是$\begin{cases}g_0(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$的一对复数解。

反过来，若 y_0，$-y_0$ 是$\begin{cases}g_1(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$的一对复数解，则由

$$g(z)=g(x_0+iy)=i^n[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$$

可知 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 都是 $g(z)=0$ 的根，特别当 $y_0=0$ 时，根据一对复数解的定义，$y^2\mid g_0(x_0,y)$ 且 $y^2\mid g_1(x_0,y)$，由定理 6 推论 6，则 $y^2\mid g(x_0+iy)$，即 x_0 是 $g(z)=0$ 的 2 重以上根，因此 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的一对复根。】

该推论在第四章的相关性质证明中要用到。

定义 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 y_0，$-y_0$ 都是 $d(x_0,y)=0$ 的根，特别当 $y_0=0$ 时，0 是 $d(x_0,y)=0$ 的 2 重以上根，即 $y^2\mid d(x_0,y)$，则称 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对(复)根。

定义解析：1) 当 $y_0\neq 0$ 时，若 y_0，$-y_0$ 都是 $d(x_0,y)=0$ 的根，就可称 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对非零(复)根。2) 当 $y_0=0$ 时，若 0，0 都是 $d(x_0,y)=0$ 的根，则要求 0 是 $d(x_0,y)=0$ 的 2 重以上根，即 $y^2\mid d(x_0,y)$，才能称 0，0 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对零实根。

$d(x_0,y)=0$ 一对复根的**性质** 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对复根的充要条件是：$(y^2-y_0^2)\mid d(x_0,y)$。

它的证明方法与$(2)^{x_0}$一对复数解的性质相同。

引理 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 y_0，$-y_0$ 是$(2)^{x_0}$的一对复数解的充要条件：y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对复根。

证明 $d(x_0,y)$是 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$关于 y 的最大公因式，因此$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_0(x_0,y)$且$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_1(x_0,y)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\ d(x_0,y)$。于是命题成立。】

定理 9 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是： y_0， $-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对复根。

证明 由引理和定理 8 即得。】

它表明 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f(x_0+iy)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\ d(x_0,y)$。

推论 1 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$； $\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的两对不相同的复根的充要条件是：y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对复根；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$ 是 $d\left(\overline{x_0},y\right)=0$ 的一对复根。

证明 由定理 9 即得。】

它表明 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f(x_0+iy)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\ f\left(\overline{x_0}+iy\right)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\ d(x_0,y)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\ d\left(\overline{x_0},y\right)$。

推论 2 设$a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是： y_0， $-y_0$； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 两对不相同的复根。

证明 根据定理 9 即得。】

例 15 设$a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 y_0， $-y_0$； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的两对不相同的复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\ d(a,y)$。

证明 由 $x_0 = a \in R$，$y_0^2 \notin R$，$\overline{y_0^2} \neq y_0^2$，$\left(\left(y^2-y_0^2\right),\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\right)=1$，根据 $d(x_0,y)=0$ 一对根的性质即得。】

推论 2 表明 设$a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\ f(a+iy) \text{ 的充要条件是：} \left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\ d(a,y)。$$

定义 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的根，特别当 $y_0 = 0$ 时， x_0 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的 2 重以上根，即$(z-x_0)^2\ |\ F_d(x_0,z-x_0)$，则称

$z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z - x_0) = 0$ (在 z 平面上)的一对(复)根。

理解该定义可参照 $f(z)=0$ 一对复根定义，这里不再赘述。

$F_d(x_0, z - x_0) = 0$ 一对复根的**性质** 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z - x_0) = 0$ 的一对复根的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) | F_d(x_0, iy)$。

它的证明方法与 $f(z)=0$ 一对复根的性质相同。

引理 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 y_0， $-y_0$ 是 $d(x_0, y) = 0$ 的一对复根的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z - x_0) = 0$ 的一对复根。

证明 由 $F_d(x_0, iy) = i^K d(x_0, y)$，则 $(y^2 - y_0^2) | d(x_0, y)$ 的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) | F_d(x_0, iy)$。于是命题成立。】

定理 10 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$， $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的一对复根的充要条件是： $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z - x_0) = 0$ 的一对复根。

证明 由引理和定理 9 即得。】

它表明 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $(y^2 - y_0^2) | f(x_0 + iy)$ 的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) | F_d(x_0, iy)$。

推论 1 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$； $\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ 的两对不相同的复根的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z - x_0) = 0$ 的一对复根；$\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $F_d(\overline{x_0}, z - \overline{x_0}) = 0$ 的一对复根。

证明 由定理 10 即得。】

推论 1 表明 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则 $(y^2 - y_0^2) | f(x_0 + iy)$，$\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) | f(\overline{x_0} + iy)$ 的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) | F_d(x_0, iy)$， $\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) | F_d(\overline{x_0}, iy)$。

推论 2 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ 两对不相同的复根的充要条件是： $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_a(a, z - a) = 0$ 两对不相同的复根。

证明 根据定理 10 即得。】

例 16 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_a(a, z - a) = 0$ 两对不相同的复根的充要条件是： $(y^2 - y_0^2)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) | F_d(a, iy)$。

证明 方法与例 13 相同。】

推论 2 表明 设$a\in R$， $y_0^2\notin R$，则

$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f\left(a+iy\right)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid F_d\left(a,iy\right)$。

§6 最大公因式方程(二)根的性质及相关定理

$F_d\left(x_0, z-x_0\right)$是$F_0\left(x_0, z-x_0\right)$, $F_1\left(x_0, z-x_0\right)$关于$\left(z-x_0\right)$的最大公因式，它为$\left(z-x_0\right)$的偶或奇函数，又是关于$x_0$，$\left(z-x_0\right)$的实系数二元多项式，当$x_0 \in C$时，$F_d\left(x_0, z-x_0\right)$是$\left(z-x_0\right)$的复系数多项式，也是$z$的复系数多项式；当$x_0=a \in R$时，$F_d(a, z-a)$是$(z-a)$的实系数多项式，也是$z$的实系数多项式。

定理 11 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l为非负整数，则 1) y_0是$d\left(x_0, y\right)=0$的根的充要条件是：$z_0=x_0+i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$在$z$平面上的根；2) y_0是$d\left(x_0, y\right)=0$的l重根的充要条件是：$z_0=x_0+i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$在$z$平面上的$l$重根。

证明 由题设和$F_d\left(x_0, i y\right)=i^K d\left(x_0, y\right)$，则 1) $\left(y-y_0\right) \mid d\left(x_0, y\right)$的充要条件是：$\left(y-y_0\right) \mid F_d\left(x_0, i y\right)$。故命题成立。2) $\left(y-y_0\right)^l \mid d\left(x_0, y\right)$，但$\left(y-y_0\right)^{l+1}$不能整除$d\left(x_0, y\right)$的充要条件是：$\left(y-y_0\right)^l \mid F_d\left(x_0, i y\right)$，但$\left(y-y_0\right)^{l+1}$不能整除$F_d\left(x_0, i y\right)$。故命题成立。】

$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$根的**性质**

性质 1 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若$z_1=x_0+i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$的根，则$z_2=x_0-i y_0$也是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$的根。

证明 若$z_1=x_0+i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$的根，则$F_d\left(x_0, z_1-x_0\right)=F_d\left(x_0, i y_0\right)=0$。于是当$F_d\left(x_0, z-x_0\right)$为$\left(z-x_0\right)$的偶函数时，$F_d\left(x_0, z_2-x_0\right)=F_d\left(x_0,-i y_0\right)=F_d\left(x_0, i y_0\right)=0$；当$F_d\left(x_0, z-x_0\right)$为$\left(z-x_0\right)$的奇函数时，$F_d\left(x_0, z_2-x_0\right)=F_d\left(x_0,-i y_0\right)=-F_d\left(x_0, i y_0\right)=0$。

因此，$z_2=x_0-i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$的根。】

推论 1 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则$z_1=x_0+i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$的根的充要条件是：$z_2=x_0-i y_0$是$F_d\left(x_0, z-x_0\right)=0$的根。

证明 由于$z_2=x_0+i\left(-y_0\right)$，$z_1=x_0-i\left(-y_0\right)$，充分性也由性质 1 即得。】

推论 2 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_1=x_0+i y_0$，$z_2=x_0-i y_0$，则

$\left(z-z_1\right) \mid F_d\left(x_0, z-x_0\right)$的充要条件是：$\left(z-z_2\right) \mid F_d\left(x_0, z-x_0\right)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l为非负整数，$z_1=x_0+i y_0$，$z_2=x_0-i y_0$，则

$\left(z-z_1\right)^l \mid F_d\left(x_0, z-x_0\right)$的充要条件是：$\left(z-z_2\right)^l \mid F_d\left(x_0, z-x_0\right)$。

证明 证必要性。若$\left(z-z_1\right)^l \mid F_d\left(x_0, z-x_0\right)$，令$z=x_0+i y$，则$\left(z-z_1\right)=i\left(y-y_0\right)$，由

$F_d(x_0, z - x_0) = F_d(x_0, iy)$的整除性质，则$(y - y_0)^l \mid F_d(x_0, iy)$。由$F_d(x_0, iy) = i^K d(x_0, y)$可得$(y - y_0)^l \mid d(x_0, y)$。由$d(x_0, y) = 0$根的性质 1 推论 3，则$(y + y_0)^l \mid d(x_0, y)$。再由$F_d(x_0, iy) = i^K d(x_0, y)$可得$(y + y_0)^l \mid F_d(x_0, iy)$。又$(z - z_2) = i(y + y_0)$，由$F_d(x_0, z - x_0) = F_d(x_0, iy)$的整除性质，则$(z - z_2)^l \mid F_d(x_0, z - x_0)$。充分性同理可证。】

推论 4 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l为非负整数，则$z_1 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的l重根的充要条件是：$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的l重根。

证明 根据推论 3 即得。】

设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，l为非负整数，若$z_1 = x_0 + iy_0$和$z_2 = x_0 - iy_0$都是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的l重根，则称$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$ (在z平面上)的一对l重(复)根，其中 1) 当$x_0 = a \in R$，$y_0 \in R$时，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面直线$x = a$上的一对l重共轭根；2) 当$x_0 = a \in R$，y_0为纯虚数时，称$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面实轴上的一对l重实根。

推论 5 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，l为非负整数，则$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的一对l重根的充要条件是：$(y^2 - y_0^2)^l \mid F_d(x_0, iy)$，但$(y^2 - y_0^2)^{l+1}$不能整除$F_d(x_0, iy)$。

证明 由$F_d(x_0, iy) = i^K d(x_0, y)$，则$(y^2 - y_0^2)^l \mid d(x_0, y)$，但$(y^2 - y_0^2)^{l+1}$不能整除$d(x_0, y)$的充要条件是：$(y^2 - y_0^2)^l \mid F_d(x_0, iy)$，但$(y^2 - y_0^2)^{l+1}$不能整除$F_d(x_0, iy)$。

根据定理 11，则$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的一对l重根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$d(x_0, y) = 0$的一对l重根。再由$d(x_0, y) = 0$根的性质 1 推论 5 即得。】

性质 2 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_2 = x_0 - iy_0$，若$z_1 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的根，则$\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$是$F_d(\overline{x_0}, z - \overline{x_0}) = 0$的根。

证明 若$z_1 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的根，则$F_d(x_0, z_1 - x_0) = 0$。于是

$$i^K d(x_0, y_0) = F_d(x_0, iy_0) = F_d(x_0, z_1 - x_0) = 0$$

y_0是$d(x_0, y) = 0$的根，由$d(x_0, y) = 0$根的性质 2 则$\overline{y_0}$是$d(\overline{x_0}, y) = 0$的根，即$d(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = 0$。又$\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$，$F_d(\overline{x_0}, \overline{z_2} - \overline{x_0}) = F_d(\overline{x_0}, i\overline{y_0}) = i^K d(\overline{x_0}, \overline{y_0}) = 0$，故$\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$是$F_d(\overline{x_0}, z - \overline{x_0}) = 0$的根。】

例 17 设$a \in R$，$y_0 \in C$，若$z_1 = a + iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$的根，根据性质 1 和 2，则

$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 也都是 $F_d(a,z-a)=0$ 的根。

推论 1 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_2=x_0-iy_0$，则 $z_1=x_0+iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(\overline{x_0},z-\overline{x_0})=0$ 的根。

证明 $\left(\overline{\overline{x_0}}\right)+i\left(\overline{\overline{y_0}}\right)=x_0+iy_0=z_1$，$F_d\left(\left(\overline{\overline{x_0}}\right),z-\left(\overline{\overline{x_0}}\right)\right)=F_d(x_0,z-x_0)$，充分性由性质 2 即得。】

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，则

$$(z-z_1)\mid F_d(x_0,z-x_0)\text{ 的充要条件是：}\left(z-\overline{z_2}\right)\mid F_d\left(\overline{x_0},z-\overline{x_0}\right)\text{。}$$

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)^l\mid F_d(a,z-a)\text{ 的充要条件是：}\left(z-\overline{z_2}\right)^l\mid F_d(a,z-a)\text{。}$$

证明 若 $(z-z_1)^l\mid F_d(a,z-a)$，令 $z=a+iy$，则 $(z-z_1)=i(y-y_0)$，由 $F_d(a,z-a)=F_d(a,iy)$ 的整除性质则 $(y-y_0)^l\mid F_d(a,iy)$。由 $F_d(a,iy)=i^K d(a,y)$ 可得 $(y-y_0)^l\mid d(a,y)$。由 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 2 推论 3 则 $\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid d(a,y)$。再由 $F_d(a,iy)=i^K d(a,y)$ 可得 $\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid F_d(a,iy)$。$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\left(z-\overline{z_2}\right)=i\left(y-\overline{y_0}\right)$，由 $F_d(a,z-a)=F_d(a,iy)$ 的整除性质，则 $\left(z-\overline{z_2}\right)^l\mid F_d(a,z-a)$。充分性同理可证。】

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z_2=a-iy_0$，则 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 l 重根。

证明 根据推论 3 即得。】

例 18 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 l 重根，则 $z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 也都是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 l 重根。

定理 12 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 y_0，$-y_0$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 在 z 平面上的一对 l 重根。

证明 由定理 11 即得。】

当 $a\in R$ 时，$d(a,y)$ 是 y 的实系数多项式。

推论 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 y_0，$-y_0$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 在 z 平面上的一对 l 重根。

证明 在定理 12 中令 $x_0 = a \in R$ 即得。】

推论 2 设 $a \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，则 y_0，$-y_0$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重实根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根。

证明 在推论 1 中令 $y_0 \in R$ 即得。】

推论 3 设 $a \in R$，y_0 为纯虚数，l 为非负整数，则 y_0，$-y_0$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重纯虚数根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 在 z 平面实轴上的一对 l 重实根。

证明 在推论 1 中令 y_0 为纯虚数即得。】

推论 4 设 $a \in R$，$y_0^2 \notin R$，l 为非负整数，则 y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 两对不相同的 l 重根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$；$\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$，$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 两对不相同的 l 重根。

证明 由题意根据推论 1 即得。】

推论 4 表明 设 $a \in R$，$y_0^2 \notin R$，l 为非负整数，则 $\left(y^2 - y_0^2\right)^l \left(y^2 - \overline{y_0^2}\right)^l \mid d(a,y)$，但 $\left(y^2 - y_0^2\right)^{l+1} \left(y^2 - \overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $d(a,y)$ 的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right)^l \left(y^2 - \overline{y_0^2}\right)^l \mid F_d(a,iy)$，但 $\left(y^2 - y_0^2\right)^{l+1} \left(y^2 - \overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $F_d(a,iy)$。

定理 13 设 $x_0 \in C$，$f(z) = g(z) F_d(x_0, z - x_0)$，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l_1, l_2 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，$(z - z_1) \mid g(z)$，但 $(z - z_2)$ 不能整除 $g(z)$；2) $l_1 < l_2$ 时，$(z - z_2) \mid g(z)$，但 $(z - z_1)$ 不能整除 $g(z)$；3) $l_1 = l_2$ 时，$(z - z_1)$ 和 $(z - z_2)$ 都不能整除 $g(z)$。

证明 由题设则 $(z - z_1)^{l_1} \mid f(z)$，但 $(z - z_1)^{l_1 + 1}$ 不能整除 $f(z)$；$(z - z_2)^{l_2} \mid f(z)$，但 $(z - z_2)^{l_2 + 1}$ 不能整除 $f(z)$；由点 x_0 的 $g(z)$ 性质 2，则 $(z - z_1)$ 和 $(z - z_2)$ 不能同时整除 $g(z)$，于是

1) $l_1 > l_2$ 时，$(z - z_1) \mid g(z)$，但 $(z - z_2)$ 不能整除 $g(z)$。否则，假如 $(z - z_1)$ 不能整除 $g(z)$，则 $\left((z - z_1)^{l_1}, g(z)\right) = 1$，$(z - z_1)^{l_1} \mid F_d(x_0, z - x_0)$，由 $F_d(x_0, z - x_0) = 0$ 根的性质 1 推论 3，则

$(z-z_2)^{l_1} \mid F_d(x_0, z-x_0)$，又 $l_1 \ge l_2+1$，故 $(z-z_2)^{l_2+1} \mid F_d(x_0, z-x_0)$，$(z-z_2)^{l_2+1} \mid f(z)$，矛盾。

2) $l_1 < l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1 = l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g(z)$。否则① 假如 $(z-z_1) \mid g(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g(z)$，则 $((z-z_2)^{l_2}, g(z))=1$，$(z-z_2)^{l_2} \mid F_d(x_0, z-x_0)$，由 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 根的性质 1 推论 3，则 $(z-z_1)^{l_2} \mid F_d(x_0, z-x_0)$，于是 $(z-z_1)^{l_1} \mid F_d(x_0, z-x_0)$。再由 $(z-z_1) \mid g(z)$，则 $(z-z_1)^{l_1+1} \mid f(z)$，矛盾。② 假如 $(z-z_2) \mid g(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g(z)$，则与①同理可得 $(z-z_2)^{l_2+1} \mid f(z)$，矛盾。】

推论 设 $x_0 \in C$，K 为正整数，$f(x_0+iy)=g(x_0+iy)[i^K d(x_0, y)]$，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \ne 0$，l_1, l_2 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，$(y-y_0) \mid g(x_0+iy)$，但 $(y+y_0)$ 不能整除 $g(x_0+iy)$；2) $l_1 < l_2$ 时，$(y+y_0) \mid g(x_0+iy)$，但 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(x_0+iy)$；3) $l_1 = l_2$ 时，$(y-y_0)$ 和 $(y+y_0)$ 都不能整除 $g(x_0+iy)$。

证明 令 $z = x_0 + iy$，$F_d(x_0, iy)=i^K d(x_0, y)$，则 $f(z)=g(z)F_d(x_0, z-x_0)$。$(z-z_1)=i(y-y_0)$，$(z-z_2)=i(y+y_0)$，由 $g(z)=g(x_0+iy)$ 的整除性质，则 $(z-z_1) \mid g(z)$ 的充要条件是：$(y-y_0) \mid g(x_0+iy)$；$(z-z_2) \mid g(z)$ 的充要条件是：$(y+y_0) \mid g(x_0+iy)$。再由定理 13 即得。】

定理 14 设 $x_0 \in C$，$(2)^{x_0}$ 有解，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \ne 0$，l_1, l_2 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的一对 l_2 重根，$z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 $l_1 - l_2$ 重根；2) $l_1 < l_2$ 时，$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的一对 l_1 重根，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 $l_2 - l_1$ 重根：3) $l_1 = l_2$ 时，记 $l_1 = l_2 = l$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的一对 l 重根，$z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

证明 $(2)^{x_0}$ 有解，则 $f(z)=g(z)F_d(x_0, z-x_0)$。再根据定理 13，那么

1) $l_1 > l_2$ 时，$(z-z_1) \mid g(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g(z)$，则 z_2 不是 $g(z)=0$ 的根，因此 $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的 l_2 重根，由 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 根的性质 1 推论 4，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的一对 l_2 重根。$z_1 = x_0 + iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，$F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的 l_2 重根，于是 $z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 $l_1 - l_2$ 重根。

2) $l_1 < l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1 = l_2$时，$(z - z_1)$和$(z - z_2)$都不能整除$g(z)$，则z_1和z_2都不是$g(z) = 0$的根。又$l_1 = l_2 = l$，所以$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的一对l重根。】

推论 1 设$x_0 \in C$，$(2)^{x_0}$有解，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，l_1, l_2, l均为非负整数，若$z_1 = x_0 + iy_0$和$z_2 = x_0 - iy_0$分别是$f(z) = 0$的l_1重和l_2重根，则$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的一对l重根的充要条件是：$l = \min(l_1, l_2)$。

证明 由定理 14，则$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的一对l重根$\Leftrightarrow$ $l_1 > l_2$时，$l = l_2$；$l_1 < l_2$时，$l = l_1$；$l_1 = l_2$时，$l = l_1 = l_2$ $\Leftrightarrow$ $l = \min(l_1, l_2)$。】

推论 2 设$a \in R$，$(2)^a$有解，$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$，l为非负整数，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z) = 0$在z平面直线$x = a$上的一对l重共轭根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面直线$x = a$上的一对l重共轭根。

证明 由题设，不妨设$z_1 = a + iy_0$和$z_2 = a - iy_0$分别是$f(z) = 0$的l_1重和l_2重根，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$互为共轭复数，由$f(z) = 0$根的性质推论 4，则$l_1 = l_2$，于是

若$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z) = 0$在z平面直线$x = a$上的一对l重共轭根，则$l_1 = l_2 = l$，由定理 14，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面直线$x = a$上的一对l重共轭根。

反过来，若$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面直线$x = a$上的一对l重共轭根，由推论 1，则$l = \min(l_1, l_2) = l_1 = l_2$，所以$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z) = 0$在$z$平面直线$x = a$上的一对$l$重共轭根。】

推论 3 设$x_0 \in C$，$(2)^{x_0}$有解，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，l_1, l_2均为非负整数，若$z_1 = x_0 + iy_0$和$z_2 = x_0 - iy_0$分别是$f(z) = 0$的l_1重和l_2重根，则 1) $l_1 > l_2$时，y_0，$-y_0$是$d(x_0, y) = 0$的一对l_2重根，$z_1 = x_0 + iy_0$是$g(z) = 0$的$l_1 - l_2$重根；2) $l_1 < l_2$时，y_0，$-y_0$是$d(x_0, y) = 0$的一对l_1重根，$z_2 = x_0 - iy_0$是$g(z) = 0$的$l_2 - l_1$重根；3) $l_1 = l_2$时，记$l_1 = l_2 = l$，则y_0，$-y_0$是$d(x_0, y) = 0$的一对l重根，$z_1 = x_0 + iy_0$和$z_2 = x_0 - iy_0$都不是$g(z) = 0$的根。

证明 由定理 14 和定理 12 即得。】

推论 4 设$x_0 \in C$，$(2)^{x_0}$有解，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，l_1, l_2, l均为非负整数，若$z_1 = x_0 + iy_0$和$z_2 = x_0 - iy_0$分别是$f(z) = 0$的l_1重和l_2重根，则y_0，$-y_0$是$d(x_0, y) = 0$的一对l重根的充要条件是：$l = \min(l_1, l_2)$。

证明 由推论 1 和定理 12 即得。】

推论 5 设 $a\in R$，$(2)^a$ 有解，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：y_0，$-y_0$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重实根。

证明 由推论 2 和定理 12 推论 2 即得。】

§7 方程组的解与结式方程的根

将 $f_0(x,y), f_1(x,y)$ 关于 y 的结式，记为 $res(f_0, f_1, y)=Q(x)$，则

$$Q(x)=\begin{vmatrix}
\frac{f^{(n)}(x)}{n!} & 0 & -\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & 0 & \frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots\cdots & & & \\
 & \frac{f^{(n)}(x)}{n!} & 0 & -\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & 0 & \frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots\cdots & & \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\
 & & & \frac{f^{(n)}(x)}{n!} & 0 & -\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & 0 & \frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots \\
\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & 0 & -\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & 0 & \frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!} & \cdots\cdots & & & \\
 & \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & 0 & -\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & 0 & \frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!} & \cdots\cdots & & \\
 & & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & & \\
 & & & \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & 0 & -\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & 0 & \frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!} & \cdots
\end{vmatrix}
\begin{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}\frac{a}{b}\\ \frac{a}{b}\\ a\\ \frac{a}{b}\end{matrix}}\right\}n-1\\ \left.\vphantom{\begin{matrix}\frac{a}{b}\\ \frac{a}{b}\\ a\\ \frac{a}{b}\end{matrix}}\right\}n\end{matrix}$$

这是一个 $2n-1$ 阶行列式，展开后是 x 的实系数多项式，次数为 n^2，可设

$$Q(x)=A_0x^{n^2}+A_1x^{n^2-1}+\cdots+A_{n^2-1}x+A_{n^2}$$

其中 $A_0\neq 0$，$A_0, A_1, \cdots, A_{n^2}$ 均为实数。将 $Q(x)$ 看作函数，通过行列式计算 $Q(x)$ 对 n^2+1 个不同数的函数值，解线性方程组可求得 $A_0, A_1, \cdots, A_{n^2}$ 的具体数值。

特别当 $n=1$ 时，$Q(x)=|f(x)|=f(x)$。

定理[5] 如果 (x_0, y_0) 是方程组(2)的一个复数解，那么 x_0 就是 $Q(x)=0$ 的一个根；反过来，如果 x_0 是 $Q(x)=0$ 的一个复根，那么 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}=0$，或者存在一个复数 y_0，使 (x_0, y_0) 是方程组(2)的一个解。

$Q(x)$ 代表结式，故称 $Q(x)=0$ 为结式方程。由于 $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=a_0\neq 0$，定理可改写成

定理 15 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根；反之，若 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解。

推论 1 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根；反之，若 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

证明 由定理 15 和定理 1 即得。】

推论 2 设 $x_0 \in C$，则 $(2)^{x_0}$ 有解的充要条件是：$Q(x_0)=0$。

证明 由推论 1 即得。】

设 $x_0 \in C$，若 $Q(x_0)=0$，根据推论 2 则 $(2)^{x_0}$ 有解，$f(z)$ 就能在 z 平面上的点 x_0 分解成两个 z 的复系数多项式 $g(z)$ 与 $F_d(x_0, z-x_0)$ 的乘积，即 $f(z)=g(z)F_d(x_0, z-x_0)$。

推论 3 方程 $f(z)=0$ 的任意一个根均为方程 $Q(x)=0$ 的根。

证明 假设 z_0 是 $f(z)=0$ 的任意一个根，由定理 6，则 $(z_0,0)$ 是方程组(2)的解，再由定理 15，则 z_0 是 $Q(x)=0$ 的根。】

定理 16 设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的所有复根，$z_j = x_{jh}+iy_{jh}$，$z_h = x_{jh}-iy_{jh}$ ($1 \le j < h, h=2,3,\cdots,n$)是 $f(z)=0$ 的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对复根，则 $(z_j,0)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组(2)的 n 个复数解；(x_{jh}, y_{jh})，$(x_{jh}, -y_{jh})$ $(1 \le j < h, h=2,3,\cdots,n)$ 是(2)的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对复数解；$x=z_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$，$x=x_{jh}$ $(1 \le j < h, h=2,3,\cdots,n)$ 都是 $Q(x)=0$ 的根，于是 $(x-z_j)$ 是 $Q(x)$ 的一次因式，$(x-x_{jh})$ 是 $Q(x)$ 的二次因式，而且

$$Q(x)=A_0\left[\prod_{j=1}^{n}(x-z_j)\right]\left[\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-x_{jh})\right]^2 \quad (\text{其中 } A_0 \in R \text{ 且 } A_0 \ne 0)$$

方程组(2)有 n^2 个解，$Q(x)=0$ 有 n^2 个根，(2)的一个解对应 $Q(x)=0$ 的一个根。

证明 根据定理 6 和定理 7 以及定理 15 即得，必须说明的是

1. 在 $f(z)=0$ 没有重根，其 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对复根的中点没有重合，并且根与每对复根的中点也不重合的情况下，$x=z_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 都是 $Q(x)=0$ 的单根(即 $(x-z_j)$ 是 $Q(x)$ 的 1 重因式)；$x=x_{jh}$ $(1 \le j < h, h=2,3,\cdots,n)$ 都是 $Q(x)=0$ 的 2 重根(即 $(x-x_{jh})$ 是 $Q(x)$ 的 2 重因式)。这些根的个数(包括重数)总和等于 $n+2C_n^2 = n+n(n-1)=n^2$，恰好等于 $Q(x)=0$ 的次数，因而这 n^2 个根就是 $Q(x)=0$ 的所有复根。于是有

$$Q(x)=A_0\left[\prod_{j=1}^{n}(x-z_j)\right]\left[\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-x_{jh})\right]^2 \quad (\text{其中 } A_0 \in R \text{ 且 } A_0 \ne 0)$$

方程组(2)有 n^2 个各不相同的复数解，$Q(x)=0$ 有 n^2 个根，可以说(2)的一个解对应

$Q(x)=0$ 的一个根。

2. 在 $f(z)=0$ 有重根或中点有重合或根与中点有重合的情况下，它依然有 n 个复根(含重根)，有 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对复根，中点也依然是 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个(只是有重合而已)，方程组(2)复数解的个数也还是 n^2 个(其中会有相同的解)，$Q(x)=0$ 也依然有 n^2 个根。这时只需换一种更普通的表述方式，说 $(x-z_j)$ 是 $Q(x)$ 的一次因式 $(j=1,2,\cdots,n)$，$(x-x_{jh})$ 是 $Q(x)$ 的二次因式 $(1\le j<h,h=2,3,\cdots,n)$。这些因式的次数之和为 $n+2C_n^2=n^2$，恰好等于 $Q(x)$ 的次数，因而它们就是 $Q(x)$ 的全部因式。于是有

$$Q(x)=A_0\left[\prod_{j=1}^{n}(x-z_j)\right]\left[\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-x_{jh})\right]^2 \quad (\text{其中 } A_0\in R \text{ 且 } A_0\neq 0)】$$

本篇第六章由行列式运算得到的方程间多项式关系式 $Q(x)=\pm f(x)M^2(x)$，可以验证定理 16。式中 $f(z)$ 的次数 $n\ge 2$，$f(z)=0$ 所有成对复根的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个中点就是 $M(x)=0$ 的所有复根。假设 $f(z)=0$ 的某一对复根的中点为 x_{jh}，则 $(x-x_{jh})$ 既是 $M(x)$ 的一次因式，又是 $Q(x)$ 的二次因式。由定理 16 可知，结式方程 $Q(x)=0$ 是以 $f(z)=0$ 的所有复根以及所有成对复根的中点为根的方程。

定义 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，若 (x_0,y_0) 是方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的 l 重元素，则称 (x_0,y_0) 是(2)的 l 重(复数)解。

(x_0,y_0) 是(2)的 l 重解的充要条件是：(x_0,y_0) 是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的 l 重元素。(x_0,y_0) 是(2)的 0 重解的充要条件是：(x_0,y_0) 不是(2)的解。

对 n 次方程 $f(z)=0$，由定理 16，方程组(2)有 n^2 个解，$Q(x)=0$ 有 n^2 个根，(2)的一个解对应 $Q(x)=0$ 的一个根。若 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，则(2)恰好有 L 个解与此相对应，这 L 个解可写成

$$(x_0,y_j),\quad j=1,2,\cdots,L\ 。$$

这 L 个解就是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解。

由(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 可写成

$$\{(x,y)\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

其中 $x=x_0$ 的全部解(含相同解)组成的集合可写成

$$\left\{(x_0,y) \mid \begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} (x\in C, y\in C)\ (2)\right\}$$

因此，说 (x_0,y_j)（$j=1,2,\cdots,L$）是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解，就意味着

$$\{(x_0,y_j) \mid j=1,2,\cdots,L\}=\left\{(x_0,y) \mid \begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} (x\in C, y\in C)\ (2)\right\}。$$

写成推论则有

推论 1 设 $x_0\in C$，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根的充要条件是：$\exists\ y_j\in C$，$j=1,2,\cdots,L$，使得 (x_0,y_j)（$j=1,2,\cdots,L$）是方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解(含相同解)，即

$$\{(x_0,y_j) \mid j=1,2,\cdots,L\}=\left\{(x_0,y) \mid \begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} (x\in C, y\in C)\ (2)\right\}$$

推论 1 可简述成：设 $x_0\in C$，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根的充要条件是：(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L。

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，l 为非负整数，$z_0=x_0$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的 l 重根，$z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$（$j=1,2,\cdots,s$）是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为中点的所有各不相同的成对非 x_0 根，其中 $z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为中点的成对根共有 $\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2}$ 对，而且

$$L=l+2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2}\right]=l^2+2\sum_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2}$$

其中 $l=n$ 时，$s=0$，$L=n^2$；$l=0$ 时，$L=2\sum\limits_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2}$。

证明 1) 不妨设 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的一个根，由定理 16，则相应的 $(x-x_0)$ 是 $Q(x)$ 的一次因式。$z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，于是相应的 $(x-x_0)$ 是 $Q(x)$ 的 l 次因式。

2) 不妨设 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根(其中 $y_0\in C$)，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为中点的成对根，由定理 16，则相

应的$(x-x_0)$是$Q(x)$的 2 次因式。

$z_0=x_0$是$f(z)=0$的l重根，l个$z_0=x_0$本身可组合成$f(z)=0$在z平面上以x_0为中点的成对x_0根$z_0=x_0$，$z_0=x_0$有$\frac{l(l-1)}{2}$对。

$z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$f(z)=0$在z平面上以x_0为中点的所有各不相同的成对非x_0根，其中$z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$ 分别是$f(z)=0$的l_{j1}重和l_{j2}重根，可组合成$f(z)=0$在z平面上的以x_0为中点的成对非x_0根$z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$有$l_{j1}l_{j2}$对$(j=1,2,\cdots,s)$，于是$f(z)=0$在z平面上的以x_0为中点的成对非x_0根共有$\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$对。

因此，$f(z)=0$在z平面上以x_0为中点的成对根共有$\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$对，于是相应的$(x-x_0)$是$Q(x)$的$2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]$次因式。

综合 1) 2)，则$(x-x_0)$是$Q(x)$的$l+2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]$重因式，又$x_0$是$Q(x)=0$的$L$重根，于是$L=l+2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]=l^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$，故命题成立。】

推论 3 设$z_0\in C$，若$z=z_0$是$f(z)=0$的l重根，则$(z_0,0)$是方程组(2)的l^2重解。

证明 根据定理 16，若$z=z_0$是$f(z)=0$的l重根，则它对应(2)的l个解$(z_0,0)$；这l个$z=z_0$本身可组合成$f(z)=0$的$\frac{l(l-1)}{2}$对复根$z=z_0$，$z=z_0$，它们对应(2)的$\frac{l(l-1)}{2}$对复数解$(z_0,0)$，$(z_0,0)$。于是$(z_0,0)$是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的l^2重元素，因此$(z_0,0)$是(2)的l^2重解。】

推论 4 设$x_0\in C$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，若$z_1=x_0+iy_0$和$z_2=x_0-iy_0$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则它们对应着方程组(2)的$(l_1+l_2)^2$个解，其中$(z_1,0)$和$(z_2,0)$分别是(2)的l_1^2重和l_2^2重解，而(x_0,y_0)和$(x_0,-y_0)$都是(2)的l_1l_2重解。

证明 根据推论 3，则$(z_1,0)$和$(z_2,0)$分别是(2)的l_1^2重和l_2^2重解。

由于$z_1=x_0+iy_0$和$z_2=x_0-iy_0$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，它们可组合成$f(z)=0$的l_1l_2对复根$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，由定理 16，则(2)有l_1l_2对复数解(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$与之相对应，于是(x_0,y_0)和$(x_0,-y_0)$都是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的l_1l_2重元素，因此(x_0,y_0)和$(x_0,-y_0)$都是(2)的l_1l_2重解。

(2) 以上这些解的个数合计为 $l_1^2+l_2^2+2l_1l_2=(l_1+l_2)^2$。】

推论 5 设$x_0\in R$，$y_0\in R$且$y_0\neq 0$，若$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=x_0$上的一对l重共轭根，则它们对应着方程组(2)的$4l^2$个解，其中$(z_1,0)$，$(z_2,0)$，(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$都是(2)的l^2重解。

证明 在推论 4 中令$x_0\in R$，$y_0\in R$且$y_0\neq 0$，$l_1=l_2=l$即得。】

推论 6 n次方程$f(z)=0$复根的实部均为$Q(x)=0$的实根，$Q(x)=0$至少有一个实根。

证明 由于$f(z)=0$的n个复根或为实根，或为成对共轭复根，由定理 16，其实根或共轭复根的实部均为$Q(x)=0$的实根，于是可以说$f(z)=0$复根的实部均为$Q(x)=0$的实根，又$n\geq 1$，因此$Q(x)=0$至少有一个实根。】

要求$f(z)=0$复根的实部，由推论 6 可先求$Q(x)=0$的实根。作以$Q(x),Q'(x)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点x $(x\in R)$的变号数分别记为V_x^Q和U_x^Q。

设$V_{-\infty}^Q-V_{+\infty}^Q=H$，由推论 6，则$H\geq 1$，于是可在$(-\infty,+\infty)$内找到$Q(x)=0$实根的$H$个隔离区间：$[\alpha_1,\beta_1]$，$[\alpha_2,\beta_2]$，$\cdots$，$[\alpha_H,\beta_H]$，其中$\alpha_1<\beta_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\cdots\leq\alpha_H<\beta_H$，且$Q(\alpha_j)\neq 0$，$Q(\beta_j)\neq 0$，$V_{\alpha_j}^Q-V_{\beta_j}^Q=1$，$j=1,2,\cdots,H$。于是$Q(x)=0$的$H$个各不相同的实根就可表示为$x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$（或简写成$x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{Q(\ )}$），$j=1,2,\cdots,H$，其中$x_j$是$Q(x)=0$的$L_j=U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q$重实根。

$Q(x)=0$的实根总数为：$U_{-\infty}^Q-U_{+\infty}^Q=\sum_{j=1}^{H}\left(U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q\right)=\sum_{j=1}^{H}L_j$。

$Q(x)$的实根因式可表示为：$\prod_{j=1}^{H}\left(x-{}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\right)^{\left(U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q\right)}$

若α,β均为有限实数，且$\alpha < x_0 < \beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(x_0)=0$，$Q(\beta)\neq 0$，$V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1$，则$Q(x)=0$在区间$(\alpha,\beta)$内的根$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0, A_1, \cdots, A_{n^2-1}, A_{n^2})}$ (即$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$)，根$x_0$的重数$L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$。

为了方便与二元多项式方程组(2)进行对比，我们也可以将方程组

$$\begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} \qquad (2)^{x_0}$$

视为关于x_0，y的二元多项式方程组。设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若$f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$在$y = y_0$时函数值满足$f_0(x_0, y_0) = 0$且$f_1(x_0, y_0) = 0$，则称(x_0, y_0)是方程组$(2)^{x_0}$的一个(复数)解。

(x_0, y_0)是$(2)^{x_0}$的解的充要条件是：$(y - y_0) \mid f_0(x_0, y)$且$(y - y_0) \mid f_1(x_0, y)$。

再设l为非负整数，若$(y-y_0)^l \mid f_0(x_0, y)$且$(y-y_0)^l \mid f_1(x_0, y)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能同时整除$f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$，则称$(x_0, y_0)$是方程组$(2)^{x_0}$的$l$重(复数)解。统计解的个数，重解按重数计算。设$(2)^{x_0}$复数解(含重解)的个数为$K_{x_0}$，则$K_{x_0} \leq n$。由$(2)^{x_0}$所有复数解(含重解)组成的集合可写成

$$\left\{ (x_0, y) \mid \begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} (y \in C) \ (2)^{x_0} \right\}$$

(x_0, y_0)是$(2)^{x_0}$的l重解的充要条件是：(x_0, y_0)是$(2)^{x_0}$所有复数解组成的解集的l重元素。

定理 17 设$x_0 \in C$，$Q(x_0) = 0$，则$(2)^{x_0}$所有复数解(含重解)组成的集合是方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x, y)\}$中$x = x_0$的全部解(含相同解)组成的集合的子集，即

$$\left\{ (x_0, y) \mid \begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} (y \in C) \ (2)^{x_0} \right\} \subset \left\{ (x_0, y) \mid \begin{cases} f_0(x, y) = 0 \\ f_1(x, y) = 0 \end{cases} (x \in C, y \in C) \ (2) \right\}$$

其中$(f(z), f'(z)) = 1$时，有

$$\left\{ (x_0, y) \mid \begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} (y \in C) \ (2)^{x_0} \right\} = \left\{ (x_0, y) \mid \begin{cases} f_0(x, y) = 0 \\ f_1(x, y) = 0 \end{cases} (x \in C, y \in C) \ (2) \right\}$$

证明 由$x_0 \in C$，$Q(x_0) = 0$，则$(2)^{x_0}$有解。记

$$A=\left\{(x_0,y)\mid\begin{cases}f_0(x_0,y)=0\\f_1(x_0,y)=0\end{cases}(y\in C)\ \ (2)^{x_0}\right\},\quad B=\left\{(x_0,y)\mid\begin{cases}f_0(x,y)=0\\f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

则 A 是由 $(2)^{x_0}$ 所有复数解组成的集合，B 是由(2)所有复数解组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解组成的集合，A 和 B 是两个允许有重元的有限集合。

对 $\forall\ (x_0,y_{j_0})\in A$，$(x_0,y_{j_0})(l)\in A$，则 $l\ge 1$，(x_0,y_{j_0}) 是 $(2)^{x_0}$ 的任意一个解，且 (x_0,y_{j_0}) 是 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解，即 $(y-y_{j_0})^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_{j_0})^l\mid f_1(x_0,y)$，但 $(y-y_{j_0})^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(x_0,y), f_1(x_0,y)$。那么

1)　$y_{j_0}=0$ 时，$(x_0,0)(l)\in A$，$y^l\mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^l\mid f_1(x_0,y)$，但 y^{l+1} 不能同时整除 $f_0(x_0,y)$，$f_1(x_0,y)$，由定理 6 推论 3，则 $y^l\mid f(x_0+iy)$，但 y^{l+1} 不能整除 $f(x_0+iy)$，即 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根。由定理 16 推论 3 则 $(x_0,0)$ 是方程组(2)的 l^2 重解，故 $(x_0,0)$ 是(2)所有复数解组成的集合的 l^2 重元素，从而也是 B 的 l^2 重元素，由 $l\ge 1$，$l^2\ge l$，则 $(x_0,0)$ 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $(x_0,0)(\ge l)\in B$。

2)　$y_{j_0}\ne 0$ 时，$(y-y_{j_0})^l\mid d(x_0,y)$ 但 $(y-y_{j_0})^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0,y)$。由 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 1 推论 3 则 $(y+y_{j_0})^l\mid d(x_0,y)$，但 $(y+y_{j_0})^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0,y)$，故 y_{j_0}，$-y_{j_0}$ 是 $d(x_0,y)=0$ 的一对 l 重根。不妨设 $z_1=x_0+iy_{j_0}$ 和 $z_2=x_0-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由定理 14 推论 4 则 $l=\min(l_1,l_2)$。由定理 16 推论 4，则 (x_0,y_{j_0})，$(x_0,-y_{j_0})$ 都是方程组(2)的 l_1l_2 重解，故 (x_0,y_{j_0}) 是(2)所有复数解组成的集合的 l_1l_2 重元素，从而也是 B 的 l_1l_2 重元素。由 $l=\min(l_1,l_2)$ 且 $l\ge 1$，$l_1l_2\ge l^2\ge l$，则 (x_0,y_{j_0}) 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $(x_0,y_{j_0})(\ge l)\in B$。

总之，由 $\forall\ (x_0,y_{j_0})\in A$，$(x_0,y_{j_0})(l)\in A\Rightarrow (x_0,y_{j_0})(\ge l)\in B$，故 $A\subset B$，即

$$\left\{(x_0,y)\mid\begin{cases}f_0(x_0,y)=0\\f_1(x_0,y)=0\end{cases}(y\in C)\ \ (2)^{x_0}\right\}\subset\left\{(x_0,y)\mid\begin{cases}f_0(x,y)=0\\f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

其中 $(f(z),f'(z))=1$ 时，$f(z)=0$ 的根均为 1 重根(即单根)。我们说，$(2)^{x_0}$ 的解均为 1 重解，即 A 的元素都是 1 重元素。否则，假设存在 $(x_0,y_{j_0})(l)\in A$，$l>1$，那么重复上面论证可知：$y_{j_0}=0$ 时，$z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，其中 $l>1$，矛盾；$y_{j_0}\ne 0$ 时，由于

$l=\min(l_1,l_2)$且$l>1$，则$l_1>1$，$l_2>1$，$z_1=x_0+iy_{j_0}$和$z_2=x_0-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，矛盾。

因此，对$\forall\ (x_0,y_{j_0})\in A$，$(x_0,y_{j_0})(l)\in A$，则$l=1$，重复论证可知：$y_{j_0}=0$时，$l^2=l=1$，于是$(x_0,0)$是$B$的$l$重元素，即$(x_0,0)(l)\in B$；$y_{j_0}\neq 0$时，$l=\min(l_1,l_2)$且$l=1$，$l_1=1$，$l_2=1$，则$l_1l_2=l^2=l=1$，于是$(x_0,y_{j_0})$是$B$的$l$重元素，即$(x_0,y_{j_0})(l)\in B$。总之，由

$$\forall\ (x_0,y_{j_0})\in A,\ (x_0,y_{j_0})(l)\in A\Rightarrow\ (x_0,y_{j_0})(l)\in B。$$

反过来，对$\forall\ (x_0,y_{j_1})\in B$，那么$(x_0,y_{j_1})$是方程组(2)的解，由定理 1，则$y_{j_1}$是$(2)^{x_0}$的解，由新定义即$(x_0,y_{j_1})$是$(2)^{x_0}$的解，于是$(x_0,y_{j_1})\in A$，即由$\forall\ (x_0,y_{j_1})\in B\Rightarrow (x_0,y_{j_1})\in A$。

根据预章定理 1，则$A=B$，即

$$\left\{(x_0,y)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0(x_0,y)=0\\ f_1(x_0,y)=0\end{array}\right.\ (y\in C)\ \ (2)^{x_0}\right\}=\left\{(x_0,y)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}。】$$

定理 18 设$x_0\in C$，$Q(x_0)=0$，$(2)^{x_0}$复数解(含重解)的个数为K_{x_0}，方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的解集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解(含相同解)的个数为L，则$K_{x_0}\le L$，其中$(f(z),f'(z))=1$时，$K_{x_0}=L$。

证明 不妨设A是由$(2)^{x_0}$所有复数解组成的集合，B是由(2)所有复数解组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解组成的集合。由题设，则A的元素个数为K_{x_0}，B的元素个数为L。由定理 17，则$A\subset B$，因此$K_{x_0}\le L$，其中$(f(z),f'(z))=1$时，$A=B$，于是$K_{x_0}=L$。】

显然，二元和一元方程组$(2)^{x_0}$复数解的个数相等，定理 18 中$(2)^{x_0}$的复数解，无论用一元或二元法表示，命题均成立。

例 19 设$a\in R$，若$z=a$是n次方程$f(z)=0$的n重实根，则$(a,0)$是方程组(2)的n^2重实数解，而$f_0(a,y)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}y^n$，$f_1(a,y)\equiv 0$，于是$(a,0)$是$(2)^a$的$n$重实数解(即 0 是$(2)^a$的$n$重实数解)，$(2)^a$复数解的个数$K_a=n$，方程组(2)所有复数解组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=a$的全部解的个数$L=n^2$，显然有$K_a\le L$。

定理 19 设$x_0\in C$，L为正整数，若x_0是$Q(x)=0$的L重根，$(2)^{x_0}$复数解(含重解)

的个数为K_{x_0}，则$K_{x_0} \le L$，其中$\left(f(z), f^{'}(z)\right)=1$时，$K_{x_0} = L$。

证明 由定理 16 推论 1 和定理 18 即得。】

定理 20 设$x_0 \in C$，L为正整数，若$x = x_0$是$Q(x)=0$的L重根，$d(x_0, y)$关于y的次数为K，则$K \le L$，其中$\left(f(z), f^{'}(z)\right)=1$时，$K = L$。

证明 由定理 2 推论 2 和定理 19 即得。】

第三章
施图姆序列之一

§1 恒定元为实数 *a* 的方程组

设多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，其中 $n\geq 1$，$a_0\neq 0$，$a_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$。令 $a\in R$，$z=a+iy$，则由第二章可知

$$f(z)=f(a+iy)=F_0(a,iy)+F_1(a,iy)=i^nf_0(a,y)+i^{n-1}f_1(a,y)=i^n\left[f_0(a,y)-if_1(a,y)\right]$$

其中 $\begin{cases} f_0(a,y)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}y^n-\dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots \\ f_1(a,y)=\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots \end{cases}$

$f_0(a,y)$ 和 $f_1(a,y)$ 是 y 的实系数多项式，为 y 的奇偶函数。于是由关系式

$$f(z)=f(a+iy)=i^n\left[f_0(a,y)-if_1(a,y)\right] \qquad (1)^a$$

可得 y 的实系数一元多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(a,y)=0 \\ f_1(a,y)=0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

其中 a 为恒定元，y 是变元。$\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$，故 $f_0(a,y),f_1(a,y)$ 是两个 y 的系数不全为零的多项式。

定理 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 (a,y_0) 是方程组(2)的解的充要条件是：y_0 是 $(2)^a$ 的解。

证明 在第二章定理 1 中令 $x_0=a\in R$ 即得。】

简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$，称为点 a 的 $f_0(y),f_1(y)$，则方程组 $(2)^a$ 可简写为

$$\begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

实系数多项式 $f_0(y),f_1(y)$ 为奇偶函数。$\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$，故 $f_0(y)$ 是次数为 n 的多项式，但 $f_1(y)$ 却有可能是零多项式，即当它的系数全为零时。关系式 $(1)^a$ 可写成

$$f(z)= f(a+iy)=i^n\left[f_0(y)-if_1(y)\right] \qquad (1)^a$$

设 $a\in R$，$y_0\in C$，若点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$ 在 $y=y_0$ 时函数值满足 $f_0(y_0)=0$ 且 $f_1(y_0)=0$，则 y_0 是方程组 $(2)^a$ 的一个(复数)解。若点 a 的 $f_1(y)\equiv 0$，则点 a 的 $f_0(y)(=0)$ 的根就是 $(2)^a$ 的解。显然，y_0 是 $(2)^a$ 的解的充要条件是：$(y-y_0)|\, f_0(y)$ 且 $(y-y_0)|\, f_1(y)$。

再设 l 为非负整数，若 $(y-y_0)^l \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(y), f_1(y)$，则 y_0 是方程组 $(2)^a$ 的 l 重(复数)解。若点 a 的 $f_1(y)\equiv 0$，则点 a 的 $f_0(y)(=0)$ 的 l 重根就是 $(2)^a$ 的 l 重解。由 $(2)^a$ 所有复数解(含重解)组成的集合是允许有重元的有限集合，可写成

$$\left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} (y\in C) \;\; (2)^a \right\}$$

显然，y_0 是简写前 $(2)^a$ 的解的充要条件是：y_0 是简写后 $(2)^a$ 的解。将 $(2)^a$ 简写不影响定理 1 命题的成立，以下各定理也是如此。

当点 a 的 $f_1(y)\neq 0$ 时，将 $(2)^a$ 所有复数解(含重解)组成的集合记作 $\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)}$，且称它是方程 $f_0(y)=0$ 所有复根组成的集合与方程 $f_1(y)=0$ 所有复根组成的集合的交集。若 $\sqrt{f_1(\;)}=\phi$，则 $\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)}=\phi$。交集 $\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)}$ 的本质特征：设 $y_0\in C$，l, l_0, l_1 均为非负整数，则 $y_0(l)\in\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)} \Leftrightarrow y_0(l_0)\in\sqrt{f_0(\;)}$，$y_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\;)}$，其中 $l=\min(l_0, l_1)$。

当点 a 的 $f_1(y)\equiv 0$ 时，若仍然把 $f_1(y)=0$ 看作方程，则任意复数都是它的根，而且根的重数都是无限次的。在预章由零多项式方程 $f_1(y)=0$ 所有复根组成的集合 $\sqrt{f_1(\;)}$ 称为整式方程的根全集。根全集 $\sqrt{f_1(\;)}$ 是一个允许有重元的无限集合，任意复数都是它的元素，而且元素的重数也都是无限次的。若套用子集定义，则有 $\sqrt{f_0(\;)}\subset\sqrt{f_1(\;)}$。为了统一，这时仍将 $(2)^a$ 所有复数解(含重解)组成的集合记作 $\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)}$，且称它是方程 $f_0(y)=0$ 所有复根组成的集合与零多项式方程 $f_1(y)=0$ 所有复根组成的集合的交集。这时，$(2)^a$ 就转化为 $f_0(y)=0$，故 $\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)}$ 的本质特征是 $\sqrt{f_0(\;)}\cap\sqrt{f_1(\;)}$ $=\sqrt{f_0(\;)}$。

总之，无论点 a 的 $f_1(y)$ 是否是非零多项式，都有

$$\left\{y \mid \begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} (y \in C) \ (2)^a \right\} = \sqrt{f_0(\ )} \cap \sqrt{f_1(\ )}\text{。}$$

y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重解的充要条件是： $y_0(l) \in \sqrt{f_0(\ )} \cap \sqrt{f_1(\ )}$ 。

定理 2 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 a 是 $Q(x)=0$ 的根；反过来，若 a 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 y_0 是 $(2)^a$ 的解。

证明 由定理 1 和第二章定理 15 即得。】

推论 设 $a \in R$，则 $(2)^a$ 有解的充要条件是： $Q(a)=0$ 。

证明 由定理 2 即得。】

引理 设 $a \in R$， $Q(a)=0$， $(2)^a$ 复数解(含重解)的个数为 K_a，方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=a$ 的全部解(含相同解)的个数为 L，则 $K_a \le L$，其中 $(f(z), f'(z))=1$时， $K_a = L$ 。

证明 由第二章定理 18 即得。】

定理 3 设 $a \in R$， L 为正整数，若 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根， $(2)^a$ 复数解(含重解)的个数为 K_a，则 $K_a \le L$，其中 $(f(z), f'(z))=1$时， $K_a = L$ 。

证明 由引理和第二章定理 16 推论 1 即得。】

$(2)^a$ 解的**性质**

性质 1 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 $-y_0$ 也是 $(2)^a$ 的解。

证明 点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$为奇偶函数，因此命题成立。】

推论 1 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 y_0 是 $(2)^a$ 的解的充要条件是： $-y_0$ 是 $(2)^a$ 的解。

证明 由性质 1 即得。】

推论 2 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 $(y-y_0) \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0) \mid f_1(y)$ 的充要条件是：

$$(y+y_0) \mid f_0(y) \text{ 且 } (y+y_0) \mid f_1(y)$$

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $a \in R$， $y_0 \in C$， l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(y)$ 的充要条件是： $(y+y_0)^l \mid f_0(y)$ 且 $(y+y_0)^l \mid f_1(y)$。

证明 在第二章 $(2)^{x_0}$ 解的性质 1 推论 3 中令 $x_0 = a \in R$，简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$， $f_1(a,y)=f_1(y)$即得。】

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重解的充要条件是：$-y_0$ 是 $(2)^a$ 的 l 重解。

证明 根据推论 3 即得。】

推论 5 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 y_0，$-y_0$ 是 $(2)^a$ 的一对 l 重解的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f_0(y)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f_1(y)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(y), f_1(y)$。

证明 在第二章 $(2)^{x_0}$ 解的性质 1 推论 5 中令 $x_0=a\in R$，简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$ 即得。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 $\overline{y_0}$ 也是 $(2)^a$ 的解。

证明 若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 $f_0(y_0)=0$ 且 $f_1(y_0)=0$。点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$ 为实系数多项式，于是 $f_0\left(\overline{y_0}\right)=\overline{f_0(y_0)}=\overline{0}=0$ 且 $f_1\left(\overline{y_0}\right)=\overline{f_1(y_0)}=\overline{0}=0$。故 $\overline{y_0}$ 也是 $(2)^a$ 的解。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0 是 $(2)^a$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的解。

证明 由性质 2 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)\mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)\mid f_1(y)$ 的充要条件是：

$$\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_0(y) \text{ 且 } \left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_1(y)$$

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(y)$ 的充要条件是：$\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_0(y)$ 且 $\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_1(y)$。

证明 在第二章 $(2)^{x_0}$ 解的性质 2 推论 3 中简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$ 即得。】

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重解的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的 l 重解。

证明 根据推论 3 即得。】

例 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 1) 若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 $-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$ 都是 $(2)^a$ 的解；2) 若 y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重解，则 $-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$ 都是 $(2)^a$ 的 l 重解。

定理 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为正整数，若 $(y-y_0)^l \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(y)$，则 $(y-y_0)^l \mid f(a+iy)$，即 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。

证明 在第二章定理 4 中令 $x_0 = a \in R$，简记 $f_0(a,y) = f_0(y)$，$f_1(a,y) = f_1(y)$即得。】

推论 设$a \in R$，l为正整数，若 $y^l \mid f_0(y)$且 $y^l \mid f_1(y)$，则 $y^l \mid f(a+iy)$，即 $z_0 = a$ 是 $f(z) = 0$ 的l重以上(含l重)实根。

证明 在定理 4 中令 $y_0 = 0$ 即得。】

定理 5 设$a \in R$，$y_0 \in C$，若 y_0 是$(2)^a$ 的解，则 $z_0 = a + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的根。

证明 由定理 1 和第二章定理 5 即得。】

推论 设$a \in R$，$y_0 \in C$，若 y_0 是$(2)^a$ 的解，则 $z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$，$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$，$\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$ 都是 $f(z) = 0$ 的根。

证明 由$(2)^a$ 解的性质和定理 5 即得。】

定理 6 设$a \in R$，则 $z_0 = a$ 是 $f(z) = 0$ 的根的充要条件是：0 是$(2)^a$ 的解。

证明 由定理 1 和第二章定理 6 推论 1 即得。】

定理 6 表明 设$a \in R$，则 $y \mid f(a+iy)$的充要条件是：$y \mid f_0(y)$且 $y \mid f_1(y)$。

例 2 设$a \in R$，若 $z_0 = a$ 是 $f(z) = 0$ 的根，由定理 6 和定理 2 推论，则$Q(a) = 0$。

设$a \in R$，$z = a + iy$，简记 $F_0(a,iy) = F_0(iy)$，$F_1(a,iy) = F_1(iy)$，则 $F_0(iy) = i^n f_0(y)$，$F_1(iy) = i^{n-1} f_1(y)$，$f(z) = f(a+iy) = F_0(iy) + F_1(iy) = i^n f_0(y) + i^{n-1} f_1(y)$。

作点a的以 $f_0(y), f_1(y)$为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_m(y)\} \tag{3^a

$(3)^a$ 内均为实系数多项式，其中 $f_j(y) = q_j(y) f_{j+1}(y) - f_{j+2}(y)$，即 $f_{j+2}(y) = -rem(f_j(y), f_{j+1}(y))$，$j = 0,1,2,\cdots,(m-1)$，且 $f_{m+1}(y) \equiv 0$，最后多项式 $f_m(y)$是 $f_j(y), f_{j+1}(y)$的最大公因式。$(3)^a$ 内的函数交替为奇偶函数，$f_m(y)$为偶或奇函数。由于

$$\begin{cases} f_0(y) = f_0(a,y) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} y^n - \dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} y^{n-2} + \dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!} y^{n-4} - \cdots \\ f_1(y) = f_1(a,y) = \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} y^{n-1} - \dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!} y^{n-3} + \dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!} y^{n-5} - \cdots \end{cases}$$

记 $a_{00} = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$，$a_{01} = \dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$，$a_{02} = \dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}$，$\cdots$

$a_{10} = \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$，$a_{11} = \dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}$，$a_{12} = \dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!}$，$\cdots$

其中 $a_{00}=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$，从而将 $(3)^a$ 写成

$$f_0(y)=a_{00}y^n-a_{01}y^{n-2}+a_{02}y^{n-4}-\cdots$$

$$f_1(y)=a_{10}y^{n-1}-a_{11}y^{n-3}+a_{12}y^{n-5}-\cdots$$

…………………………………………

$$f_m(y)=a_{m0}y^K-a_{m1}y^{K-2}+a_{m2}y^{K-4}-\cdots$$

最后的 K 次多项式 $f_m(y)$ 是 $f_0(y), f_1(y)$ 的最大公因式。

点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$ 是两个不全为零的多项式，它们的最大公因式是非零多项式，于是用 $(f_0(y), f_1(y))$ 来表示首项系数是1的那个最大公因式。

若 $(f_0(y), f_1(y))=1$，则称点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$ 互素。

设 $a\in R$，$Q(a)=0$，由定理 2 推论则 $(2)^a$ 有解，根据预章定理 2 推论 2，则 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\geq 1$，$(f_0(y), f_1(y))\neq 1$。可设 $\begin{cases} f_0(y)=g_0(y)f_m(y) \\ f_1(y)=g_1(y)f_m(y) \end{cases}$ (即 $\begin{cases} f_0(a,y)=g_0(a,y)f_m(a,y) \\ f_1(a,y)=g_1(a,y)f_m(a,y) \end{cases}$)。其中实系数多项式 $g_0(y), g_1(y)$ 为奇偶函数，$g_0(y)$ 是非零多项式，但 $g_1(y)$ 却有可能是零多项式，根据预章定理 5，则 $\begin{cases} g_0(y)=0 \\ g_1(y)=0 \end{cases}$ 无解，$(g_0(y), g_1(y))=1$，于是

$$f(z)=f(a+iy)=i^n[f_0(a,y)-if_1(a,y)]=i^n[f_0(y)-if_1(y)]=i^n[g_0(y)-ig_1(y)]f_m(y)。$$

令 $g(z)=g(a+iy)=i^{n-K}[g_0(y)-ig_1(y)]$，则 $f(a+iy)=g(a+iy)[i^K f_m(y)]$，其中 K 为 $f_m(y)$ 的次数，令 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，则 $f(z)=f(a+iy)=g(a+iy)F_m(iy)$，于是

$$f(z)=g(z)F_m(z-a)。$$

该式与 a 有关，它是 $f(z)$ 在 z 平面实轴上点 a 的分解式，其中 $g(z)$ 为点 a 的 $g(z)$，$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$，$F_m(z-a)$ 为 $(z-a)$ 的偶或奇函数，$F_m(z-a)=F_m(a,z-a)$，$F_m(a,z-a)$ 是关于 a，$(z-a)$ 的实系数二元多项式，且 $a\in R$，于是 $F_m(z-a)$ 是 $(z-a)$ 的实系数 K 次多项式，也是 z 的实系数 K 次多项式，因此 $g(z)$ 是实系数 $n-K$ 次多项式。

由 $\begin{cases} f_0(y)=g_0(y)f_m(y) \\ f_1(y)=g_1(y)f_m(y) \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} i^n f_0(y)=i^{n-K}g_0(y)[i^K f_m(y)] \\ i^{n-1}f_1(y)=i^{n-K-1}g_1(y)[i^K f_m(y)] \end{cases}$

令 $G_0(iy)=i^{n-K}g_0(y)$，$G_1(iy)=i^{n-K-1}g_1(y)$，又 $F_0(iy)=i^n f_0(y)$，$F_1(iy)=i^{n-1}f_1(y)$，$F_m(iy)=i^K f_m(y)$，于是 $\begin{cases} F_0(iy)=G_0(iy)F_m(iy) \\ F_1(iy)=G_1(iy)F_m(iy) \end{cases}$，由 $z=a+iy$，则有 $\begin{cases} F_0(z-a)=G_0(z-a)F_m(z-a) \\ F_1(z-a)=G_1(z-a)F_m(z-a) \end{cases}$

其中 $F_0(z-a)$ 是 $(z-a)$ 的次数为 n 的多项式，但 $F_1(z-a)$ 却有可能是 $(z-a)$ 的零多项式，即当它关于 $(z-a)$ 的系数全为零时。由于 $(2)^a$ 有解，$\begin{cases}F_0(z-a)=F_0(iy)=i^n f_0(y)\\F_1(z-a)=F_1(iy)=i^{n-1}f_1(y)\end{cases}$，于是 $\begin{cases}F_0(z-a)=0\\F_1(z-a)=0\end{cases}$ 有解，故 $F_0(z-a)$, $F_1(z-a)$ 关于 $(z-a)$ 非互素，即 $(F_0(z-a),F_1(z-a))\neq 1$。

$\begin{cases}G_0(z-a)=0\\G_1(z-a)=0\end{cases}$ 无解。否则，假如 $\begin{cases}G_0(z-a)=0\\G_1(z-a)=0\end{cases}$ 有解，则 $\exists\ y_0\in C$，将 $z_0=a+iy_0$ 代入 $\begin{cases}G_0(z-a)=0\\G_1(z-a)=0\end{cases}$ 后，满足 $\begin{cases}G_0(z_0-a)=0\\G_1(z_0-a)=0\end{cases}$，从而有 $\begin{cases}G_0(z_0-a)=G_0(iy_0)=i^{n-K}g_0(y_0)=0\\G_1(z_0-a)=G_1(iy_0)=i^{n-K-1}g_1(y_0)=0\end{cases}$ 于是 y_0 是 $\begin{cases}g_0(y)=0\\g_1(y)=0\end{cases}$ 的解，矛盾。因此，$(G_0(z-a),G_1(z-a))=1$，即 $G_0(z-a)$, $G_1(z-a)$ 关于 $(z-a)$ 互素，$F_m(z-a)$ 是 $F_0(z-a)$, $F_1(z-a)$ 关于 $(z-a)$ 的一个最大公因式。

综上所述，设 $a\in R$，若 $Q(a)=0$，则 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\geq 1$，$f(z)$ 就能在 z 平面实轴上的点 a 分解成两个 z 的实系数多项式 $g(z)$ 与 $F_m(z-a)$ 的乘积，即

$$f(z)=g(z)F_m(z-a)$$

其中 $g(z)$ 为点 a 的 $g(z)$，由 $z=a+iy$，该式又可写成 $f(a+iy)=g(a+iy)[i^K f_m(y)]$。于是说点 a 的 $g(z)$，就意味着 $f(z)=g(z)F_m(z-a)$ 或 $f(a+iy)=g(a+iy)[i^K f_m(y)]$。反之亦然。

点 a 的 $g(z)$ **性质 1** 设 $a\in R$，$g(z)=g(a+iy)=i^{n-K}[g_0(y)-ig_1(y)]$，其中实系数多项式 $g_0(y),g_1(y)$ 为奇偶函数，并且 $(g_0(y),g_1(y))=1$，则 $g(a)\neq 0$，于是 $(z-a)$ 不能整除 $g(z)$，即 y 不能整除 $g(a+iy)$。

证明 1 用反证法：假如 $g(a)=0$，则 $z=a$ 是 $g(z)=0$ 的根，由定理 6，则 0 是 $\begin{cases}g_0(y)=0\\g_1(y)=0\end{cases}$ 的解，于是 $y\mid g_0(y)$ 且 $y\mid g_1(y)$，从而 $g_0(y),g_1(y)$ 非互素，矛盾。所以，$g(a)\neq 0$，于是 $(z-a)$ 不能整除 $g(z)$，由 $g(z)=g(a+iy)$ 的整除性质，则 y 不能整除 $g(a+iy)$。】

证明 2 在第二章点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1 中令 $x_0=a\in R$，简记 $g_0(a,y)=g_0(y)$，$g_1(a,y)=g_1(y)$ 即得。】

下面是定理 6 的推论

推论 1 设 $a\in R$，l 为非负整数，则 $y^l\mid f(a+iy)$ 的充要条件是：$y^l\mid f_0(y)$ 且 $y^l\mid f_1(y)$。

证明 第二章定理 6 推论 3 中令 $x_0=a\in R$，简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$ 即

得。】

推论 2 设$a \in R$，l为非负整数，则$z_0 = a$是$f(z)=0$的l重根的充要条件是：0是$(2)^a$的l重解。

证明 根据推论1即得。】

$f(z)=0$一对复根的**性质** 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$的一对复根的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right) | f(a+iy)$。

证明 在第二章$f(z)=0$一对复根的性质中令$x_0 = a \in R$即得。】

定义 设$a \in R$，$y_0 \in C$，若y_0，$-y_0$都是方程组$(2)^a$的解，特别当$y_0 = 0$时，0是$(2)^a$的2重以上解，即$y^2 | f_0(y)$且$y^2 | f_1(y)$，则称y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对(复数)解。

$(2)^a$一对复数解的**性质** 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对复数解的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right) | f_0(y)$且$\left(y^2 - y_0^2\right) | f_1(y)$。

证明 在第二章$(2)^{x_0}$一对复数解的性质中令$x_0 = a \in R$，简记$f_0(a,y) = f_0(y)$，$f_1(a,y) = f_1(y)$即得。】

引理 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则(a, y_0)，$(a, -y_0)$是方程组(2)的一对复数解的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对复数解。

证明 在第二章定理8引理中令$x_0 = a \in R$即得。】

定理 7 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$的一对复根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对复数解。

证明 由引理和第二章定理7推论2即得。】

定理7表明 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则$\left(y^2 - y_0^2\right) | f(a+iy)$的充要条件是：

$$\left(y^2 - y_0^2\right) | f_0(y) \text{且} \left(y^2 - y_0^2\right) | f_1(y)。$$

例 3 设$a \in R$，$y_0 \in C$，若$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$的一对复根，由定理7和定理2推论，则$Q(a)=0$。

推论 1 设$a \in R$，则$z_1 = a$，$z_2 = a$是$f(z)=0$的一对a实根的充要条件是：0，0是$(2)^a$的一对0实数解。

证明 在定理7中令$y_0 = 0$即得。】

推论 2 设$a \in R$，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$的一对非a

复根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对非0复数解。

证明 在定理7中令$y_0 \neq 0$即得。】

推论 3 设$a \in R$，$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x = a$上的一对共轭根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对非0实数解。

证明 在推论2中令$y_0 \in R$即得。】

推论 4 设$a \in R$，y_0为纯虚数，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$在z平面实轴上的一对非a实根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对纯虚数解。

证明 在推论2中令y_0为纯虚数即得。】

推论 5 设$a \in R$，$y_0^2 \notin R$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$；$\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$，$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$是$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$y_0$，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$是$(2)^a$的两对不相同的复数解。

证明 根据推论2即得。】

例 4 设$a \in R$，$y_0^2 \notin R$，则y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$是$(2)^a$的两对不相同的复数解的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_0(y)$且$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_1(y)$。

证明 在第二章例14中简记$f_0(a,y) = f_0(y)$，$f_1(a,y) = f_1(y)$即得。】

推论5表明 设$a \in R$，$y_0^2 \notin R$，则$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$的充要条件是：

$$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_0(y) \text{且} \left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_1(y)。$$

推论 6 设$a \in R$，$y_0 \in R$，则$z_0 = a + iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x = a$上的根的充要条件是：y_0是$(2)^a$的实数解。

证明 由定理1和第二章定理7推论5即得。】

推论6表明 设$a \in R$，$y_0 \in R$，则$(y - y_0) \mid f(a+iy)$的充要条件是：

$$(y - y_0) \mid f_0(y) \text{且} (y - y_0) \mid f_1(y)$$

点a的$g(z)$**性质 2** 设$a \in R$，$g(z) = g(a+iy) = i^{n-K}\left[g_0(y) - ig_1(y)\right]$，其中实系数多项式$g_0(y), g_1(y)$为奇偶函数，并且$(g_0(y), g_1(y)) = 1$，于是1) $g(z)=0$没有以a为中点的成对根；2) 设$y_0 \in C$且$y_{j_0} \neq 0$，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$，则$(z - z_1)$和$(z - z_2)$不能同时

整除 $g(z)$，即 $(y-y_0)$ 和 $(y+y_0)$ 不能同时整除 $g(a+iy)$。

证明 1 1) 用反证法：假如 $g(z)=0$ 有以 a 为中点的成对根，设为 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$（$y_0\in C$），根据定理 7，则 y_0，$-y_0$ 是 $\begin{cases}g_0(y)=0\\g_1(y)=0\end{cases}$ 的一对复数解。由一对复数解的性质，则 $(y^2-y_0^2)\mid g_0(y)$ 且 $(y^2-y_0^2)\mid g_1(y)$，于是 $g_0(y), g_1(y)$ 非互素，矛盾。所以 $g(z)=0$ 没有以 a 为中点的成对根。2) 由 1)和 $g(z)=g(a+iy)$ 的整除性质即得。】

证明 2 在第二章点 x_0 的 $g(z)$ 性质 2 中令 $x_0=a\in R$，简记 $g_0(a,y)=g_0(y)$，$g_1(a,y)=g_1(y)$ 即得。】

§2 最大公因式方程(一)

设施图姆序列$(3)^a$内$f_m(y)$的次数为K，且记

$$f_m(y)=0 \qquad (4)^a$$

则称它为$(3)^a$最后的K次方程$(4)^a$。显然，y_0是$(4)^a$的根的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_m(y)$。y_0是$(4)^a$的l重根的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid f_m(y)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能整除$f_m(y)$。

$(4)^a$所有复根(含重根)组成的集合可写成$\left\{\, y\mid f_m(y)=0\ (y\in C)\ (4)^a \right\}$，或记作$\sqrt{f_m(\ )}$，于是$\left\{\, y\mid f_m(y)=0\ (y\in C)\ (4)^a \right\}=\sqrt{f_m(\ )}$。$y_0$是$(4)^a$的$l$重根的充要条件是：$y_0(l)\in\sqrt{f_m(\ )}$。

$f_m(y)$是$f_0(y),f_1(y)$的最大公因式，下面定理 1 及推论根据预 章定理 2 及推论即得。

定理 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则

1) y_0是$(2)^a$的解的充要条件是：y_0是$(4)^a$的根。

2) y_0是$(2)^a$的l重解的充要条件是：y_0是$(4)^a$的l重根。

推论 1 设$a\in R$，则$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合与$(4)^a$所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}=\sqrt{f_m(\ )}$，故$(4)^a$的所有复根就是$(2)^a$的所有复数解。

推论 2 设$a\in R$，$(2)^a$复数解(含重解)的个数为K_a，$(4)^a$的次数为K，则$K_a=K$，故$(2)^a$有解的充要条件是：$K\geq 1$。

推论 3 设$a\in R$，则$(2)^a$无解的充要条件是：$(f_0(y),f_1(y))=1$。

推论 4 设$a\in R$，在$(3)^a$内，1) 当$f_1(y)\neq 0$时，设$y_0\in C$，l,l_0,l_1均为非负整数，则

$$y_0(l)\in\sqrt{f_m(\ )}\Leftrightarrow y_0(l_0)\in\sqrt{f_0(\ )},\quad y_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}，其中\ l=\min(l_0,l_1)。$$

2) 当$f_1(y)\equiv 0$时，则$f_m(y)=f_0(y)$，$m=0$。

定理 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(4)^a$的根，则a是$Q(x)=0$的根；反过来，若a是$Q(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0，使y_0是$(4)^a$的根。

证明 由定理 1 和§1 定理 2 即得。】

推论 1 设 $a \in R$，则 $(4)^a$ 次数(即 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数) $K \geq 1$ 的充要条件是：$Q(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

定义 设 $f(z)$ 的次数 $n \geq 1$，$a \in R$，$(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数为 K，于是 1) 当 $K=0$ 时，$(f_0(y), f_1(y))=1$，点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$ 互素，则称 a 是 $f(z)=0$ 的一个互素点；2) 当 $1 \leq K \leq n$ 时，$(f_0(y), f_1(y)) \neq 1$，点 a 的 $f_0(y), f_1(y)$ 非互素，则称 a 是 $f(z)=0$ 的一个非互素点。

由该定义，推论 1 可写成推论 2 和 3。

推论 2 设 $a \in R$，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点的充要条件是：$Q(a)=0$。

推论 3 设 $a \in R$，则 a 是 $f(z)=0$ 的互素点的充要条件是：$Q(a) \neq 0$。

在 z 平面实轴上任意取一点 a，若 a 是 $Q(x)=0$ 的根，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点，否则 a 就是 $f(z)=0$ 的互素点。

例 1 设 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0, A_1, \cdots, A_{n^2-1}, A_{n^2})}$，则 α, β 均为有限实数，且

$$\alpha < x_0 < \beta，\quad Q(\alpha) \neq 0，\quad Q(\beta) \neq 0，\quad Q(x_0)=0，\quad V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1。$$

由推论 2 和 3，则 x_0 是 $f(z)=0$ 的非互素点，α 和 β 都是 $f(z)=0$ 的互素点。

定理 3 设 $a \in R$，L 为正整数，$x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$(4)^a$ 的次数为 K，则 $K \leq L$，其中 $(f(z), f'(z))=1$ 时，$K=L$。

证明 $(4)^a$ 的次数为 K，由定理 1 推论 2，则 $(2)^a$ 复数解(含重解)的个数也为 K，再由§1 定理 3 即得。】

推论 设 $a \in R$，L 为正整数，$x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$(4)^a$ 的次数为 K，若 $K<L$，则 $f(z)=0$ 有重根。

证明 用反证法。假设 $f(z)=0$ 没有重根，则 $(f(z), f'(z))=1$。由定理 3，则 $K=L$，矛盾。所以 $f(z)=0$ 有重根。】

$(4)^a$ 根的**性质**

性质 1 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，若 y_0 是 $(4)^a$ 的根，则 $-y_0$ 也是 $(4)^a$ 的根。

证明 $f_m(y)$ 为偶或奇函数，因此命题成立。】

推论 1 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，则 y_0 是 $(4)^a$ 的根的充要条件是：$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的根。

证明 由性质 1 即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y-y_0)|f_m(y)$的充要条件是：$(y+y_0)|f_m(y)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则

$$(y-y_0)^l\mid f_m(y)\text{的充要条件是：}(y+y_0)^l\mid f_m(y)\text{。}$$

证明 在第二章$d(x_0,y)=0$根的性质 1 推论 3 中令$x_0=a\in R$，简记$d(a,y)=f_m(a,y)$ $=f_m(y)$即得。】

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则y_0是$(4)^a$的l重根的充要条件是：$-y_0$是$(4)^a$的l重根。

证明 根据推论 3 即得。】

推论 5 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，l为非负整数，y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对l重根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_m(y)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$不能整除$f_m(y)$。

证明 在第二章$d(x_0,y)=0$根的性质 1 推论 5 中令$x_0=a\in R$，简记$d(a,y)=f_m(a,y)$ $=f_m(y)$，并将$d(a,y)=0$改为$(4)^a$即得。】

例 2 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，l为非负整数，根据定理 1，则y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对l重解的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对l重根。

$(4)^a$是实系数代数方程，根据第二章§2 性质及其推论，它的根具有性质 2 及其推论。

性质 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(4)^a$的根，则$\overline{y_0}$也是$(4)^a$的根。

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0是$(4)^a$的根的充要条件是：$\overline{y_0}$是$(4)^a$的根。

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y-y_0)|f_m(y)$的充要条件是：$\left(y-\overline{y_0}\right)|f_m(y)$。

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则

$$(y-y_0)^l\mid f_m(y)\text{的充要条件是：}\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid f_m(y)\text{。}$$

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则y_0是$(4)^a$的l重根的充要条件是：$\overline{y_0}$是$(4)^a$的l重根。

例 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则 1) 若y_0是$(4)^a$的根，则$-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$都是$(4)^a$的根；2) 若y_0是$(4)^a$的l重根，则$-y_0$，$\overline{y_0}$，$-\overline{y_0}$都是$(4)^a$的l重根。

定理 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(4)^a$的根，则$z_0=a+iy_0$是$f(z)=0$的根。

证明 由定理 1 和§1 定理 5 即得。】

推论 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(4)^a$的根，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$都是$f(z)=0$的根。

证明 由$(4)^a$根的性质和定理 4 即得。】

定理 5 设$a\in R$，l为非负整数，则

1) $z_0=a$是$f(z)=0$的根的充要条件是：0 是$(4)^a$的根；

2) $z_0=a$是$f(z)=0$的l重根的充要条件是：0 是$(4)^a$的l重根。

证明 由定理 1 和§1 定理 6 及其推论 2 即得。】

定理 5 表明 设$a\in R$，l为非负整数，则 1) $y\mid f(a+iy)$的充要条件是：$y\mid f_m(y)$；2) $y^l\mid f(a+iy)$，但y^{l+1}不能整除$f(a+iy)$的充要条件是：$y^l\mid f_m(y)$，但y^{l+1}不能整除$f_m(y)$。

定义 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0，$-y_0$都是方程$(4)^a$的根，特别当$y_0=0$时，0 是$(4)^a$的 2 重以上实根，即$y^2\mid f_m(y)$，则称y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对(复)根。

$(4)^a$一对复根的**性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对复根的充要条件是：$(y^2-y_0^2)\mid f_m(y)$。

证明 在第二章$d(x_0,y)=0$一对复根性质中令$x_0=a\in R$，简记$d(a,y)=f_m(a,y)=f_m(y)$，并将$d(a,y)=0$改为$(4)^a$即得。】

引理 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对复数解的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对复根。

证明 $f_m(y)$是$f_0(y),f_1(y)$的最大公因式，因此$(y^2-y_0^2)\mid f_0(y)$且$(y^2-y_0^2)\mid f_1(y)$的充要条件是：$(y^2-y_0^2)\mid f_m(y)$。于是命题成立。】

定理 6 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$的一对复根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对复根。

证明 由引理和§1 定理 7 即得。】

定理 6 表明 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y^2-y_0^2)\mid f(a+iy)$的充要条件是：$(y^2-y_0^2)\mid f_m(y)$。

推论 1 设$a\in R$，则$z_1=a$，$z_2=a$是$f(z)=0$的一对a实根的充要条件是：0，0 是$(4)^a$的一对 0 实根。

证明 在定理 6 中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对非 a 复根的充要条件是：y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对非 0 复根。

证明 在定理 6 中令 $y_0\neq 0$ 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭根的充要条件是：y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对非 0 实根。

证明 在推论 2 中令 $y_0\in R$ 即得。】

推论 4 设 $a\in R$，y_0 为纯虚数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上的一对非 a 实根的充要条件是：y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对纯虚数根。

证明 在推论 2 中令 y_0 为纯虚数即得。】

推论 5 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是：y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 两对不相同的复根。

证明 根据推论 2 即得。】

推论 5 表明 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，则

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f(a+iy)\text{ 的充要条件是：}\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_m(y)\text{。}$$

推论 6 设 $a\in R$，$y_0\in R$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的充要条件是：y_0 是 $(4)^a$ 的实根。

证明 由定理 1 和§1 定理 7 推论 6 即得。】

推论 6 表明 设 $a\in R$，$y_0\in R$，则 $(y-y_0)\mid f(a+iy)$ 的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_m(y)$。

定理 7 设 $a\in R$，若 a 是 $f(z)=0$ 的互素点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有根。

证明 若 a 是 $f(z)=0$ 的互素点，由定理 2 推论 3，则 $Q(a)\neq 0$。用反证法。假如 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上有根 $z_0=a+iy_0$ (其中 $y_0\in R$)，由定理 6 推论 6，则 y_0 是 $(4)^a$ 的实根，根据定理 2，则 $Q(a)=0$，矛盾。所以，$f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上没有根。】

定理 8 设 $a\in R$，K 为正整数，$f(a+iy)=g(a+iy)[i^K f_m(y)]$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$(y-y_0)\mid g(a+iy)$，但 $(y+y_0)$ 不能整除 $g(a+iy)$；2) $l_1<l_2$ 时，$(y+y_0)\mid g(a+iy)$，但

$(y-y_0)$不能整除 $g(a+iy)$；3) $l_1=l_2$时，$(y-y_0)$和$(y+y_0)$都不能整除 $g(a+iy)$。

证明 在第二章定理 13 推论中令 $x_0=a\in R$，并将 $d(a,y)$记为 $f_m(y)$即得。】

下面定理 9 及其推论 1 和 2，由 $a\in R$，$Q(a)=0$，根据§1 定理 2 推论，则$(2)^a$ 有解，于是分别在第二章定理 14 推论 3 和 4 中令 $x_0=a\in R$，包括推论 5 在内将 $d(a,y)=0$ 改为$(4)^a$ 即得。】

定理 9 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$时，y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l_2 重根，$z_1=a+iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$时，y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l_1 重根，$z_2=a-iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$时，记 $l_1=l_2=l$，则 y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l 重根，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

推论 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2,l 为非负整数，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l 重根的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。

推论 2 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l 重实根。

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根的充要条件是：y_0是$(4)^a$ 的 l 重实根。

证明 假如 $y_0=0$，由定理 5，命题成立。假如 $y_0\neq 0$，则 1) $l=0$时，由定理 6 推论 6，命题成立。2) $l\geq 1$时，则 $Q(a)=0$。若 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根，则 $z_0=a+iy_0$，$\overline{z_0}=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根，由推论 2 则 y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l 重实根。因此，y_0是$(4)^a$ 的 l 重实根。反过来，若 y_0是$(4)^a$ 的 l 重实根，则 y_0，$-y_0$是$(4)^a$ 的一对 l 重实根，由推论 2，则 $z_0=a+iy_0$，$\overline{z_0}=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根。所以，$z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根。】

§3 最大公因式方程(二)

$F_m(z-a)$是$F_0(z-a)$, $F_1(z-a)$关于$(z-a)$的最大公因式，它为$(z-a)$的偶或奇函数。$F_m(z-a)=F_m(a,z-a)$，$F_m(a,z-a)$是关于a，$(z-a)$的实系数二元多项式，且$a\in R$，于是$F_m(z-a)$是$(z-a)$的实系数多项式，也是z的实系数多项式。

设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_0=a+iy_0$，若$F_m(z-a)$在$z=z_0$时函数值$F_m(z_0-a)=F_m(iy_0)=i^K f_m(y_0)=0$，则$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$ (在z平面上)的一个(复)根。显然，$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根的充要条件是：$(z-z_0)\mid F_m(z-a)$。

再设l为非负整数，若$(z-z_0)^l\mid F_m(z-a)$，但$(z-z_0)^{l+1}$不能整除$F_m(z-a)$，则$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的(在z平面上)的l重(复)根。

$F_m(z-a)=F_m(iy)$的**整除性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z=a+iy$，$z_0=a+iy_0$，则$(z-z_0)^l\mid F_m(z-a)$充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_m(iy)$。

显然，$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根的充要条件是：$(y-y_0)\mid F_m(iy)$；$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的l重根的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_m(iy)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能整除$F_m(iy)$。

$F_m(z-a)=0$根的**性质**

性质 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，若$z_1=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根，则$z_2=a-iy_0$也是$F_m(z-a)=0$的根。

证明 $F_m(z-a)$为$(z-a)$的偶或奇函数，于是命题成立。】

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根的充要条件是：$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根。

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)\mid F_m(z-a)\text{的充要条件是：}(z-z_2)\mid F_m(z-a)\text{。}$$

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)^l\mid F_m(z-a)\text{的充要条件是：}(z-z_2)^l\mid F_m(z-a)\text{。}$$

证明 在第二章$F_d(x_0,z-x_0)=0$根的性质 1 推论 3 中令$x_0=a\in R$，并简记$F_d(a,z-a)=F_m(a,z-a)=F_m(z-a)$即得。】

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则$z_1=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的l重根的充要条件是：$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$的l重根。

推论 5 设 $a \in R$，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$(y^2 - y_0^2)^l \mid F_m(iy)$，但 $(y^2 - y_0^2)^{l+1}$ 不能整除 $F_m(iy)$。

证明 在第二章 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 根的性质 1 推论 5 中令 $x_0 = a \in R$，并简记 $F_d(a,iy)= F_m(a,iy)=F_m(iy)$，将 $F_d(a,z-a)=0$ 改为 $F_m(z-a)=0$ 即得。】

性质 2 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，$z_2 = a - iy_0$，若 $z_1 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，则 $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 也是 $F_m(z-a)=0$ 的根。

证明 若 $z_1 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，则 $F_m(z_1-a)=0$。于是

$$i^K f_m(y_0) = F_m(iy_0) = F_m(z_1 - a) = 0$$

y_0 是 $(4)^a$ 的根，由 $(4)^a$ 根的性质 2，则 $\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的根，即 $f_m(\overline{y_0})=0$。又 $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$，于是 $F_m(\overline{z_2}-a)=F_m(i\overline{y_0})=i^K f_m(\overline{y_0})=0$。故 $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 也是 $F_m(z-a)=0$ 的根。】

推论 1 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，$z_2 = a - iy_0$，则 $z_1 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根。

推论 2 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$，则

$$(z - z_1) \mid F_m(z-a) \text{的充要条件是：} (z - \overline{z_2}) \mid F_m(z-a)\text{。}$$

推论 3 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$，则

$$(z - z_1)^l \mid F_m(z-a) \text{的充要条件是：} (z - \overline{z_2})^l \mid F_m(z-a)\text{。}$$

证明 在第二章 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 根的性质 2 推论 3 中，简记 $F_d(a,z-a)=F_m(a,z-a)= F_m(z-a)$ 即得。】

推论 4 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，$z_2 = a - iy_0$，则 $z_1 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。

例 1 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，则 1) 若 $z_1 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，则 $z_2 = a - iy_0$，$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$，$\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$ 都是 $F_m(z-a)=0$ 的根；2) 若 $z_1 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根，则 $z_2 = a - iy_0$，$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$，$\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$ 都是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。

定理 1 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，则

1) y_0 是 $(4)^a$ 的根的充要条件是：$z_0 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的根；

2) y_0 是 $(4)^a$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0 = a + iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的 l 重根。

证明 1 由题设和 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，则

1) $(y-y_0) \mid f_m(y)$ 的充要条件是：$(y-y_0) \mid F_m(iy)$。故命题成立。

2) $(y-y_0)^l \mid f_m(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $f_m(y)$ 的充要条件是：$(y-y_0)^l \mid F_m(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_m(iy)$。故命题成立。】

证明 2 在第二章定理 11 中令 $x_0 = a \in R$，将 $d(a,y)=0$ 改为 $(4)^a$，将 $F_d(a,z-a)=0$ 改为 $F_m(z-a)=0$ 即得。】

例 2 设 $a \in R$，$y_j \in C$，则 y_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $(4)^a$ 的 k 个复根的充要条件是：$z_j = a + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的 k 个根。

证明 根据定理 1 即得】

例 2 中可以含等根。由 $z = a + iy$，$z_1 = a + iy_1$，$z_2 = a + iy_2$，则 $z_1 - z_2 = i(y_1 - y_2)$，于是 $y_1 = y_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$。

推论 1 设 $a \in R$，$y_j \in C$，$1 \le K \le n$，则 y_j $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $(4)^a$ 的所有复根(含重根)的充要条件是：$z_j = a + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)。

证明 若 y_j $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $(4)^a$ 的所有复根，则 $f_m(y)$ 的次数为 K，$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$，于是 $F_m(z-a)$ 关于 z 的次数也为 K。由定理 1，则 $z_j = a + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的 K 个根，恰好等于 $F_m(z-a)$ 关于 z 的次数，故 $z_j = a + iy_j$ ($j=1,2,\cdots,K$)是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根。

反过来，若 $z_j = a + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根，则 $F_m(z-a)$ 关于 z 的次数为 K，$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$，于是 $f_m(y)$ 的次数也为 K。由定理 1，则 y_j $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $(4)^a$ 的 K 个根，恰好等于 $f_m(y)$ 的次数，故 y_j $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $(4)^a$ 的所有复根。】

推论 2 设 $a \in R$，$y_j \in C$，则 y_j $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根的充要条件是：$z_j = a + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根。

证明 若 y_j $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的根，由定理 1，则 $z_j = a + iy_j$

($j=1,2,\cdots,\underline{K}$)是 $F_m(z-a)=0$ 的 $\underline{K}$ 个各不相同的根。用反证法：假如 $F_m(z-a)=0$ 各不相同的根除了这 $\underline{K}$ 个根外还有一个根 $z_0=a+iy_0$，其中 $y_0\in C$， $z_0\neq z_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$，由定理 1，则 y_0 是 $(4)^a$ 的根，且 $y_0\neq y_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$，矛盾。因此， $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的所有各不相同的根。

反过来，若 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的所有各不相同的根，由定理 1，则 y_j $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $(4)^a$ 的 $\underline{K}$ 个各不相同的根。用反证法：假如 $(4)^a$ 各不相同的根除了这 $\underline{K}$ 个根外还有一个根 y_0，其中 $y_0\in C$， $y_0\neq y_j$ ($j=1,2,\cdots,\underline{K}$)，由定理 1，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，且 $z_0\neq z_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$，矛盾。所以， y_j $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的根。】

推论 3 设 $a\in R$， $y_0\in R$， l 为非负整数，则 1) y_0 是 $(4)^a$ 的实根的充要条件是： $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根；2) y_0 是 $(4)^a$ 的 l 重实根的充要条件是： $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根。

证明 在定理 1 中令 $y_0\in R$ 即得。】

推论 4 设 $a\in R$， $y_j\in R$，则 y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $(4)^a$ 的所有实根(含重根)的充要条件是： $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)。

证明 若 y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $(4)^a$ 的所有实根，由推论 3，则 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 K' 个根。用反证法：假如 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上除了这 K' 个根外还有一个根 $z_0=a+iy_0$，其中 $y_0\in R$， $z_0\neq z_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$(否则会与推论 3 的 2)发生矛盾)，由推论 3，则 y_0 是 $(4)^a$ 的实根，且 $y_0\neq y_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$，矛盾。因此， $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根。

反过来，若 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，由推论 3，则 y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $(4)^a$ 的 K' 个实根。用反证法：假如 $(4)^a$ 除了这 K' 个实根外还有一个实根 y_0，其中 $y_0\in R$， $y_0\neq y_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$(否则会与推论 3 的 2)发生矛盾)，由推论 3，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，且 $z_0\neq z_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$，矛盾。所以， y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $(4)^a$ 的所有实根。】

推论 5 设 $a\in R$， $y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)的充要条件是： y_j， $-y_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $(4)^a$ 的所有非 0 实根(含重根)。

证明 若 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有共轭根，不妨设 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根，则 $\overbrace{z=a,z=a,\cdots,z=a}^{l}$， $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，由推论 4，则 $\overbrace{0,0,\cdots,0}^{l}$， y_j， $-y_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $(4)^a$ 的所有实根，其中 y_j， $-y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^a$ 的所有非 0 实根。

反过来，若 y_j， $-y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^a$ 的所有非 0 实根，不妨设 0 是 $(4)^a$ 的 l 重根，则 $\overbrace{0,0,\cdots,0}^{l}$， y_j， $-y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有实根，由推论 4，则 $\overbrace{z=a,z=a,\cdots,z=a}^{l}$， $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有共轭根。】

推论 6 设 $a\in R$， $y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有非 a 根(含重根)的充要条件是： y_j， $-y_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $(4)^a$ 的所有非 0 复根(含重根)。

证明 必要性不妨设 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根，充分性不妨设 0 是 $(4)^a$ 的 l 重根，根据推论 1 即得。】

定理 2 设 $a\in R$， $y_0\in C$，若 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，则 a 是 $Q(x)=0$ 的根；反过来，若 a 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根。

证明 由定理 1 和§2 定理 2 即得。】

推论 设 $a\in R$，则 $F_m(z-a)=0$ 关于 z 的次数 $K\geq 1$ 的充要条件是： $Q(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

定理 3 设 $f(z)$的次数$n\geq 1$，$a\in R$，若$Q(a)=0$，则a是$f(z)=0$的非互素点，$(3)^a$内$f_m(y)$的次数K满足$1\leq K\leq n$， $f(z)$就能在z平面实轴上的点a分解成两个z的实系数多项式$g(z)$与$F_m(z-a)$的乘积，即$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，其中$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$，$F_m(z-a)$关于$z$的次数为$K$， $g(z)$的次数为$n-K$。

证明 由§2 定理 2 推论 2 和§1 相关论述即知命题成立。】

定理 4 设$a\in R$， $y_0\in C$且$y_0\neq 0$，l为非负整数，则y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对l重根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$的一对l重根。

证明 1 根据定理 1 即得。】

证明 2 在第二章定理 12 中令$x_0=a\in R$，将$d(a,y)=0$改为$(4)^a$，将$F_d(a,z-a)=0$改为$F_m(z-a)=0$即得。】

推论 1 设$a\in R$， $y_0\in R$且$y_0\neq 0$，l为非负整数，则y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对l重实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的一对l重共轭根。

证明 在定理 4 中令$y_0\in R$即得。】

推论 2 设$a\in R$， y_0为纯虚数，l为非负整数，则y_0， $-y_0$是$(4)^a$的一对l重纯虚数根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面实轴上的一对l重实根。

证明 在定理 4 中令y_0为纯虚数即得。】

推论 3 设$a\in R$， $y_0^2\notin R$，l为非负整数，则y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$是$(4)^a$两对不相同的l重根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$； $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$两对不相同的$l$重根。

证明 根据定理 4 即得。】

推论 3 表明 设$a\in R$， $y_0^2\notin R$，l为非负整数，则

$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l \mid f_m(y)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$不能整除$f_m(y)$的充要条件是：

$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l \mid F_m(iy)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$不能整除$F_m(iy)$。

定理 5 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由定理 1 和§2 定理 4 即得。】

推论 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由 $F_m(z-a)=0$ 根的性质和定理 5 即得。】

定理 6 设 $a\in R$，l 为非负整数，则

1) $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$z_0=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根；

2) $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。

证明 由定理 1 和§2 定理 5 即得。】

定义 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 都是 $F_m(z-a)=0$ 的根，特别当 $y_0=0$ 时，a 是 $F_m(z-a)=0$ 的 2 重以上根，则称 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ (在 z 平面上)的一对(复)根。

$F_m(z-a)=0$ 一对复根**性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\,F_m(iy)$。

证明 在第二章 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 一对复根性质中令 $x_0=a\in R$，简记 $F_d(a,iy)=F_m(a,iy)$ $=F_m(iy)$，并将 $F_d(a,z-a)=0$ 改为 $F_m(z-a)=0$ 即得。】

定理 7 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对复根。

证明 由 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$ 可知，$\left(y^2-y_0^2\right)|\,f_m(y)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\,F_m(iy)$。于是命题成立。】

推论 1 设 $a\in R$，则 0，0 是 $(4)^a$ 的一对 0 实根的充要条件是：$z_1=a$，$z_2=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 a 实根。

证明 在定理 7 中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，则 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对非 0 复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的一对非 a 根。

证明 在定理 7 中令 $y_0\neq 0$ 即得。】

例 3 由推论 2 可知：1) 设 $a\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对非 0

实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的一对共轭根：2) 设$a\in R$，y_0为纯虚数，则y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对纯虚数根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面实轴上的一对非a实根；3) 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$是$(4)^a$两对不相同的复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$两对不相同的复根。

定理 8 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$的一对复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$的一对复根。

证明 由定理 7 和§2 定理 6 即得。】

定理 8 表明 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$\left(y^2-y_0^2\right)|\, f(a+iy)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\, F_m(iy)$。

推论 1 设$a\in R$，则$z_1=a$，$z_2=a$是$f(z)=0$的一对a实根的充要条件是：$z_1=a$，$z_2=a$是$F_m(z-a)=0$的一对a实根。

证明 在定理 8 中令$y_0=0$即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$在z平面上的一对非a根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面上的一对非a根。

证明 在定理 8 中令$y_0\neq 0$即得。】

例 4 由推论 2 可知：1) 设$a\in R$，$y_0\in R$且$y_0\neq 0$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对共轭根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的一对共轭根。2) 设$a\in R$，y_0为纯虚数，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$在z平面实轴上的一对非a实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面实轴上的一对非a实根。

推论 3 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$两对不相同的复根。

证明 根据推论 2 即得。】

推论 3 表明 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\, f(a+iy)\text{的充要条件是：}\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\, F_m(iy)\text{。}$$

定理 9 设 $a\in R$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$(z-z_1)|g(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g(z)$；2) $l_1<l_2$ 时，$(z-z_2)|g(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g(z)$；3) $l_1=l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g(z)$。

证明 在第二章定理 13 中令 $x_0=a\in R$，将 $F_d(a,z-a)$ 记为 $F_m(z-a)$ 即得。】

下面定理 10 及其推论 1 和 2，由 $a\in R$，$Q(a)=0$，根据§1 定理 2 推论，则 $(2)^a$ 有解，于是分别在第二章定理 14 及推论 1 中令 $x_0=a\in R$，然后包括推论 2 在内将 $F_d(a,z-a)=0$ 改为 $F_m(z-a)=0$ 即得。

定理 10 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l_2 重根，$z_1=a+iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$ 时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l_1 重根，$z_2=a-iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重根，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

推论 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2,l 为非负整数，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。

推论 2 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根。

定理 11 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 1) $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根。2) $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根。

证明 1) 由定理 1 推论 3 和§2 定理 6 推论 6 即得；2) 由定理 1 推论 3 和§2 定理 9 推论 3 即得。】

设 A 是 $f(z)=0$ 或 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的根集，它是允许有重元的有限集合，若 $z_0=a+iy_0$ 是 A 的元素，记作 $z_0=a+iy_0\in A$；若 $z_0=a+iy_0$ 是 A 的 l 重元素，记作

$a+iy_0=z_0(l)\in A$；若 $z_0=a+iy_0$ 是 A 的 l 重以上(含 l 重)元素，记作 $a+iy_0=z_0(\geq l)\in A$。

推论 1 设 $a\in R$，将由 $f(z)=0$ 和由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)组成的集合分别记为 A 和 B，则 $A=B$，于是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)就是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)。

证明 由题设，则 A 和 B 是两个允许有重元的有限集合，不妨 $y_0\in R$，于是 $\forall$ $z_0=a+iy_0\in A$，$a+iy_0=z_0(l)\in A$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，且是 l 重根，根定理 11，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根，故 $a+iy_0=z_0(l)\in B$。

反过来，$\forall$ $z_0=a+iy_0\in B$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，根据定理 11，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，$z_0=a+iy_0\in A$。

根据预章定理 1，则 $A=B$，于是命题成立。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)。

证明 必要性不妨设 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根，充分性不妨设 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，根据推论 1 即得。】

定理 12 设 $a\in R$，$y_j\in R$，$1\leq K'\leq n$，则 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)的充要条件是：y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是方程 $(4)^a$ 的所有实根(含重根)。

证明 由定理 11 推论 1 和定理 1 推论 4 即得。】

若 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上有 K' 个根，由定理 12，则 $(4)^a$ 有 K' 个实根，这 K' 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 K' 个根的虚部。

定理 13 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)的充要条件是：y_j，$-y_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $(4)^a$ 的所有非 0 实根(含重根)。

证明 由定理 11 推论 2 和定理 1 推论 5 即得。】

设 $(4)^a$ 实根(含重根)的个数为 K'，非 0 实根(含重根)对数为 $k^{(1)}$，0 是 $(4)^a$ 的 l 重根，

由定理 12 和 13，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根(含重根)的个数为 K'，共轭根(含重根)的对数为 $k^{(1)}$， $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，且 $K'=l+2k^{(1)}$。

§4 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集

定义 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，$1\le K\le n$，$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 K 个根，记 $B_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$。

假设对 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，当 $y_{j_1}\ne 0$ 时，均能找到 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 B_a 的 l 重元素，那么就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 严格对称要求的一对 l 重元素；当 $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in B_a$，$z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $z_{j_1}=a$ 是 B_a 的 l_1 重元素，就称 $z_{j_1}=a$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 严格对称要求的一个 l_1 重元素。

满足上述条件就称 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的一个根集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的 K 个根。

例设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，假如 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的任意一个元素，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，就能推导出 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，即由

$$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a,\quad a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a^{\#}。$$

则 B_a 是 $B_a^{\#}$ 的子集，即 $B_a\subset B_a^{\#}$。当且仅当 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a^{\#}\subset B_a$ 时，$B_a=B_a^{\#}$。当且仅当 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\ne B_a^{\#}$ 时，B_a 是 $B_a^{\#}$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质**设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，l 为非负整数，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，1) 若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，$l=0$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$；2) 若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，$l\ge 1$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$；3) 若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，则 $l\ge 1$；4) 若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$B_a\subset B_a^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$。

在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集合 B_a 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$ 且 $y_{j_1}\ne 0$，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的

根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 的充要条件是：$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$。

证明必要性显然成立，证充分性。若 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$，即 $z_{j_2}=a+iy_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$，于是 $y_{j_2}=-y_{j_1}\neq 0$，由定义 1，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}=a-iy_{j_2}\in B_a$。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$ 且 $y_{j_1}\neq 0$，l 为非负整数，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 也是 B_a 的 l 重元素，并且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 B_a 的一对 l 重元素。

证明 $l\geq 1$ 时，由定义 1，命题成立；$l=0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 0 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$，由性质 1，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a$，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 也是 B_a 的 0 重元素，命题也成立。】

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素。

证明证必要性。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，由题设 1) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in B_a$ 且 $z_{j_1}=a\in B_a^{\#}$，$z_{j_1}=a$ 是 B_a 的 l 重元素，由定义 1 则 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，再由定义 1 则 $z_{j_1}=a$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，命题成立。2) $y_{j_1}\neq 0$ 时，由性质 2，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 也是 B_a 的 l 重元素。假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由定义 1 则 $l=\min(l_1,l_2)$。不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l_0 重元素，由性质 2，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 也是 $B_a^{\#}$ 的 l_0 重元素，再由定义 1 则 $l_0=\min(l_1,l_2)=l$，故 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，命题也成立。充分性同理可证。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $B_a\subset B_a^{\#}$，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 也是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，即由 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a^{\#}$。

证明由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $B_a\subset B_a^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个

根集，若 $B_a^\#$ 的任何一个元素都属于 B_a，即由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^\# \Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，则 $B_a^\# \subset B_a$。

证明由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^\# \Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，由性质 3，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^\#$ 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，即由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^\#$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a^\# \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，故 $B_a^\# \subset B_a$。】

推论 3 设 $a\in R$，B_a 和 $B_a^\#$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，$B_a \subset B_a^\#$ 且 $B_a \neq B_a^\#$，则 $B_a^\#$ 至少有一个元素不属于 B_a。

证明由题设则 $B_a^\# \not\subset B_a$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^\#$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，若 $B_a^\#$ 至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^\# \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a,\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0；$$

若 $y_{j_1}\neq 0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a^\# \text{ 且 } z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a,\quad f(z_{j_2})=f(a-iy_{j_1})=0。$$

证明由性质 1 即得。】

定义 2 设 $a\in R$，$1\le K\le n$，$B_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，并且不存在 $B_a^\#$，使 $B_a \subset B_a^\#$ 且 $B_a \neq B_a^\#$，$B_a^\#$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，则称 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部根。

性质 5 设 $a\in R$，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集的充要条件是：B_a 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部根组成的集合。

证明由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，

则 $z_{j_1}=a\in B_a$。

证明用反证法。1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$ 不成立，那么 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$ 或 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a$，由性质 1 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a$。由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $l\geq 1$。令 $B_a^{\#}$ 包含 B_a 的一切元素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，于是找到根集合 $B_a^{\#}$，使 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集合。但这与 B_a 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$。

2) $y_{j_1}=0$ 时，假设 $z_{j_1}=a\notin B_a$，由于 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，不妨设 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$。令 $B_a^{\#}$ 包含 B_a 的一切元素，$z_{j_1}=a$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l_1 重元素，于是找到根集合 $B_a^{\#}$，使 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集合。但这与 B_a 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a\in B_a$。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a$，则 B_a 还不是根全集；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，$z_{j_1}=a\notin B_a$，则 B_a 还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对复根(即 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 至少有一个不是 $f(z)=0$ 的根)；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a\notin B_a$，则 $z_{j_1}=a$ 不是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由性质 6 即得。】

性质 7 设 $a\in R$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根集，其中 B_a 为根全集，则 $B_a^{\#}\subset B_a$。

证明 用反证法：假如 $B_a^{\#}\not\subset B_a$，由性质 3 推论 2，则 $B_a^{\#}$ 至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}\text{且}z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a\text{，}\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$$

若 $y_{j_1}\neq 0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a^{\#}\text{且}z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a\text{，}\quad f(z_{j_2})=f(a-iy_{j_1})=0$$

那么 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a$，由性质 6 推论 1，则 B_a 还不是根全集，矛盾。2) $y_{j_1}=0$ 时，$f(z_{j_1})=f(a)=0$，$z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，$z_{j_1}=a\notin B_a$，由性质 6 推论 1，则 B_a 还不是根全集，矛盾。所以 $B_a^{\#}\subset B_a$。】

推论 设 $a\in R$，若 B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个根全集，则 $B_a=B_a^{\#}$。

证明 由性质 7，则 $B_a^{\#}\subset B_a$ 且 $B_a\subset B_a^{\#}$，故 $B_a=B_a^{\#}$。】

定理 1 设 $a\in R$，$1\le K\le n$，$B_a=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，则 B_a 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集。

证明 由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则 $Q(a)=0$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，故 B_a 的所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 K 个根。

假设 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，那么

1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，由 $F_m(z-a)=0$ 根的性质 1，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，于是 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$，从而 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根。不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\ge 1$，$l_2\ge 1$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $l\ge 1$。由§3 定理 10 推论 1，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的一对 l 重根，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 B_a 的 l 重元素，因而 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 严格对称要求的一对 l 重元素。

2) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in B_a$，$z_{j_1}=a$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 的也是 $f(z)=0$ 的实根，不妨设 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\ge 1$，由§3 定理 6，则 $z_{j_1}=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l_1 重根，

于是 $z_{j_1}=a$ 是 B_a 的 l_1 重元素，因而 $z_{j_1}=a$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 严格对称要求的一个 l_1 重元素。

因此，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集合。再证 B_a 是根全集，用反证法：假设 B_a 还不是根全集，那么一定存在 $B_a^{\#}$，使 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，由性质 3 推论 3，则 $B_a^{\#}$ 中至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}\text{ 且 }z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a,\quad f\left(z_{j_1}\right)=f\left(a+iy_{j_1}\right)=0$$

若 $y_{j_1}\neq 0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a^{\#}\text{ 且 }z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin B_a,\quad f\left(z_{j_2}\right)=f\left(a-iy_{j_1}\right)=0$$

那么 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由§3 定理 8 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$，矛盾。2) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\notin B_a$，$f\left(z_{j_1}\right)=f(a)=0$，$z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的根，由§3 定理 6，则 $z_{j_1}=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，$z_{j_1}=a\in B_a$，矛盾。所以 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集。】

推论 1 设 $a\in R$，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 充分性由定理 1 即得；再证必要性。若 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集，则 $Q(a)=0$，$F_m(z-a)=0$ 关于 z 的次数 $K\geq 1$，不妨设 $B_a^{\#}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，由定理 1，则 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集，由性质 7 推论，则 $B_a=B_a^{\#}$，因此 B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。】

推论 2 设 $a\in R$，则 B_a 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，l_1,l_2,l均为非负整数，B_a是$f(z)=0$在z平面上关于点a严格对称的根全集，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$时，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是B_a的一对l重元素的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。其中$y_{j_1}\in R$时，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对l重共轭根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是B_a的一对l重元素。2) $y_{j_1}=0$时，则$z_{j_1}=a$是$f(z)=0$的l_1重根的充要条件是：$z_{j_1}=a$是B_a的l_1重元素。

证明 由题意根据推论 1，则$Q(a)=0$，B_a是由$F_m(z-a)=0$在z平面上的所有根(含重根)组成的集合，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$F_m(z-a)=0$的一对l重根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是B_a的一对l重元素。再由题意根据§3 定理 10 推论 1 即得。其中$y_{j_1}\in R$时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的一对l重共轭根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是B_a的一对l重元素。再由§3 定理 10 推论 2 即得。2) $y_{j_1}=0$时，$z_{j_1}=a$是$F_m(z-a)=0$的l_1重根的充要条件是：$z_{j_1}=a$是B_a的l_1重元素。再由§3 定理 6 即得。】

引理 设$a\in R$，$y_j\in C$，则$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$严格对称的全部根的充要条件是：$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$是$F_m(z-a)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)。

证明 令$B_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设$a\in R$，$y_j\in C$，$1\le K\le n$，则$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$严格对称的全部根的充要条件是：$y_j\ (j=1,2,\cdots,K)$是方程$(4)^a$的所有复根(含重根)。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 1 即得。】

推论设$a\in R$，$Q(a)=0$，则$f(z)=0$在z平面上关于点a严格对称的根的个数等于$(4)^a$的次数。

证明 由定理 2 即得。】

§5 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集

定义 1 设整数 $n \geq 2$，$a \in R$，$Q(a)=0$，$y_j \in C$ 且 $y_j \neq 0$，$1 \leq k \leq \left[\frac{n}{2}\right]$，而 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 k 对非 a 根，记

$$B_@=\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j \in C\text{且}y_j \neq 0, j=1,2,\cdots,k\}$$

假设 $\forall$ $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \in B_@$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0} \in B_@$，即 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的任意一对元素，若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_@$ 的 l 重元素，那么就称 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 严格对称要求的一对 l 重元素。

满足上述条件就称 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的一个非 a 根集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的 k 对非 a 根。

例 设 $a \in R$，$y_{j_0} \in C$ 且 $y_{j_0} \neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^\#$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，假如 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的任意一对元素，若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素，就能推导出 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^\#$ 的一对 l 重元素，即由 $\forall$ $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \in B_@$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0} \in B_@$，$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l) \in B_@$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l) \in B_@ \Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l) \in B_@^\#$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l) \in B_@^\#$，则 $B_@$ 是 $B_@^\#$ 的子集，即 $B_@ \subset B_@^\#$。当且仅当 $B_@ \subset B_@^\#$ 且 $B_@^\# \subset B_@$ 时，$B_@=B_@^\#$。当且仅当 $B_@ \subset B_@^\#$ 且 $B_@ \neq B_@^\#$ 时，$B_@$ 是 $B_@^\#$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质** 设 $a \in R$，$y_{j_0} \in C$ 且 $y_{j_0} \neq 0$，l 为非负整数，$B_@$ 和 $B_@^\#$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，1)若 $a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l) \in B_@$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l) \in B_@$，且 $l=0$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \notin B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0} \notin B_@$。2)若 $a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l) \in B_@$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l) \in B_@$，且 $l \geq 1$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0} \in B_@$。3)若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0} \in B_@$，

$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@$，则 $l\geq 1$。4)若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$，且 $B_@\subset B_@^{\#}$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^{\#}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^{\#}$。

在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集合 $B_@$ 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$ 的充要条件是：$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，l 为非负整数，$B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的 l 重元素。

证明 $l\geq 1$ 时，由定义 1，命题成立；$l=0$ 时，由性质 1，命题也成立。】

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$ 且 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^{\#}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^{\#}$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^{\#}$ 的一对 l 重元素。

证明 不妨假设 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根。证必要性。若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素，由定义 1 则 $l=\min(l_1,l_2)$，再由定义 1 则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^{\#}$ 的一对 l 重元素。充分性同理可证。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$，且 $B_@\subset B_@^{\#}$，若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 也是 $B_@^{\#}$ 的一对 l 重元素，即由

$$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@,\ a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@^{\#},\ a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@^{\#}。$$

证明 由于 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$，且 $B_@\subset B_@^{\#}$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^{\#}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^{\#}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对

称的二个非 a 根集，若 $B_@^\#$ 的任何一对元素都属于 $B_@$，即由 $\forall\ z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^\#$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^\# \Rightarrow z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$，则 $B_@^\#\subset B_@$。

证明 由 $\forall\ z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^\#$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^\# \Rightarrow z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@$，由性质 3，若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^\#$ 的一对 l 重元素，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素，即由 $\forall\ z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^\#$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^\#$，$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@^\#$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@^\# \Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@$，故 $B_@^\#\subset B_@$。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^\#$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，若 $B_@\subset B_@^\#$ 且 $B_@\neq B_@^\#$，则 $B_@^\#$ 至少有一对元素不属于 $B_@$。

证明 由题设则 $B_@^\#\not\subset B_@$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^\#$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，若 $B_@^\#$ 至少有一对元素不属于 $B_@$，设为 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$，则显然有 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^\#$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^\#$ 且 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin B_@$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin B_@$，$f(z_{j_01})=f(a+iy_{j_0})=0$，$f(z_{j_02})=f(a-iy_{j_0})=0$。

定义 2 设整数 $n\geq 2$，$a\in R$，$1\leq k\leq\left[\frac{n}{2}\right]$，集合

$$B_@=\{z_{j1}=a+iy_j,z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C\text{且}y_j\neq 0,j=1,2,\cdots,k\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集，并且不存在 $B_@^\#$，使 $B_@\subset B_@^\#$ 且 $B_@\neq B_@^\#$，$B_@^\#$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集，则称 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根。

性质 5 设 $a\in R$，则 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集的充要条件是：$B_@$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，$B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的

非 a 根全集，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则

$$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_{@} \text{ 且 } z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_{@}\text{。}$$

证明 证明方法与§4 性质 6.1)相同予以省略。】

推论 1 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根， $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_{@}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_{@}$，则 $B_{@}$ 还不是非 a 根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_{@}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_{@}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对复根(即 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 至少有一个不是 $f(z)=0$ 的根)。

证明 由性质 6 即得。】

性质 7 设 $a\in R$，$B_{@}$ 和 $B_{@}^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根集，其中 $B_{@}$ 为非 a 根全集，则 $B_{@}^{\#}\subset B_{@}$。

证明 用反证法：假如 $B_{@}^{\#}\not\subset B_{@}$，由性质 3 推论 2，则 $B_{@}^{\#}$ 至少有一对元素不属于 $B_{@}$，设为 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$，其中 $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，由性质 4，则有

$$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_{@}^{\#},\quad z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_{@}^{\#} \text{ 且 } z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_{@},\quad z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_{@},$$

$$f(z_{j_0 1})=f(a+iy_{j_0})=0,\quad f(z_{j_0 2})=f(a-iy_{j_0})=0$$

于是 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根。由性质 6 推论 1 则 $B_{@}$ 还不是非 a 根全集，矛盾。所以， $B_{@}^{\#}\subset B_{@}$。】

推论 设 $a\in R$，若 $B_{@}$ 和 $B_{@}^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的二个非 a 根全集，则 $B_{@}=B_{@}^{\#}$。

证明 由性质 7 即得。】

定理 1 设整数 $n\geq 2$， $a\in R$， $1\leq k\leq\left[\frac{n}{2}\right]$，集合

$$B_{@}=\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j\in C\text{且}y_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k\}$$

是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合，则 $B_{@}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集。

证明 由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则 $Q(a)=0$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，故集合 $B_{@}$ 的所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 k 对非 a 根。

假设 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_{@}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_{@}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对非 a 复根。不妨设 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $l\geq 1$。由§3 定理 10 推论 1，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重非 a 根，因此 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_{@}$ 的 l 重元素，于是 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_{@}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 严格对称要求的一对 l 重元素。

因此，$B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集合。再证 $B_{@}$ 是非 a 根全集，用反证法：假设 $B_{@}$ 还不是非 a 根全集，那么一定存在 $B_{@}^{\#}$，使 $B_{@}\subset B_{@}^{\#}$ 且 $B_{@}\neq B_{@}^{\#}$，$B_{@}^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根集，由性质 3 推论 3，则 $B_{@}^{\#}$ 至少有一对元素不属于 $B_{@}$，设为 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$，其中 $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$，由性质 4，则有

$$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_{@}^{\#},\quad z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_{@}^{\#}\text{ 且 }z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_{@},\quad z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_{@},$$

$$f(z_{j_0 1})=f(a+iy_{j_0})=0,\quad f(z_{j_0 2})=f(a-iy_{j_0})=0$$

故 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对非 a 复根。由§3 定理 8 推论 2 则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对非 a 复根，于是 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_{@}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_{@}$，矛盾。所以 $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集。】

以下推论为叙述简便，说 $B_{@}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根组成的集合时，默认 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上非 a 根的对数 $k\geq 1$。

推论 1 设 $a\in R$，则 $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集的充

要条件是：$Q(a)=0$，$B_@$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合。

证明 由定理 1 和性质 7 推论即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $B_@$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_@$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l_1,l_2,l 均为非负整数，$B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集，于是 $y_{j_0}\neq 0$ 时，若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。其中 $y_{j_0}\in R$ 时，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素。

证明 由题意根据推论 1，则 $Q(a)=0$，$B_@$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根组成的根集，于是 $y_{j_0}\neq 0$ 时，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素。再由题意根据§3 定理 10 推论 1 即得。其中 $y_{j_0}\in R$ 时，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素。再由§3 定理 10 推论 2 即得。】

引理 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有非 a 根(含重根)。

证明 令 $B_@=\{z_{j1}=a+iy_j,z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C且y_j\neq 0,j=1,2,\cdots,k\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设整数 $n\geq 2$，$a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，$1\leq k\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根的充要条件是：y_j，$-y_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是方程 $(4)^a$ 的所有非 0 复根(含重根)。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 6 即得。】

设 $a \in R$， $Q(a)=0$，则 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K \geq 1$，可将 $f_m(y)$ 写成**规范形式**

$$f_m(y)=y^l\left[a_{m0}y^{2k}-a_{m1}y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1}y^2+(-1)^k a_{mk}\right] \qquad (4)^a$$

其次数 $K=l+2k \geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0} \neq 0$， $a_{mk} \neq 0$，且 $a_{m0},a_{m1},\cdots,a_{mk}$ 均为实数。于是 $(4)^a$ 复根和非 0 复根的个数分别为 K 和 $2k$，0 是 $(4)^a$ 的 l 重根，由§4 和§5 定理 2，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根和非 a 根的个数分别为 K 和 $2k$， $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，且 $K=l+2k$。

根全集 B_a 与非 a 根全集 $B_@$ 的**关系性质**

设 $a \in R$， K 为正整数，l 为非负整数， $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集 B_a 和非 a 根全集 $B_@$ 的元素个数分别为 K 和 $2k$， $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则

$$B_a=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}\cup B_@，\quad K=l+2k。$$

证明 根据§4 和§5 定理 1 推论 1，则 $Q(a)=0$， B_a 和 $B_@$ 分别是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)和所有非 a 根(含重根)组成的集合；根据§3 定理 6，则 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合是由所有 a 根和所有非 a 根组成，其中所有 a 根组成的集合是 $\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}$，于是

$$B_a=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}\cup B_@。$$

由于是两个允许有重元有限集合的并运算，因此并集 B_a 的元素个数就等于这两个集合的元素个数之和，即 $K=l+2k$。】

$(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 还可写成**标准式**

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^a$$

其次数 $K=l+2k \geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0} \neq 0$，$\lambda_k \neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，当 $k=0$ 时，$\lambda_k=\lambda_0=1$。又 $F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)=i^{l+2k}f_m(y)$，

于是 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l[(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k]$

若 k 为正整数，可进一步细化，令

$$p(y^2)=y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k\text{，则}$$

$$f_m(y)=a_{m0}y^l p(y^2)$$

该 $p(y^2)$ 称为点 a 的 $p(y^2)$，将 $p(y^2)=0$ 视为关于 y 的 $2k$ 次方程。由于 $\lambda_k\neq 0$，0 不是 $p(y^2)=0$ 的根。设 $y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，若 y_j，$-y_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $p(y^2)=0$ 的所有复根，则它们是 $(4)^a$ 所有非 0 复根。

再令 $P((iy)^2)=i^{2k}p(y^2)$，$z=a+iy$，则 $P((z-a)^2)=P((iy)^2)=i^{2k}p(y^2)$，于是

$$P((z-a)^2)=(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k\text{，则}$$

$$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P((z-a)^2)$$

$P((z-a)^2)$ 是 $(z-a)^2$ 的实系数 k 次多项式，也是 z 的实系数 $2k$ 次多项式。

设 $a\in R$，$y_0\in C$，$z_0=a+iy_0$，$P((z-a)^2)$ 在 $z=z_0$ 的函数值 $P((z_0-a)^2)=P((iy_0)^2)=i^{2k}p(y_0^2)=0$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $P((z-a)^2)=0$ (在 z 平面上) 的一个(复)根。显然，$z_0=a+iy_0$ 是 $P((z-a)^2)=0$ 的根的充要条件是：$(z-z_0)\mid P((z-a)^2)$。

再设 l 为非负整数，若 $(z-z_0)^l\mid P((z-a)^2)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $P((z-a)^2)$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $P((z-a)^2)=0$ (在 z 平面上)的 l 重(复)根。

$P((z-a)^2)=P((iy)^2)$ 的**整除性质**　设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z=a+iy$，$z_0=a+iy_0$，则 $(z-z_0)^l\mid P((z-a)^2)$ 充要条件是：$(y-y_0)^l\mid P((iy)^2)$。

它与 $f(z)=f(a+iy)$ 具有相同的整除性质，仅有形式差异。故 $z_0=a+iy_0$ 是 $P((z-a)^2)=0$ 的根的充要条件是：$(y-y_0)\mid P((iy)^2)$；$z_0=a+iy_0$ 是 $P((z-a)^2)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid P((iy)^2)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $P((iy)^2)$。

由于 $\lambda_k\neq 0$，$z_0=a$ 不是 $P((z-a)^2)=0$ 的根，于是 $P((z-a)^2)=0$ 在 z 平面上的 $2k$ 个根均不等于 a，$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P((z-a)^2)$，所以 $P((z-a)^2)=0$ 在 z 平面上的 $2k$ 个根就是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根。于是有

定理 3　设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是

$P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)。

推论 1 设 $a\in R$，则 $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_{@}$ 是由 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由定理 3 和定理 1 推论 1 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $B_{@}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_{@}$ 是由 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由定理 3 和定理 1 推论 2 即得。】

例 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则

1) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)；

2) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)的充要条件是：y_j，$-y_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $(4)^a$ 所有非 0 复根。

证明 1)由定理 3 推论 2 即得；2)由 1)根据定理 2 即得。】

定理 4 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，若 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)，则它们既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)。

证明 由 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$，根据§3 定理 11 推论 2 即得。】

§6 在 *z* 平面上关于点 *a* 单层对称的根全集

定义 1 设 $a\in R$， $Q(a)=0$， $y_j\in C$， $1\le\underline{K}\le n$， $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\underline{K}$ 个各不相同的根，记 $\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$。

假设对 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$， 当 $y_{j_1}\ne 0$ 时， 均能找到 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$， 于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$， $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根， $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 $\underline{B_a}$ 的单元素，那么就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 单层对称要求的一对单元素；当 $y_{j_1}=0$ 时， $z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$， $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根， $z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，就称 $z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 单层对称要求的一个单元素。

满足上述条件就称 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的一个根集，且称其所有其元素 $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的 $\underline{K}$ 个各不相同的根。

显然，若 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集，则 $\underline{B_a}$ 的任意一个元素都是单元素，即 $\underline{B_a}$ 是不允许有重元的 Cantor 集合。

在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集合 $\underline{B_a}$ 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$， $y_{j_1}\in C$ 且 $y_{j_1}\ne 0$， $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 的充要条件是： $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设 $a\in R$， $y_{j_1}\in C$， $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 的充要条件是： $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 3 设 $a\in R$， $y_{j_1}\in C$， $\underline{B_a}$ 和 $\underline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的二个根集， $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^{\#}}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 既是 $\underline{B_a}$ 的单元素，也是 $\underline{B_a^{\#}}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$， $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a^{\#}}$。

证明 由性质 2 即得。】

推论 1 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的二个根集，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$且$\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$既是$\underline{B_a}$的单元素，也是$\underline{B_a^{\#}}$的单元素，即$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a^{\#}}$。

证明 $\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$都是 Cantor 集合，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$且$\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^{\#}}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的二个根集，$\underline{B_a^{\#}}$的任何一个元素都属于$\underline{B_a}$，即由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^{\#}}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，则$\underline{B_a^{\#}}\subset\underline{B_a}$。

证明 由 Cantor 集合子集定义即得。】

推论 3 设$a\in R$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的二个根集，$\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$且$\underline{B_a}\neq\underline{B_a^{\#}}$，则$\underline{B_a^{\#}}$至少有一个元素不属于$\underline{B_a}$。

证明 由题设则$\underline{B_a^{\#}}\not\subset\underline{B_a}$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的二个根集，若$\underline{B_a^{\#}}$至少有一个元素不属于$\underline{B_a}$，设它为$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^{\#}}\text{ 且 }z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a},\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0;$$

若$y_{j_1}\neq0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a^{\#}}\text{ 且 }z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\underline{B_a},\quad f(z_{j_2})=f(a-iy_{j_1})=0\text{。}$$

证明 由性质 1 即得。】

定义 2 设$a\in R$，$1\le\underline{K}\le n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$单层对称的根集，并且不存在$\underline{B_a^{\#}}$，使$\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$且$\underline{B_a}\neq\underline{B_a^{\#}}$，$\underline{B_a^{\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$单层对称的根集，则称$\underline{B_a}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$单层对称的根全集，且称其所有元素$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$对称的全部各不相同的根。

性质 5 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，则$\underline{B_a}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的根全集

的充要条件是：$\underline{B_a}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，则 $z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$。

证明 用反证法。1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 不成立，那么 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 或 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，由性质 1，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$。

由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，令 $\underline{B_a^{\#}}$ 包含 $\underline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 $\underline{B_a^{\#}}$ 的单元素，于是找到根集合 $\underline{B_a^{\#}}$，使 $\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$ 且 $\underline{B_a}\neq\underline{B_a^{\#}}$，$\underline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集合。但这与 $\underline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$。

2) $y_{j_1}=0$ 时，假设 $z_{j_1}=a\notin\underline{B_a}$，由于 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，令 $\underline{B_a^{\#}}$ 包含 $\underline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a^{\#}}$ 的单元素，于是找到根集合 $\underline{B_a^{\#}}$，使 $\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$ 且 $\underline{B_a}\neq\underline{B_a^{\#}}$，$\underline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于 a 点单层对称的根集合。但这与 $\underline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集，1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，$z_{j_1}=a\notin\underline{B_a}$，则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集，1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对复根；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a\notin\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a$ 不是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由性质 6 即得。】

下面性质 7 及推论的证明方法与§4 性质 7 及推论相同予以省略。

性质 7 设 $a\in R$，$\underline{B_a}$ 和 $\underline{B_a^\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的二个根集，其中 $\underline{B_a}$ 为根全集，则 $\underline{B_a^\#}\subset\underline{B_a}$。

推论 设 $a\in R$，若 $\underline{B_a}$ 和 $\underline{B_a^\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的二个根全集，则 $\underline{B_a}=\underline{B_a^\#}$。

定理 1 设 $a\in R$，$1\le\underline{K}\le n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的根集，则 $\underline{B_a}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集。

证明 由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则 $Q(a)=0$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，故 $\underline{B_a}$ 的所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\underline{K}$ 个各不相同的根。

假设 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，那么

1) $y_{j_1}\ne0$ 时，由 $F_m(z-a)=0$ 根的性质 1，则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 也是 $F_m(z-a)=0$ 的根，并且 $z_{j_1}\ne z_{j_2}$，故 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 $\underline{B_a}$ 的单元素，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 单层对称要求的一对单元素。

2) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$，$z_{j_1}=a$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 的也是 $f(z)=0$ 的实根，$z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，因此 $z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 单层对称要求的一个单元素。

因此，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集合。再证 $\underline{B_a}$ 是根全集，用反证法：假设 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，那么一定存在 $\underline{B_a^\#}$，使 $\underline{B_a}\subset\underline{B_a^\#}$ 且 $\underline{B_a}\ne\underline{B_a^\#}$，$\underline{B_a^\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集，由性质 3 推论 3，则 $\underline{B_a^\#}$ 中至少有一个元素不属于 $\underline{B_a}$，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^\#}\text{ 且 }z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a},\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$$

若 $y_{j_1}\ne0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in \underline{B_a^{\#}}\text{ 且 }z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin \underline{B_a}，\quad f\left(z_{j_2}\right)=f\left(a-iy_{j_1}\right)=0$$

那么 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由§3 定理 8，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对复根，并且 $z_{j_1}\neq z_{j_2}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in \underline{B_a}$，矛盾。2) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\notin \underline{B_a}$，$f\left(z_{j_1}\right)=f(a)=0$，$z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的根，由§3 定理 6，则 $z_{j_1}=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，于是 $z_{j_1}=a\in \underline{B_a}$，矛盾。所以，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集。】

推论 1 设 $a\in R$，则 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，$\underline{B_a}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的集合。

证明 由定理 1 和性质 7 推论即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $\underline{B_a}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，$\underline{B_a}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集，于是 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对非 a 复根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的一对单元素。2) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素。

证明 由题意根据推论 1，则 $Q(a)=0$，$\underline{B_a}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的集合。于是 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对非 a 复根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的一对单元素。再由§3 定理 8 推论 2 即得。2) $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根的充要条件是：$z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素。再由§3 定理 6 即得。】

引理 设 $a\in R$，$y_j\in C$，则 $z_j=a+iy_j\ \left(j=1,2,\cdots,\underline{K}\right)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根的充要条件是：$z_j=a+iy_j\ \left(j=1,2,\cdots,\underline{K}\right)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根。

证明 令 $\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设 $a\in R$，$y_j\in C$，$1\le \underline{K}\le n$，则 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根的充要条件是：y_j $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是方程 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 2 即得。】

设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\ne 0$，$1\le \underline{K}\le n$，l 为非负整数，n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的各不相同的根个数为 $\underline{K}$，若 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P((z-a)^2)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由§3 定理 6，则 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根，$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P((z-a)^2)$，于是

1. $l\ge 1$ 时，$z=a$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，从而它们也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根，$\underline{K}=1+2s$。

2. $l=0$ 时，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，从而它们也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根，$\underline{K}=2s$。

推论 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\ne 0$，l 为非负整数，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，于是 1) $l\ge 1$ 时，$z=a$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根的充要条件是：0，y_j，$-y_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根。2) $l=0$ 时，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根的充要条件是：y_j，$-y_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根。

证明 由题意根据定理 2 即得。】

当 $(f(z), f'(z))=1$ 时，$f(z)=0$ 的根均为单根，$a\in R$，若 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，根据定义，则 B_a 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根集，这时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in B_a$。

定义 设$a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$\underline{B_a}$和B_a分别是$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的根集合和严格对称的根集合，假如由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1) \in \underline{B_a}$ $\Rightarrow$ $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1) \in B_a$，则称$\underline{B_a}$是$B_a$的子集，或者说$B_a$包含$\underline{B_a}$，记作$\underline{B_a} \subset B_a$或$B_a \supset \underline{B_a}$。当$\underline{B_a}$不是$B_a$的子集时，通常记作$\underline{B_a} \not\subset B_a$。反过来，假如由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_a$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1) \in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1) \in \underline{B_a}$，则称$B_a$是$\underline{B_a}$的子集，或者说$\underline{B_a}$包含$B_a$，记作$B_a \subset \underline{B_a}$或$\underline{B_a} \supset B_a$。当$B_a$不是$\underline{B_a}$的子集时，通常记作$B_a \not\subset \underline{B_a}$。当且仅当$\underline{B_a} \subset B_a$且$B_a \subset \underline{B_a}$时，称$\underline{B_a}$与$B_a$相等，记作$\underline{B_a}=B_a$；当且仅当$\underline{B_a} \subset B_a$且$\underline{B_a} \neq B_a$时，称$\underline{B_a}$是$B_a$的真子集。

性质 设$a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的根集合$\underline{B_a}$和严格对称的根集合B_a的元素个数分别为$\underline{K}$和K，1) 若$\underline{B_a} \subset B_a$，则$\underline{K} \leq K$；若$\underline{B_a}=B_a$，则$\underline{K}=K$；若$\underline{B_a} \subset B_a$且$\underline{B_a} \neq B_a$，则$\underline{K}<K$；若$\underline{B_a} \subset B_a$，$\underline{K}=K$，则$\underline{B_a}=B_a$。2) 若$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，$\underline{B_a} \subset B_a$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_a$。

设$a \in R$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$单层对称的根全集，利用$\underline{B_a}$可以生成$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$严格对称的根全集$B_a$，方法如下：假设$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，那么

1. $y_{j_1} \neq 0$时，由性质 1，则$z_{j_2}=a-iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，于是$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$f(z)=0$的一对复根，令$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_a$且$z_{j_2}=a-iy_{j_1} \in B_a$。若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根，则$l_1 \geq 1$，$l_2 \geq 1$，记$l=\min(l_1,l_2)$，则$l \geq 1$，令$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$都是$B_a$的$l$重元素，于是$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$B_a$的符合$f(z)=0$的根在$z$平面上关于点$a$严格对称要求的一对$l$重元素。

2. $y_{j_1}=0$时，$z_{j_1}=a \in \underline{B_a}$，则$z_{j_1}=a$是$f(z)=0$的实根，令$z_{j_1}=a \in B_a$。若$z_{j_1}=a$是$f(z)=0$的$l_1$重根，则$l_1 \geq 1$，令$z_{j_1}=a$是$B_a$的$l_1$重元素，于是$z_{j_1}=a$是$B_a$的符合$f(z)=0$的根在$z$平面上关于点$a$严格对称要求的一个$l_1$重元素。

在对$\underline{B_a}$的每一个元素都进行了上述操作之后，由此生成的B_a符合z平面上严格对称根集合的定义，因此B_a是$f(z)=0$在z平面上关于点a严格对称的根集，下面进一步证明它是根全集。

定理 3 设 $a \in R$，$1 \le \underline{K} \le n$，$\underline{B_a} = \{z_j = a + iy_j \mid y_j \in C, j = 1,2,\cdots,\underline{K}\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a}$ 用上述方法所生成的 B_a 的元素个数为 K，$y_{j_1} \in C$，则 1) $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in \underline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$；2) B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于 a 点严格对称的根全集；3) $\underline{B_a} \subset B_a$，$\underline{K} \le K$。

证明 由题设，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，而且

1) 必要性显然，证充分性。若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$，于是① $y_{j_1} \ne 0$ 时，由§4 性质 1，则 $z_{j_2} = a - iy_{j_1} \in B_a$，从而 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由性质 6，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2} = a - iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，故 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in \underline{B_a}$；② $y_{j_1} = 0$ 时，$z_{j_1} = a \in B_a$，$z_{j_1} = a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，由性质 6，则 $z_{j_1} = a \in \underline{B_a}$。故充分性成立。

2) 用反证法：假设 B_a 还不是根全集，那么一定存在 $B_a^\#$，使 $B_a \subset B_a^\#$ 且 $B_a \ne B_a^\#$，$B_a^\#$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集，由§4 性质 3 推论 3，则 $B_a^\#$ 至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1} \in C$，由§4 性质 4，则有

$$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a^\# \text{ 且 } z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a, \quad f(z_{j_1}) = f(a + iy_{j_1}) = 0;$$

若 $y_{j_1} \ne 0$，则还有

$$z_{j_2} = a - iy_{j_1} \in B_a^\# \text{ 且 } z_{j_2} = a - iy_{j_1} \notin B_a, \quad f(z_{j_2}) = f(a - iy_{j_1}) = 0 。$$

那么① $y_{j_1} \ne 0$ 时，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$ 且 $z_{j_2} = a - iy_{j_1} \notin B_a$，由 1) 则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2} = a - iy_{j_1} \notin \underline{B_a}$，由性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。② $y_{j_1} = 0$ 时，$f(z_{j_1}) = f(a) = 0$，$z_{j_1} = a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，$z_{j_1} = a \notin B_a$，由 1) 则 $z_{j_1} = a \notin \underline{B_a}$，由性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。所以 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集。

3) 假设 $\forall\ z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，那么① $y_{j_1} \ne 0$ 时，由性质 1 则 $z_{j_2} = a - iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，于是 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 都是 $\underline{B_a}$ 的单元素，即 $a + iy_{j_1} = z_{j_1}(1) \in \underline{B_a}$，$a - iy_{j_1} = z_{j_2}(1) \in \underline{B_a}$。不妨设 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \ge 1$，$l_2 \ge 1$，记 $l = \min(l_1, l_2)$，则 $l \ge 1$，由 B_a 生成法，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 都是 B_a 的 l 重元素，因此 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a - iy_{j_1}$ 都

是 B_a 的 1 重以上元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$， $a-iy_{j_1}=z_{j_2}(\geq 1)\in B_a$。于是由

$$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in \underline{B_a} \Rightarrow \quad a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a。$$

② $y_{j_1}=0$ 时， $z_{j_1}=a\in \underline{B_a}$， 则 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根， $z_{j_1}=a$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，即 $a=z_{j_1}(1)\in \underline{B_a}$。不妨设 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$，由 B_a 生成法，则 $z_{j_1}=a$ 是 B_a 的 l_1 重元素，因此 $z_{j_1}=a$ 是 B_a 的 1 重以上元素，即 $a=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$。于是由

$$a=z_{j_1}(1)\in \underline{B_a} \Rightarrow a=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a。$$

总之，由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$， $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in \underline{B_a} \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$。于是 $\underline{B_a}\subset B_a$。又 $\underline{B_a}$ 和 B_a 的元素个数分别为 $\underline{K}$ 和 K，所以 $\underline{K}\leq K$。】

若 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集，则其任意一个元素都是 1 重的，即 $\underline{B_a}$ 的元素一定各不相同。B_a 是利用 $\underline{B_a}$ 用上述方法所生成，其任意一个元素都是 1 重以上的，即 B_a 的元素不一定各不相同。由定理 3，有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a} \quad \Leftrightarrow \quad z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$$

事实上，由 B_a 的所有各不相同的元素组成的集合就是 $\underline{B_a}$。在 B_a 中任意取一个元素，为减少任意取的次数，可以只在 $\underline{B_a}$ 中选取，即用 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$ 来代表 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，或者说 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a} \Leftrightarrow \forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$。

§7 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集

定义 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，$1\le\overline{K}\le n$，$z_j=a+iy_j\ \left(j=1,2,\cdots,\overline{K}\right)$是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\overline{K}$ 个根，记 $\overline{B_a}=\left\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\overline{K}\right\}$。

假设对 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，当 $y_{j_1}\ne 0$ 时，均能找到 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，那么就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 普通对称要求的一对元素；当 $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in\overline{B_a}$，$z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $z_{j_1}=a$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重元素，就称 $z_{j_1}=a$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 普通对称要求的一个元素。

满足上述条件就称 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的一个根集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j\ \left(j=1,2,\cdots,\overline{K}\right)$是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a(普通)对称的 $\overline{K}$ 个根。

例 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的二个根集，假如 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的任意一个元素，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素，就能推导出 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l 重元素，即由

$$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}，\ a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}\Rightarrow\ a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a^{\#}}。$$

则 $\overline{B_a}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的子集，即 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$。当且仅当 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$ 时，$\overline{B_a}=\overline{B_a^{\#}}$。当且仅当 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a}\ne\overline{B_a^{\#}}$ 时，$\overline{B_a}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质** 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，l 为非负整数，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的二个根集，于是 1) 若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，$l=0$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$；2) 若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，$l\ge 1$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$；3) 若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，则 $l\ge 1$；4) 若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$。

在 z 平面上关于点 a 普通对称的根集合 $\overline{B_a}$ 的**性质**

性质 1 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$且$y_{j_1}\neq 0$，$\overline{B_a}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的根集，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$的充要条件是：$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$\overline{B_a}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$普通对称的根集，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$f(z)=0$的$l$重根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$\overline{B_a}$的$l$重元素。

证明 由定义 1 即得。】

性质 3 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$和$\overline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$且$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$\overline{B_a}$的$l$重元素的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$\overline{B_a^{\#}}$的$l$重元素。

证明 由性质 2 即得。】

推论 1 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$和$\overline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$且$\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$\overline{B_a}$的$l$重元素，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$也是$\overline{B_a^{\#}}$的$l$重元素，即由 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}\Rightarrow$ $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a^{\#}}$。

证明 由于$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$且$\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$和$\overline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的二个根集，若$\overline{B_a^{\#}}$的任何一个元素都属于$\overline{B_a}$，即由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，则$\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$。

证明 由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，根据性质 3，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$\overline{B_a^{\#}}$的$l$重元素，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$\overline{B_a}$的$l$重元素，即由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a^{\#}}$ $\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，故$\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$。】

推论 3 设$a\in R$，$\overline{B_a}$和$\overline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的二个根集，若$\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$且$\overline{B_a}\neq\overline{B_a^{\#}}$，则$\overline{B_a^{\#}}$至少有一个元素不属于$\overline{B_a}$。

证明 由题设则 $\overline{B_a^{\#}} \not\subset \overline{B_a}$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的二个根集，若 $\overline{B_a^{\#}}$ 至少有一个元素不属于 $\overline{B_a}$，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}，\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0；$$

若 $y_{j_1} \neq 0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1} \in \overline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_2}=a-iy_{j_1} \notin \overline{B_a}，\quad f(z_{j_2})=f(a-iy_{j_1})=0 。$$

证明 由性质 1 即得。】

定义 2 设 $a \in R$，$1 \le \overline{K} \le n$，$\overline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,\overline{K}\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根集，并且不存在 $\overline{B_a^{\#}}$，使 $\overline{B_a} \subset \overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a} \neq \overline{B_a^{\#}}$，$\overline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根集，则称 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\overline{K})$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a(普通)对称的全部根。

性质 5 设 $a \in R$，则 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集的充要条件是：$\overline{B_a}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a(普通)对称的全部根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集，于是 1) $y_{j_1} \neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1} \in \overline{B_a}$。2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，则 $z_{j_1}=a \in \overline{B_a}$。

证明 用反证法。1) $y_{j_1} \neq 0$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1} \in \overline{B_a}$ 不成立，那么 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$ 或 $z_{j_2}=a-iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$，由性质 1 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$。由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \ge 1$，$l_2 \ge 1$。令 $\overline{B_a^{\#}}$ 包含 $\overline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，于是找到根集合 $\overline{B_a^{\#}}$，使 $\overline{B_a} \subset \overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a} \neq \overline{B_a^{\#}}$，

$\overline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根集合。但这与 $\overline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。

2) $y_{j_1}=0$ 时，假设 $z_{j_1}=a\notin\overline{B_a}$，由于 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，不妨设 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$。令 $\overline{B_a^{\#}}$ 包含 $\overline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l_1 重元素，于是找到根集合 $\overline{B_a^{\#}}$，使 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a}\neq\overline{B_a^{\#}}$，$\overline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根集合。但这与 $\overline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a\in\overline{B_a}$。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根集，1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$，则 $\overline{B_a}$ 还不是根全集。2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，$z_{j_1}=a\notin\overline{B_a}$，则 $\overline{B_a}$ 还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集，1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对复根；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a\notin\overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a$ 不是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由性质 6 即得。】

下面性质 7 及推论的证明方法与§4 性质 7 及推论相同予以省略。

性质 7 设 $a\in R$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的二个根集，其中 $\overline{B_a}$ 为根全集，则 $\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$。

推论 设 $a\in R$，若 $\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的二个根全集，则 $\overline{B_a}=\overline{B_a^{\#}}$。

例 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集为 B_a，单层对称的根全集为 $\underline{B_a}$，普通对称的根全集为 $\overline{B_a}$，1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in B_a$，

$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a}$；2) $y_{j_1}=0$ 时，若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一个实根，则 $z_{j_1}=a\in B_a$，$z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$，$z_{j_1}=a\in\overline{B_a}$。

例 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $\overline{B_a}$ 分别是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集合和普通对称的根集合，假如 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，满足 1) $y_{j_1}\neq 0$ 时，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq l)\in\overline{B_a}$；2) $y_{j_1}=0$ 时，$a=z_{j_1}(l_1)\in B_a\Rightarrow a=z_{j_1}(l_1)\in\overline{B_a}$，则 B_a 是 $\overline{B_a}$ 的子集，即 $B_a\subset\overline{B_a}$。反过来，假如 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$ $\Rightarrow$ $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，则 $\overline{B_a}$ 是 B_a 的子集，即 $\overline{B_a}\subset B_a$。当且仅当 $B_a\subset\overline{B_a}$ 且 $\overline{B_a}\subset B_a$ 时，$B_a=\overline{B_a}$；当且仅当 $B_a\subset\overline{B_a}$ 且 $B_a\neq\overline{B_a}$ 时，B_a 是 $\overline{B_a}$ 的真子集。

性质 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根集合 B_a 和普通对称的根集合 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 K 和 $\overline{K}$，1) 若 $B_a\subset\overline{B_a}$，则 $K\leq\overline{K}$；若 $B_a=\overline{B_a}$，则 $K=\overline{K}$；若 $B_a\subset\overline{B_a}$ 且 $B_a\neq\overline{B_a}$，则 $K<\overline{K}$；若 $B_a\subset\overline{B_a}$，$K=\overline{K}$，则 $B_a=\overline{B_a}$。2) 若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$B_a\subset\overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。

设 $a\in R$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a}$ 可以生成 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集 $\overline{B_a}$，方法如下：假设 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，那么

1. $y_{j_1}\neq 0$ 时，由§6 性质 1 则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 普通对称要求的一对元素。

2. $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根，令 $z_{j_1}=a\in\overline{B_a}$。若 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$，令 $z_{j_1}=a$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重元素，于是 $z_{j_1}=a$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 普通对称要求的一个元素。

在对 $\underline{B_a}$ 的每一个元素都进行了上述操作之后，由此生成的 $\overline{B_a}$ 符合普通对称根集

合的定义，因此$\overline{B_a}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的根集，下面进一步证明它是根全集。

定理 1 设$a\in R$，$1\le \underline{K}\le n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$单层对称的根全集，利用$\underline{B_a}$用§6 方法生成的$B_a$的元素个数为$K$，利用$\underline{B_a}$用本节方法生成的$\overline{B_a}$的元素个数为$\overline{K}$，$y_{j_1}\in C$，则$B_a$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$严格对称的根全集，而且 1) $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$；2) $\overline{B_a}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的根全集；3) $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，$\underline{K}\le K\le\overline{K}$。

证明 根据§6 定理 3，则B_a是$f(z)=0$在z平面上关于点a严格对称的根全集；由题设，则$\overline{B_a}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a普通对称的根集，而且

1) 必要性显然，证充分性。若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，于是① $y_{j_1}\ne 0$时，由性质 1，则$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，从而$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$f(z)=0$的一对复根，由§6 性质 6，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$且$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，于是$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$；② $y_{j_1}=0$时，$z_{j_1}=a\in\overline{B_a}$，$z_{j_1}=a$是$f(z)=0$的一个实根，由§6 性质 6，则$z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$。故充分性成立。

2) 用反证法。假设$\overline{B_a}$还不是根全集，那么一定存在$\overline{B_a^{\#}}$，使$\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$且$\overline{B_a}\ne\overline{B_a^{\#}}$，$\overline{B_a^{\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$普通对称的根集，由性质 3 推论 3，则$\overline{B_a^{\#}}$至少有一个元素不属于$\overline{B_a}$，设它为$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中$y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}\text{ 且 }z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a},\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0;$$

若$y_{j_1}\ne 0$，则还有

$$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}\text{ 且 }z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\overline{B_a},\quad f(z_{j_2})=f(a-iy_{j_1})=0。$$

那么① $y_{j_1}\ne 0$时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$是$f(z)=0$的一对复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$且$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$，由 1)则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$且$z_{j_2}=a-iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，由§6 性质 6 推论 1 则$\underline{B_a}$还不是根全集，矛盾。② $y_{j_1}=0$时，$f(z_{j_1})=f(a)=0$，$z_{j_1}=a$是$f(z)=0$的一个实根，

$z_{j_1}=a\notin\overline{B_a}$，由 1)则 $z_{j_1}=a\notin\underline{B_a}$，由§6 性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。所以 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 普通对称的根全集。

3) 假设 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，由§6 知即 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，于是① $y_{j_1}\neq 0$ 时，由§6 性质 1 则 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，故 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根。不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$。记 $l=\min(l_1,l_2)$，则有 $l_1\geq l\geq 1$，$l_2\geq l\geq 1$。由 B_a 生成法，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是 B_a 的 l 重元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，$a-iy_{j_1}=z_{j_2}(l)\in B_a$。由 $\overline{B_a}$ 生成法，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素。而 $l_1\geq l\geq 1$，$l_2\geq l\geq 1$，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 都是集合 $\overline{B_a}$ 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq l)\in\overline{B_a}$，$a-iy_{j_1}=z_{j_2}(\geq l)\in\overline{B_a}$。于是由

$$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq l)\in\overline{B_a}\text{。}$$

② $y_{j_1}=0$ 时，$z_{j_1}=a\in\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根。不妨设 $z_{j_1}=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$。由 B_a 生成法，$z_{j_1}=a$ 是 B_a 的 l_1 重元素，即 $a=z_{j_1}(l_1)\in B_a$；由 $\overline{B_a}$ 生成法，$z_{j_1}=a$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重元素，即 $a=z_{j_1}(l_1)\in\overline{B_a}$。于是由 $a=z_{j_1}(l_1)\in B_a\Rightarrow a=z_{j_1}(l_1)\in\overline{B_a}$。

于是 $B_a\subset\overline{B_a}$；由§6 定理 3 有 $\underline{B_a}\subset B_a$，故 $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$。又 $\underline{B_a}$，B_a，$\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$，于是有 $\underline{K}\leq K\leq\overline{K}$。】

定理 2 设 $a\in R$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集 B_a，普通对称的根全集 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$，则 $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，$\underline{K}\leq K\leq\overline{K}$，其中 B_a 和 $\overline{B_a}$ 可看作是利用 $\underline{B_a}$ 分别用§6 方法和本节方法生成。

证明 由题意不妨假设利用 $\underline{B_a}$ 用§6 方法生成的 $B_a^{\#}$ 的元素个数为 $K^{\#}$，利用 $\underline{B_a}$ 用本节方法生成的 $\overline{B_a^{\#}}$ 的元素个数为 $\overline{K^{\#}}$，根据定理 1，则 $B_a^{\#}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 分别是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集和普通对称的根全集，而且 $\underline{B_a}\subset B_a^{\#}\subset\overline{B_a^{\#}}$，$\underline{K}\leq K^{\#}\leq\overline{K^{\#}}$。

由§4 性质 7 推论，则 $B_a=B_a^{\#}$，于是 $K=K^{\#}$；由性质 7 推论，则 $\overline{B_a}=\overline{B_a^{\#}}$，于是 $\overline{K}=\overline{K^{\#}}$，

所以 $\underline{B_a} \subset B_a \subset \overline{B_a}$，$\underline{K} \le K \le \overline{K}$，于是命题成立。】

推论 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集为 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集为 B_a，普通对称的根全集为 $\overline{B_a}$，则

1) $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_a$；

2) $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$；

3) $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_a$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$。

证明 由题意根据定理 2，则 B_a 和 $\overline{B_a}$ 可看作是利用 $\underline{B_a}$ 分别用§6 方法和本节方法生成，于是 1) 由§6 定理 3 即得；2) 由定理 1 即得；3) 由 1)和 2)即得。】

定理 3 设 $a \in R$，$y_j \in C$ 且 $y_j \neq 0$，l_{j1}, l_{j2}, L 均为正整数，l 为非负整数，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集 B_a，普通对称的根全集 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$；$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集 $B_@$ 的元素对数为 k；且 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，记 $l_j=\min\left(l_{j1}, l_{j2}\right)$。如果 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，那么

1) $l \ge 1$ 时，有 $\underline{K}=1+2s$，$K=l+2\sum\limits_{j=1}^{s} l_j$ (其中 $k=\sum\limits_{j=1}^{s} l_j$)，$\overline{K}=l+\sum\limits_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$；

2) $l=0$ 时，有 $\underline{K}=2s$，$K=2\sum\limits_{j=1}^{s} l_j$ (其中 $k=\sum\limits_{j=1}^{s} l_j$)，$\overline{K}=\sum\limits_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$；

3) 若 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，则

$$L=l+2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s} l_{j1} l_{j2}\right]=l^2+2\sum_{j=1}^{s} l_{j1} l_{j2}\text{，且 }\overline{K} \le L\text{。}$$

证明 由题意根据定理 2，则 B_a 和 $\overline{B_a}$ 可看作是利用 $\underline{B_a}$ 分别用§6 方法和本节方法生成。$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由§3 定理 6，则 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。又 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，而

$$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$$

于是 1) $l\geq 1$时，$z=a$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$F_m(z-a)=0$在z平面上的所有各不相同的根，由§6 定理 1 推论 1，则它们是$\underline{B_a}$的所有元素，故$\underline{K}=1+2s$。

由题设$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$分别是$f(z)=0$的l_{j1}重和l_{j2}重根，且$l_{j1}\geq 1$，$l_{j2}\geq 1$，记$l_j=\min(l_{j1},l_{j2})$，则$l_j\geq 1$。由根全集B_a生成法，则$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$都是B_a的l_j重元素$(j=1,2,\cdots,s)$，$z=a$是B_a的l重元素，故B_a的元素个数$K=l+2\sum_{j=1}^{s}l_j$。

由根全集B_a与非a根全集$B_@$的关系性质，则

$$B_a=\{\underbrace{a,a,\cdots,a}_{l}\}\cup B_@,\quad K=l+2k，于是有 k=\sum_{j=1}^{s}l_j。$$

由根全集$\overline{B_a}$生成法，则$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$分别是$\overline{B_a}$的l_{j1}重和l_{j2}重元素$(j=1,2,\cdots,s)$，$z=a$是$\overline{B_a}$的l重元素，故$\overline{B_a}$的元素个数$\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$。

2) $l=0$时，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$F_m(z-a)=0$在z平面上的所有各不相同的根，由§6 定理 1 推论 1，则它们是$\underline{B_a}$的所有元素，于是有$\underline{K}=2s$。

接下来与 1)同理可证得$K=2\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中$k=\sum_{j=1}^{s}l_j$)，$\overline{K}=\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$。

3) 对于$f(z)=0$在z平面上以a为中点的任意一对非a根$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$(其中$y_0\in C$且$y_0\neq 0$)，由§6 性质 6，则$z_1=a+iy_0\in\underline{B_a}$，$z_2=a-iy_0\in\underline{B_a}$。于是无论$l\geq 1$还是$l=0$，$\underline{B_a}$中元素$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$就是$f(z)=0$在z平面上以a为中点的所有各不相同的成对非a根，其中$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$分别是$f(z)=0$的l_{j1}重和l_{j2}重根。若$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，由第二章定理 16 推论 2，则

$$L=l+2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]=l^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$$

下面证明$\overline{K}\leq L$。由于$l_{j1}\geq 1$，$l_{j2}\geq 1$，则$l_{j1}(l_{j2}-1)+(l_{j1}-1)l_{j2}\geq 0$，因此$l_{j1}+l_{j2}\leq 2l_{j1}l_{j2}$

$(j=1,2,\cdots,s)$。于是① $l\geq 1$时，$l(l-1)\geq 0$，$l\leq l^2$，故$\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})\leq l^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=L$。

② $l=0$时，$\overline{K}=\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})\leq 2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=L$。总之，$\overline{K}\leq L$。】

设$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\neq 0$，若$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有各不相同的根，则由$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$可知，它们也是$F_m(z-a)=0$在$z$平面上以$a$为中点的所有各不相同的成对非$a$根，再由定理3的证明可知，它们还是$f(z)=0$在$z$平面上以$a$为中点的所有各不相同的成对非$a$根。

定理4 设$a\in R$，L为正整数，$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，$f(z)=0$在z平面上关于点a单层对称的根全集$\underline{B_a}$，严格对称的根全集B_a，普通对称的根全集$\overline{B_a}$的元素个数分别为$\underline{K}$，K，$\overline{K}$，若$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，则

$$\underline{K}=K=\overline{K}=L，\quad \underline{B_a}=B_a=\overline{B_a}。$$

于是$f(z)=0$在z平面上关于点a严格对称的全部根，也是$f(z)=0$在z平面上关于点a对称的全部各不相同的根，还是$f(z)=0$在z平面上关于点a(普通)对称的全部根。

证明 由题意根据定理2，则$\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，$\underline{K}\leq K\leq\overline{K}$。

不妨假设$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有各不相同的根($y_j\in C$且$y_j\neq 0$)，其中$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$分别是$f(z)=0$的l_{j1}重和l_{j2}重根，记$l_j=\min(l_{j1},l_{j2})$，$z=a$是$f(z)=0$的l重根($l\geq 0$)，由定理3，则

1) $l\geq 1$时，有$\underline{K}=1+2s$，$K=l+2\sum_{j=1}^{s}l_j$，$\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$；

2) $l=0$时，有$\underline{K}=2s$，$K=2\sum_{j=1}^{s}l_j$，$\overline{K}=\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$；

3) 由于$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，则有$L=l^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$，且$\overline{K}\leq L$。

若$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，则$l=0$或$1$，$l_{j1}=l_{j2}=1$，$l_j=\min(l_{j1},l_{j2})=1$，于是

1) $l=1$时，$\underline{K}=1+2s$，$K=1+2\sum_{j=1}^{s}l_j=1+2s$，$\overline{K}=1+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})=1+2s$，

$$L=1+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=1+2s\text{，故}\underline{K}=K=\overline{K}=L=1+2s\text{。}$$

2) $l=0$ 时，$\underline{K}=2s$，$K=2\sum_{j=1}^{s}l_j=2s$，$\overline{K}=\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)=2s$。

$$L=0+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=2s\text{，故}\underline{K}=K=\overline{K}=L=2s$$

总之，无论 $l\geq1$ 还是 $l=0$，都有 $\underline{K}=K=\overline{K}=L$，又 $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，故 $\underline{B_a}=B_a=\overline{B_a}$。再由§4，§6，§7 性质 5 即得。】

定理 5 设 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$a\in R$，$L$ 为正整数，$x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$y_j\in C$，若 y_j $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 是方程 $(4)^a$ 的所有复根(或所有各不相同的复根)，则 $K=L$，$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 既是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部根，也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根，还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a(普通)对称的全部根。

证明 由题设不妨设 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 单层对称的根全集 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集 B_a，普通对称的根全集 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$，根据定理 4 和§4 (或§6)定理 2 即得。】

推论 1 设 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，则 y_j $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有复根的充要条件是：y_j $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根。

证明 由题设不妨设 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，则 L 为正整数，根据定理 5，必要性和充分性可分别再由§6 和§4 定理 2 即得。】

推论 2 设 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$a\in R$，$Q(a)=0$，则 $(4)^a$ 的所有复根各不相等。

证明 由推论 1 即得。】

第四章
方程复根的求解路径之二

§1 方程组解的性质与最大公因式方程(一)根的性质

设整数 $n\geq 2$， $a_0\neq 0$， 实系数 n 次多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$， 令 $z=x+iy$，则由第二章可知

$$f(z)=f(x+iy)=F_0(x,iy)+F_1(x,iy)=i^n f_0(x,y)+i^{n-1}f_1(x,y)=i^n\left[f_0(x,y)-if_1(x,y)\right]$$

于是由关系式

$$f(z)=f(x+iy)=i^n\left[f_0(x,y)-if_1(x,y)\right] \tag{1}$$

可得实系数二元多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\begin{cases} f_0(x,y)=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n-\dfrac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots \\ f_1(x,y)=\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots \end{cases}$

$f_0(x,y)$和 $f_1(x,y)$为 y 的奇偶函数。而 y 的奇函数在提取一个 y 因子后，其另一个因式必为 y 的偶函数。因此在消去这个 y 因子后，(2)就变成了关于 x， y^2 的实系数二元多项式方程组 $(2)^*$，其中

$$n\text{为偶数时}\begin{cases} \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n-\dfrac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots=0 \\ \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-2}-\dfrac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-4}+\dfrac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-6}-\cdots=0 \end{cases} \tag*{$(2)^*$}$$

$$n\text{为奇数时}\begin{cases} \dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-5}-\cdots=0 \\ \dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots=0 \end{cases} \tag*{$(2)^*$}$$

为了便于以后讨论，我们作如下处理：

n 为偶数时，令 $\begin{cases} f_0(x,y)=f_0^*(x,y^2) \\ f_1(x,y)=yf_1^*(x,y^2) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} f_0^*(x,y^2)=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n-\dfrac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots+(-1)^{\frac{n}{2}}f(x) \\ f_1^*(x,y^2)=\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-2}-\dfrac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-4}+\dfrac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-6}-\cdots+(-1)^{\frac{n-2}{2}}f'(x) \end{cases}$$

n 为奇数时，令 $\begin{cases} f_0(x,y)=yf_0^*(x,y^2) \\ f_1(x,y)=f_1^*(x,y^2) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} f_0^*(x,y^2)=\dfrac{f^{(n)}(x)}{n!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-5}-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}f'(x) \\ f_1^*(x,y^2)=\dfrac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}f(x) \end{cases}$$

于是由(2)可得方程组

$$\begin{cases} f_0^*(x,y^2)=0 \\ f_1^*(x,y^2)=0 \end{cases} \quad (n\ge 2) \qquad (2)^*$$

其中 $f_0^*(x,y^2)$, $f_1^*(x,y^2)$ 均为关于 x， y^2 的实系数二元多项式。

事实上，(2)可以分解成两个方程组，一个是 $(2)^*$，另一个就是特殊的 $(2)^f$

$$\begin{cases} f(x)=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad (2)^f$$

$(2)^f$ 的解比较特殊，它与 n 次方程 $f(z)=0$ 的根相对应，不妨设 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 $f(z)=0$ 的 n 个复根，则 $(z_1,0),(z_2,0),\cdots,(z_n,0)$ 是 $(2)^f$ 的全部复数解。

$(2)^*$ 的解则与 $f(z)=0$ 的成对复根相对应。不妨设 x_{jh} 为根 z_j 和 z_h 的中点($1\le j<h$，$h=2,3,\cdots,n$)，$z_j=x_{jh}+iy_{jh}$，$z_h=x_{jh}-iy_{jh}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 (x_{jh},y_{jh})，$(x_{jh},-y_{jh})$ 是(2)的一对复数解，若将 $(2)^*$ 视为关于 x， y 的方程组，则 (x_{jh},y_{jh})， $(x_{jh},-y_{jh})$ 是 $(2)^*$ 的一对复数解，这样的解共计有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对；若将 $(2)^*$ 视为关于 x， y^2 的方程组，则 (x_{jh},y_{jh}^2) 是 $(2)^*$ 的一个复数解，这样的解共计有 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 个。

以下将 $(2)^*$ 视为关于 x， y^2 的方程组。设 $x_0\in C$， $y_0^2\in C$，若 $f_0^*(x,y^2)$, $f_1^*(x,y^2)$ 在 $x=x_0$， $y^2=y_0^2$ 时函数值满足 $f_0^*(x_0,y_0^2)=0$ 且 $f_1^*(x_0,y_0^2)=0$，则称 (x_0,y_0^2) 是方程组 $(2)^*$ 的

一个(复数)解。

方程组$(2)^*$解的**性质**

性质 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若$\left(x_0,y_0^2\right)$是方程组$(2)^*$的解，则$\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)$也是方程组$(2)^*$的解(其中$\overline{x_0}$，$\overline{y_0^2}$分别是$x_0$，$y_0^2$的共轭复数)。

证明 若$\left(x_0,y_0^2\right)$是$(2)^*$的解，则$f_0^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$且$f_1^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$。由于$f_0^*\left(x,y^2\right)$，$f_1^*\left(x,y^2\right)$均为关于$x$，$y^2$的实系数二元多项式，于是

$$f_0^*\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)=\overline{f_0^*\left(x_0,y_0^2\right)}=\bar{0}=0\text{ 且 }f_1^*\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)=\overline{f_1^*\left(x_0,y_0^2\right)}=\bar{0}=0\text{。}$$

故$\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)$也是$(2)^*$的解。】

推论 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则$\left(x_0,y_0^2\right)$是$(2)^*$的解的充要条件是：$\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)$是$(2)^*$的解。

证明 由于$\left(\overline{\left(\overline{x_0}\right)},\overline{\left(\overline{y_0^2}\right)}\right)=\left(x_0,y_0^2\right)$，充分性也由性质即得。】

例 1 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，则$\left(a,y_0^2\right)$是$(2)^*$的解的充要条件是：$\left(a,\overline{y_0^2}\right)$是$(2)^*$的解。

设$x_0\in C$，将方程组$(2)^*$转化成恒定元为$x=x_0$的一元方程组

$$\begin{cases}f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=0\end{cases}\qquad(2)^{*x_0}$$

则$(2)^{*x_0}$是y^2的复系数多项式方程组(其中$x_0\in R$时，$(2)^{*x_0}$是y^2的实系数多项式方程组)。

$\dfrac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}=a_0\neq 0$，故$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$是$y^2$的次数为$\left[\dfrac{n}{2}\right]$的多项式，但$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$却有可能是$y^2$的零多项式，即当它关于$y^2$的系数全为零时。

设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$，$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$在$y^2=y_0^2$时函数值满足$f_0^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$且$f_1^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$，则称$y_0^2$是方程组$(2)^{*x_0}$的一个(复数)解。若$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$是$y^2$的零多项式，则对$\forall\ y_0^2\in C$，$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$在$y^2=y_0^2$时函数值$f_1^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$，于是方程$f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0$的根就是方程组$(2)^{*x_0}$的解。显然，$y_0^2$是$(2)^{*x_0}$的解的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_0^*\left(x_0,y^2\right)\text{且}\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)\text{。}$$

再设l为非负整数，若$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_0^*\left(x_0,y^2\right)$且$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_1^*\left(x_0,y^2\right)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$不能同时整除$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$,$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$，则称$y_0^2$是方程组$(2)^{*x_0}$的$l$重(复数)解。若$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$是$y^2$的零多项式，则方程$f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0$的$l$重根就是方程组$(2)^{*x_0}$的$l$重解。统计解的个数，重解按重数计算。由$(2)^{*x_0}$所有复数解(含重解)组成的集合可写成

$$\left\{y^2\mid\begin{cases}f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=0\end{cases}\left(y^2\in C\right)\ \ (2)^{*x_0}\right\}$$

下面定理 1 及推论的证明方法与第二章定理 1 及推论相同。

定理 1 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则$\left(x_0,y_0^2\right)$是方程组$(2)^*$的解的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*x_0}$的解。

推论 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则$\left(x_0,y_0^2\right)$是$(2)^*$的解的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_0^*\left(x_0,y^2\right)\text{且}\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)\text{。}$$

设$d^*\left(x_0,y^2\right)$是$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$,$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$关于$y^2$的一个最大公因式，其中$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$，$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$，$d^*\left(x_0,y^2\right)$可视为关于$x_0$，$y^2$的实系数二元多项式，于是当$x_0\in C$时，$d^*\left(x_0,y^2\right)$是$y^2$的复系数多项式；当$x_0\in R$时，$d^*\left(x_0,y^2\right)$是$y^2$的实系数多项式。

两个y^2的系数不全为零的多项式$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$,$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$关于$y^2$的最大公因式总是一个$y^2$的系数不全为零的多项式，即它是非零多项式，于是用$\left(f_0^*\left(x_0,y^2\right),f_1^*\left(x_0,y^2\right)\right)$来表示$y^2$的首项系数是 1 的那个最大公因式。若$\left(f_0^*\left(x_0,y^2\right),f_1^*\left(x_0,y^2\right)\right)=1$ 则称$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$,$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$关于$y^2$互素。

设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若$d^*\left(x_0,y^2\right)$在$y^2=y_0^2$时函数值$d^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$，则称$y_0^2$是方程$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的一个(复)根。显然，$y_0^2$是$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\,d^*\left(x_0,y^2\right)$。再设$l$为非负整数，若$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$不能整除$d^*\left(x_0,y^2\right)$，则称$y_0^2$是方程$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的$l$重(复)根。统计根的个数，重根按重数计算。$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$所有复根(含重根)组成的集合可写成$\left\{y^2\mid d^*\left(x_0,y^2\right)=0,\ \left(y^2\in C\right)\right\}$。

下面定理 2 及其推论根据预章定理 2 及其推论即得。

定理 2 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，l为非负整数，则

1) y_0^2 是 $(2)^{*x_0}$ 的解的充要条件是：y_0^2 是 $d^*(x_0,y^2)=0$ 的根；

2) y_0^2 是 $(2)^{*x_0}$ 的 l 重解的充要条件是：y_0^2 是 $d^*(x_0,y^2)=0$ 的 l 重根。

推论 1 设 $x_0\in C$，则 $(2)^{*x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合与 $d^*(x_0,y^2)=0$ 所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即

$$\left\{y^2 \mid \begin{cases} f_0^*(x_0,y^2)=0 \\ f_1^*(x_0,y^2)=0 \end{cases}(y^2\in C)\ \ (2)^{*x_0}\right\}=\left\{\ y^2 \mid d^*(x_0,y^2)=0,\ (y^2\in C)\right\}$$

于是 $d^*(x_0,y^2)=0$ 的所有复根就是 $(2)^{*x_0}$ 的所有复数解。

推论 2 设 $x_0\in C$，$(2)^{*x_0}$ 复数解(含重解)的个数为 $K_{x_0}^*$，$d^*(x_0,y^2)$ 关于 y^2 的次数为 K^*，则 $K_{x_0}^*=K^*$，故 $(2)^{x_0}$ 有解的充要条件是：$K^*\geq 1$。

推论 3 设 $x_0\in C$，则 $(2)^{*x_0}$ 无解的充要条件是：$\left(f_0^*(x_0,y^2), f_1^*(x_0,y^2)\right)=1$。

定理 3 设 $x_0\in C$，$\begin{cases} f_0^*(x_0,y^2)=g_0^{**}(x_0,y^2)d^*(x_0,y^2) \\ f_1^*(x_0,y^2)=g_1^{**}(x_0,y^2)d^*(x_0,y^2) \end{cases}$，则 $\begin{cases} g_0^{**}(x_0,y^2)=0 \\ g_1^{**}(x_0,y^2)=0 \end{cases}$ 无解，$g_0^{**}(x_0,y^2)$，$g_1^{**}(x_0,y^2)$ 关于 y^2 互素，即 $\left(g_0^{**}(x_0,y^2), g_1^{**}(x_0,y^2)\right)=1$。

证明 $d^*(x_0,y^2)$ 是 $f_0^*(x_0,y^2), f_1^*(x_0,y^2)$ 关于 y^2 的最大公因式，根据预 章定理 5 即得。】

$d^*(x_0,y^2)=0$ 根的**性质** 性质 1 及推论 1 至 4 与第二章 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 2 及其推论相同(仅有形式差异)，证推论 5。

性质 1 设 $x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若 y_0^2 是 $d^*(x_0,y^2)=0$ 的根，则 $\overline{y_0^2}$ 是 $d^*(\overline{x_0},y^2)=0$ 的根。

推论 1 设 $x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则 y_0^2 是 $d^*(x_0,y^2)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*(\overline{x_0},y^2)=0$ 的根。

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则 $(y^2-y_0^2)\mid d^*(x_0,y^2)$ 的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid d^*(\overline{x_0},y^2)$。

例 2 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，则 $(y^2-y_0^2)\mid d^*(a,y^2)$ 的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid d^*(a,y^2)$。

推论 3 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，l 为非负整数，则

$$(y^2-y_0^2)^l\mid d^*(a,y^2)\text{的充要条件是：}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid d^*(a,y^2)\text{。}$$

推论 4 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，l 为非负整数，则 y_0^2 是 $d^*(a,y^2)=0$ 的 l 重根的充要条件

是：$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的 l 重根。

设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，若 y_0^2 和 $\overline{y_0^2}$ 都是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的根，则称 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一对共轭复根；若 y_0^2 和 $\overline{y_0^2}$ 都是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的 l 重根，则称 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一对 l 重共轭复根。

推论 5 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，则 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $d^*\left(a,y^2\right)$。

证明 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 是 y^2 的实系数代数方程，根据第二章§2 性质推论 5 即得。】

$d^*\left(x_0,y^2\right)$ 是 y 的偶函数，若把 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 看作 y 的方程，则第二章 $d\left(x_0,y\right)=0$ 根的性质 1，性质 2 及其推论对它也是适用的，只要将 $d\left(x_0,y\right)$ 改为 $d^*\left(x_0,y^2\right)$ 即可。下面的性质 2，性质 3 及其推论就是如此，证明予以省略。

性质 2 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 $\left(y-y_0\right)\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y+y_0\right)\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$。

推论 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则

$$\left(y-y_0\right)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)\text{的充要条件是：}\left(y+y_0\right)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)\text{。}$$

性质 3 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 $\left(y-y_0\right)\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y-\overline{y_0}\right)\mid d^*\left(\overline{x_0},y^2\right)$

推论 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则

$$\left(y-y_0\right)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)\text{的充要条件是：}\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)\text{。}$$

$(2)^{*x_0}$ 解的**性质** 性质及推论 1 至 4 与第二章 $(2)^{x_0}$ 解的性质 2 及其推论相同(仅有形式差异)，证推论 5。

性质 设 $x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若 y_0^2 是 $(2)^{*x_0}$ 的解，则 $\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*\overline{x_0}}$ 的解。

推论 1 设 $x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则 y_0^2 是 $(2)^{*x_0}$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*\overline{x_0}}$ 的解。

例 3 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，则 y_0^2 是 $(2)^{*a}$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的解。

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_0^2\in C$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_0^*\left(x_0,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_1^*\left(x_0,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_0^*\left(\overline{x_0},y^2\right)$ 且 $\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_1^*\left(\overline{x_0},y^2\right)$。

推论 3 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，l 为非负整数，则 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_0^*\left(a,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_1^*\left(a,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_0^*\left(a,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_1^*\left(a,y^2\right)$。

推论 4 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，l 为非负整数，则 y_0^2 是 $(2)^{*a}$ 的 l 重解的充要条件是：$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的 l 重解。

设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，若 y_0^2 和 $\overline{y_0^2}$ 都是方程组 $(2)^{*a}$ 的解，则称 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对共轭复数解；若 y_0^2 和 $\overline{y_0^2}$ 都是 $(2)^{*a}$ 的 l 重解，则称 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复数解。

推论 5 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，则 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_0^*\left(a,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_1^*\left(a,y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0^*\left(a,y^2\right)$, $f_1^*\left(a,y^2\right)$。

证明 $d^*\left(a,y^2\right)$ 是 $f_0^*\left(a,y^2\right)$, $f_1^*\left(a,y^2\right)$ 关于 y^2 的最大公因式，则 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $d^*\left(a,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_0^*\left(a,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_1^*\left(a,y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0^*\left(a,y^2\right)$, $f_1^*\left(a,y^2\right)$。

根据定理 2，则 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是：y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一对 l 重共轭复根。再由 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 根的性质 1 推论 5 即得。】

§2 原方程成对复根与方程组解及最大公因式方程根的关系

定理 4 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l 为正整数，若 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f_0^*\left(x_0, y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f_1^*\left(x_0, y^2\right)$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f\left(x_0+iy\right)$，于是 1) 当 $y_0 \neq 0$ 时，$\left(y-y_0\right)^l \mid f\left(x_0+iy\right)$，$\left(y+y_0\right)^l \mid f\left(x_0+iy\right)$，即 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根；2) 当 $y_0=0$ 时，$y^{2l} \mid f\left(x_0+iy\right)$，即 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 $2l$ 重以上根。

证明 令 $z=x_0+iy$，则由关系式(1)可得

$$f(z)=f\left(x_0+iy\right)=i^n f_0\left(x_0, y\right)+i^{n-1} f_1\left(x_0, y\right) \qquad (1)^{x_0}$$

n 为偶数时，$\begin{cases} f_0\left(x_0, y\right)=f_0^*\left(x_0, y^2\right) \\ f_1\left(x_0, y\right)=y f_1^*\left(x_0, y^2\right) \end{cases}$；$n$ 为奇数时，$\begin{cases} f_0\left(x_0, y\right)=y f_0^*\left(x_0, y^2\right) \\ f_1\left(x_0, y\right)=f_1^*\left(x_0, y^2\right) \end{cases}$，于是由题意无论 n 是偶或奇数都有 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f_0\left(x_0, y\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f_1\left(x_0, y\right)$，故 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid f\left(x_0+iy\right)$，于是

1) 当 $y_0 \neq 0$ 时，$\left(y-y_0\right)^l \mid f\left(x_0+iy\right)$，$\left(y+y_0\right)^l \mid f\left(x_0+iy\right)$，又 $z-z_1=i\left(y-y_0\right)$，$z-z_2=i\left(y+y_0\right)$，根据 $f(z)=f\left(x_0+iy\right)$ 的整除性质，则 $\left(z-z_1\right)^l \mid f(z)$，$\left(z-z_2\right)^l \mid f(z)$，即 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。

2) 当 $y_0=0$ 时，$y^{2l} \mid f\left(x_0+iy\right)$，由 $z_0=x_0$，则 $z-z_0=iy$，根据 $f(z)=f\left(x_0+iy\right)$ 的整除性质，则 $\left(z-z_0\right)^{2l} \mid f(z)$，即 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 $2l$ 重以上根。】

推论 设 $x_0 \in C$，l 为正整数，若 $y^{2l} \mid f_0^*\left(x_0, y^2\right)$ 且 $y^{2l} \mid f_1^*\left(x_0, y^2\right)$，则 $y^{2l} \mid f\left(x_0+iy\right)$，即 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 $2l$ 重以上根。

证明 由定理 4 即得。】

定理 5 设 $x_0 \in C$，则 $\left(x_0, 0\right)$ 是方程组 $(2)^*$ 的解的充要条件是：$z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。

证明 $\left(x_0, 0\right)$ 是 $(2)^*$ 的解的充要条件是 $\begin{cases} f\left(x_0\right)=0 \\ f'\left(x_0\right)=0 \end{cases}$，再根据预 章定理3推论2即得。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，则 0 是 $(2)^{*x_0}$ 的解的充要条件是：$z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。

证明 由定理 5 和定理 1 即得。】

推论 1 表明 设 $x_0 \in C$，则 $y^2 \mid f_0^*\left(x_0, y^2\right)$ 且 $y^2 \mid f_1^*\left(x_0, y^2\right)$ 的充要条件是：$y^2 \mid f\left(x_0+iy\right)$。

推论 2 设 $x_0 \in C$，则 0 是 $d^*\left(x_0, y^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。

证明 由推论 1 和定理 2 即得。】

引理 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$\left(y^2-y_0^2\right) | f_0(x_0, y)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right) | f_1(x_0, y)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right) | f_0^*\left(x_0, y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right) | f_1^*\left(x_0, y^2\right)$。

证明 n 为偶数时，$\begin{cases} f_0(x_0, y)=f_0^*\left(x_0, y^2\right) \\ f_1(x_0, y)=y f_1^*\left(x_0, y^2\right) \end{cases}$；$n$ 为奇数时，$\begin{cases} f_0(x_0, y)=y f_0^*\left(x_0, y^2\right) \\ f_1(x_0, y)=f_1^*\left(x_0, y^2\right) \end{cases}$，于是

1) 当 $y_0 \neq 0$ 时，$\left(\left(y^2-y_0^2\right), y\right)=1$，命题显然成立。

2) 当 $y_0=0$ 时，由第二章定理 6 推论 3，则 $y^2 | f_0(x_0, y)$ 且 $y^2 | f_1(x_0, y)$ 的充要条件是：$y^2 | f(x_0+iy)$，即 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。由定理 5 推论 1，则 $y^2 | f(x_0+iy)$ 的充要条件是 $y^2 | f_0^*\left(x_0, y^2\right)$ 且 $y^2 | f_1^*\left(x_0, y^2\right)$。命题也成立。】

定理 6 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 (x_0, y_0)，$(x_0, -y_0)$ 是方程组(2)的一对复数解的充要条件是：$\left(x_0, y_0^2\right)$ 是方程组 $(2)^*$ 的一个解。

证明 由引理根据方程组(2)一对复数解的性质和定理 1 推论即知命题成立。】

定理 7 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$\left(x_0, y_0^2\right)$ 是方程组 $(2)^*$ 的一个解。

证明 由定理 6 和第二章定理 7 即得。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，则 $z_1=x_0$，$z_2=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$(x_0, 0)$ 是 $(2)^*$ 的一个解。

证明 在定理 7 中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$\left(a, y_0^2\right)$ 是 $(2)^*$ 的一个解。

证明 在定理 7 中令 $x_0=a \in R$ 即得。】

推论 3 设 $a \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭根的充要条件是：$\left(a, y_0^2\right)$ 是 $(2)^*$ 的一个实数解，其中 $y_0^2>0$。

证明 在推论 2 中令 $y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$ 即得。】

推论 4 设$a\in R$，y_0为纯虚数，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$在z平面实轴上的一对实根的充要条件是：(a,y_0^2)是$(2)^*$的一个实数解，其中$y_0^2<0$。

证明 在推论2中令y_0为纯虚数即得。】

推论 5 设$x_0\notin R$，$y_0\in C$，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$；$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$(x_0,y_0^2)$，$\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)$是$(2)^*$两个不相同的复数解。

证明 由定理7即得。】

推论 6 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$(a,y_0^2)$，$\left(a,\overline{y_0^2}\right)$是$(2)^*$两个不相同的复数解。

证明 由题意根据定理7即得。】

定理 8 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$f(z)=0$的一对复根的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*x_0}$的一个解。

证明 由定理7和定理1即得。】

定理8表明 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，则$(y^2-y_0^2)| f(x_0+iy)$的充要条件是：

$$(y^2-y_0^2)| f_0^*(x_0,y^2)\text{且}(y^2-y_0^2)| f_1^*(x_0,y^2)。$$

设$x_0\in C$，$y_0\in C$，由定理8和第二章定理8，则y_0，$-y_0$是$(2)^{x_0}$的一对复数解的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*x_0}$的一个解。即

$$(y^2-y_0^2)| f_0(x_0,y)\text{且}(y^2-y_0^2)| f_1(x_0,y)\Leftrightarrow(y^2-y_0^2)| f_0^*(x_0,y^2)\text{且}(y^2-y_0^2)| f_1^*(x_0,y^2)。$$

推论 1 设$x_0\notin R$，$y_0\in C$，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$；$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的两对不相同的复根的充要条件是：$y_0^2$是$(2)^{*x_0}$的一个解，$\overline{y_0^2}$是$(2)^{*\overline{x_0}}$的一个解。

证明 由定理8即得。】

它表明 设$x_0\notin R$，$y_0\in C$，则$(y^2-y_0^2)| f(x_0+iy)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)| f\left(\overline{x_0}+iy\right)$的充要条件是：$(y^2-y_0^2)| f_0^*(x_0,y^2)$且$(y^2-y_0^2)| f_1^*(x_0,y^2)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)| f_0^*\left(\overline{x_0},y^2\right)$且$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)| f_1^*\left(\overline{x_0},y^2\right)$。

推论 2 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是

$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：y_0^2，$\overline{y_0^2}$是$(2)^{*a}$的一对共轭复数解。

证明 由题意根据定理 8 即得。】

推论 2 表明 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y-\overline{y_0^2}\right)\mid f(a+iy)$的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_0^*\left(a,y^2\right)\text{且}\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_1^*\left(a,y^2\right)。$$

例 4 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，由推论 2 和第二章定理 8 推论 2，则y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$是$(2)^a$两对不相同的复数解的充要条件是：y_0^2，$\overline{y_0^2}$是$(2)^{*a}$的一对共轭复数解。即

$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_0(a,y)$且$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_1(a,y)$的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_0^*\left(a,y^2\right)\text{且}\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_1^*\left(a,y^2\right)。$$

若$(2)^{*x_0}$有解，由定理 2 推论 2，则$f_0^*\left(x_0,y^2\right)$，$f_1^*\left(x_0,y^2\right)$关于$y^2$的最大公因式$d^*\left(x_0,y^2\right)$关于$y^2$的次数$K^*\geq 1$，$\left(f_0^*\left(x_0,y^2\right),f_1^*\left(x_0,y^2\right)\right)\neq 1$。$d^*\left(x_0,y^2\right)$是关于$x_0$，$y^2$的实系数二元多项式，可设

$$\begin{cases}f_0^*\left(x_0,y^2\right)=g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)d^*\left(x_0,y^2\right)\\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)d^*\left(x_0,y^2\right)\end{cases}$$

其中$g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)$，$g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)$均为关于$x_0$，$y^2$的实系数二元多项式，$g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)$是$y^2$的系数不全为零的多项式，即它是非零多项式，但$g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)$却有可能是$y^2$的零多项式，由定理 3，则$\begin{cases}g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)=0\\ g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)=0\end{cases}$无解，$\left(g_0^{**}\left(x_0,y^2\right),g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)\right)=1$，即$g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)$，$g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)$关于$y^2$互素。于是$f(z)=f\left(x_0+iy\right)=i^n f_0\left(x_0,y\right)+i^{n-1}f_1\left(x_0,y\right)=i^n\left[f_0\left(x_0,y\right)-if_1\left(x_0,y\right)\right]$，其中

1. n为偶数时，$\begin{cases}f_0\left(x_0,y\right)=f_0^*\left(x_0,y^2\right)\\ f_1\left(x_0,y\right)=yf_1^*\left(x_0,y^2\right)\end{cases}$，于是有

$$f(z)=f\left(x_0+iy\right)=i^n\left[f_0\left(x_0,y\right)-if_1\left(x_0,y\right)\right]=i^n\left[g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)-iyg_1^{**}\left(x_0,y^2\right)\right]d^*\left(x_0,y^2\right)$$

令$\begin{cases}g_0^*\left(x_0,y\right)=g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)\\ g_1^*\left(x_0,y\right)=yg_1^{**}\left(x_0,y^2\right)\end{cases}$

则 $f(z)=f\left(x_0+iy\right)=i^n\left[g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)-iyg_1^{**}\left(x_0,y^2\right)\right]d^*\left(x_0,y^2\right)=i^n\left[g_0^*\left(x_0,y\right)-ig_1^*\left(x_0,y\right)\right]d^*\left(x_0,y^2\right)$

其中$g_0^*\left(x_0,y\right)$为y的偶函数，$g_1^*\left(x_0,y\right)$为y的奇函数，而且对$\forall$ $y_0\in C$，$\left(y^2-y_0^2\right)$不能

同时整除 $g_0^*(x_0,y)$, $g_1^*(x_0,y)$ (否则，假如 $\exists$ $y_0 \in C$ ，满足 $(y^2-y_0^2)|\,g_0^*(x_0,y)$ 且 $(y^2-y_0^2)|\,g_1^*(x_0,y)$，那么 1) 当 $y_0 \neq 0$ 时，$((y^2-y_0^2),y)=1$，于是 $(y^2-y_0^2)|\,g_0^{**}(x_0,y^2)$ 且 $(y^2-y_0^2)|\,g_1^{**}(x_0,y^2)$；2) 当 $y_0=0$ 时，$y^2|\,g_0^*(x_0,y)$ 且 $y^2|\,g_1^*(x_0,y)$，则 $y^2|\,g_0^{**}(x_0,y^2)$ 且 $y|\,g_1^{**}(x_0,y^2)$，而由 $y|\,g_1^{**}(x_0,y^2) \Rightarrow y^2|\,g_1^{**}(x_0,y^2)$，于是 $y^2|\,g_0^{**}(x_0,y^2)$ 且 $y^2|\,g_1^{**}(x_0,y^2)$。故无论 $y_0 \neq 0$ 还是 $y_0=0$ 都与 $g_0^{**}(x_0,y^2)$, $g_1^{**}(x_0,y^2)$ 关于 y^2 互素矛盾)。

2. n 为奇数时，$\begin{cases} f_0(x_0,y)=yf_0^*(x_0,y^2) \\ f_1(x_0,y)=f_1^*(x_0,y^2) \end{cases}$，于是

$$f(z)=f(x_0+iy)=i^n[f_0(x_0,y)-if_1(x_0,y)]=i^n\left[yg_0^{**}(x_0,y^2)-ig_1^{**}(x_0,y^2)\right]d^*(x_0,y^2)$$

令 $\begin{cases} g_0^*(x_0,y)=yg_0^{**}(x_0,y^2) \\ g_1^*(x_0,y)=g_1^{**}(x_0,y^2) \end{cases}$

则 $f(z)=f(x_0+iy)=i^n\left[yg_0^{**}(x_0,y^2)-ig_1^{**}(x_0,y^2)\right]d^*(x_0,y^2)=i^n\left[g_0^*(x_0,y)-ig_1^*(x_0,y)\right]d^*(x_0,y^2)$

其中 $g_0^*(x_0,y)$ 为 y 的奇函数，$g_1^*(x_0,y)$ 为 y 的偶函数，而且对 $\forall$ $y_0 \in C$ ，$(y^2-y_0^2)$ 不能同时整除 $g_0^*(x_0,y)$, $g_1^*(x_0,y)$ (否则，同样会与 $g_0^{**}(x_0,y^2)$, $g_1^{**}(x_0,y^2)$ 关于 y^2 互素矛盾)。

因此，无论 n 为偶数或奇数，都有 $f(z)=f(x_0+iy)=i^n\left[g_0^*(x_0,y)-ig_1^*(x_0,y)\right]d^*(x_0,y^2)$

令 $g^*(z)=g^*(x_0+iy)=i^{n-2K^*}\left[g_0^*(x_0,y)-ig_1^*(x_0,y)\right]$

其中 $g_0^*(x_0,y)$, $g_1^*(x_0,y)$ 均为关于 x_0 ，y 的实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，而且对 $\forall$ $y_0 \in C$ ，$(y^2-y_0^2)$ 不能同时整除 $g_0^*(x_0,y)$, $g_1^*(x_0,y)$ 。则

$$f(x_0+iy)=g^*(x_0+iy)\left[i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)\right]$$

再令 $F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2)=i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)$，则 $f(z)=g^*(x_0+iy)F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2)$，于是有

$$f(z)=g^*(z)F_{d^*}^*(x_0,(z-x_0)^2)。$$

该式与 x_0 有关，可称它是 $f(z)$ 在 z 平面上点 x_0 的分解式，其中 $g^*(z)$ 称为点 x_0 的 $g^*(z)$，$F_{d^*}^*(x_0,(z-x_0)^2)=F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2)=i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)$，$F_{d^*}^*(x_0,(z-x_0)^2)$ 是关于 x_0 ，$(z-x_0)^2$ 的实系数二元多项式，且 $x_0 \in C$ ，于是 $F_{d^*}^*(x_0,(z-x_0)^2)$ 是 $(z-x_0)^2$ 的复系数 K^* 次多项式，它也是 z 的复系数 $2K^*$ 次多项式，故 $g^*(z)$ 为复系数 $n-2K^*$ 次多项式。

由于 $F_0(x_0,iy)=i^n f_0(x_0,y)$，$F_1(x_0,iy)=i^{n-1}f_1(x_0,y)$，那么

1．n 为偶数时，由于 $\begin{cases} f_0(x_0,y)=f_0^*(x_0,y^2) \\ f_1(x_0,y)=yf_1^*(x_0,y^2) \end{cases}$，令 $\begin{cases} F_0^*(x_0(iy)^2)=i^n f_0^*(x_0,y^2) \\ F_1^*(x_0,(iy)^2)=i^{n-2} f_1^*(x_0,y^2) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} F_0(x_0,iy)=F_0^*(x_0,(iy)^2) \\ F_1(x_0,iy)=iyF_1^*(x_0,(iy)^2) \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} F_0(x_0,z-x_0)=F_0^*(x_0,(z-x_0)^2) \\ F_1(x_0,z-x_0)=(z-x_0)F_1^*(x_0,(z-x_0)^2) \end{cases}$$

2．n 为奇数时，由于 $\begin{cases} f_0(x_0,y)=yf_0^*(x_0,y^2) \\ f_1(x_0,y)=f_1^*(x_0,y^2) \end{cases}$，令 $\begin{cases} F_0^*(x_0(iy)^2)=i^{n-1} f_0^*(x_0,y^2) \\ F_1^*(x_0,(iy)^2)=i^{n-1} f_1^*(x_0,y^2) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} F_0(x_0,iy)=iyF_0^*(x_0,(iy)^2) \\ F_1(x_0,iy)=F_1^*(x_0,(iy)^2) \end{cases} \text{即} \begin{cases} F_0(x_0,z-x_0)=(z-x_0)F_0^*(x_0,(z-x_0)^2) \\ F_1(x_0,z-x_0)=F_1^*(x_0,(z-x_0)^2) \end{cases}$$

由 $\begin{cases} f_0^*(x_0,y^2)=g_0^{**}(x_0,y^2)d^*(x_0,y^2) \\ f_1^*(x_0,y^2)=g_1^{**}(x_0,y^2)d^*(x_0,y^2) \end{cases}$，于是

1．n 为偶数时，有 $\begin{cases} i^n f_0^*(x_0,y^2)=i^{n-2K^*}g_0^{**}(x_0,y^2)[i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)] \\ i^{n-2} f_1^*(x_0,y^2)=i^{n-2K^*-2}g_1^{**}(x_0,y^2)[i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)] \end{cases}$

令 $G_0^{**}(x_0,(iy)^2)=i^{n-2K^*}g_0^{**}(x_0,y^2)$，$G_1^{**}(x_0,(iy)^2)=i^{n-2K^*-2}g_1^{**}(x_0,y^2)$，则有

$$\begin{cases} F_0^*(x_0(iy)^2)=G_0^{**}(x_0,(iy)^2)F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2) \\ F_1^*(x_0,(iy)^2)=G_1^{**}(x_0,(iy)^2)F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2) \end{cases}$$

2．n 为奇数时，有 $\begin{cases} i^{n-1} f_0^*(x_0,y^2)=i^{n-2K^*-1}g_0^{**}(x_0,y^2)[i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)] \\ i^{n-1} f_1^*(x_0,y^2)=i^{n-2K^*-1}g_1^{**}(x_0,y^2)[i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)] \end{cases}$

令 $G_0^{**}(x_0,(iy)^2)=i^{n-2K^*-1}g_0^{**}(x_0,y^2)$，$G_1^{**}(x_0,(iy)^2)=i^{n-2K^*-1}g_1^{**}(x_0,y^2)$，则也有

$$\begin{cases} F_0^*(x_0(iy)^2)=G_0^{**}(x_0,(iy)^2)F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2) \\ F_1^*(x_0,(iy)^2)=G_1^{**}(x_0,(iy)^2)F_{d^*}^*(x_0,(iy)^2) \end{cases}$$

$z=x_0+iy$，于是无论 n 为偶数或奇数，都有

$$\begin{cases} F_0^*(x_0,(z-x_0)^2)=G_0^{**}(x_0,(z-x_0)^2)F_{d^*}^*(x_0,(z-x_0)^2) \\ F_1^*(x_0,(z-x_0)^2)=G_1^{**}(x_0,(z-x_0)^2)F_{d^*}^*(x_0,(z-x_0)^2) \end{cases}$$

其中 $F_0^*(x_0,(z-x_0)^2)$ 是 $(z-x_0)^2$ 的次数为 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 的多项式，但 $F_1^*(x_0,(z-x_0)^2)$ 却有可能是 $(z-x_0)^2$ 的零多项式，即当它关于 $(z-x_0)^2$ 的系数全为零时。由于 $(2)^{*x_0}$ 有解，又

1．n 为偶数时，$\begin{cases} F_0^*(x_0,(z-x_0)^2)=F_0^*(x_0,(iy)^2)=i^n f_0^*(x_0,y^2) \\ F_1^*(x_0,(z-x_0)^2)=F_1^*(x_0,(iy)^2)=i^{n-2} f_1^*(x_0,y^2) \end{cases}$

2．n为奇数时，$\begin{cases} F_0^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_0^*\left(x_0,(iy)^2\right)=i^{n-1}f_0^*\left(x_0,y^2\right) \\ F_1^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_1^*\left(x_0,(iy)^2\right)=i^{n-1}f_1^*\left(x_0,y^2\right) \end{cases}$

于是$\begin{cases} F_0^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \\ F_1^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \end{cases}$有解，根据预章定理 2 推论 3，则$F_0^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，$F_1^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$关于$(z-x_0)^2$非互素，即$\left(F_0^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right),F_1^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)\right)\neq 1$。

$\begin{cases} G_0^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \\ G_1^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \end{cases}$无解。否则，假如$\begin{cases} G_0^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \\ G_1^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \end{cases}$有解，则$\exists\, y_0\in C$，将$z_0=x_0+iy_0$代入$\begin{cases} G_0^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \\ G_1^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0 \end{cases}$后，满足$\begin{cases} G_0^{**}\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)=0 \\ G_1^{**}\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)=0 \end{cases}$，从而

1．n为偶数时，有$\begin{cases} G_0^{**}\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)=G_0^{**}\left(x_0,(iy_0)^2\right)=i^{n-2K^*}g_0^{**}\left(x_0,y_0^2\right)=0 \\ G_1^{**}\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)=G_1^{**}\left(x_0,(iy_0)^2\right)=i^{n-2K^*-2}g_1^{**}\left(x_0,y_0^2\right)=0 \end{cases}$

2．n为奇数时，有$\begin{cases} G_0^{**}\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)=G_0^{**}\left(x_0,(iy_0)^2\right)=i^{n-2K^*-1}g_0^{**}\left(x_0,y_0^2\right)=0 \\ G_1^{**}\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)=G_1^{**}\left(x_0,(iy_0)^2\right)=i^{n-2K^*-1}g_1^{**}\left(x_0,y_0^2\right)=0 \end{cases}$

因此y_0^2是$\begin{cases} g_0^{**}\left(x_0,y^2\right)=0 \\ g_1^{**}\left(x_0,y^2\right)=0 \end{cases}$的解，矛盾。根据预章定理 5，则$\left(G_0^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right),G_1^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)\right)=1$，即$G_0^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，$G_1^{**}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$关于$(z-x_0)^2$互素，$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$是$F_0^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，$F_1^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$关于$(z-x_0)^2$的一个最大公因式。

综上所述，设$x_0\in C$，若$(2)^{*x_0}$有解，则$d^*\left(x_0,y^2\right)$关于y^2的次数$K^*\geq 1$，$f(z)$就能在z平面上的点x_0分解成两个z的复系数多项式$g^*(z)$与$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$的乘积，即

$$f(z)=g^*(z)F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$$

其中$g^*(z)$为点x_0的$g^*(z)$。由$z=x_0+iy$，该式又可写成$f(x_0+iy)=g^*(x_0+iy)\left[i^{2K^*}d^*\left(x_0,y^2\right)\right]$。于是说点$x_0$的$g^*(z)$，就意味着$f(z)=g^*(z)F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$或$f(x_0+iy)=g^*(x_0+iy)\left[i^{2K^*}d^*\left(x_0,y^2\right)\right]$。反之亦然。

$g^*(z)=g^*(x_0+iy)$的**整除性质**与$f(z)=f(x_0+iy)$的整除性质相同。

点x_0的$g^*(z)$**性质** 设$x_0\in C$，l为非负整数，

$$g^*(z)=g^*(x_0+iy)=i^{n-2K^*}\left[g_0^*(x_0,y)-ig_1^*(x_0,y)\right]$$

其中$g_0^*(x_0,y)$，$g_1^*(x_0,y)$均为关于x_0，y的实系数二元多项式，为y的奇偶函数，而且

对 $\forall\ y_0 \in C$，$\left(y^2 - y_0^2\right)$不能同时整除 $g_0^*(x_0, y)$, $g_1^*(x_0, y)$，于是

1) $g^*(z) = 0$ 没有以 x_0 为中点的成对根。

2) 若 $z = x_0$ 是 $g^*(z) = 0$ 的 l 重根，则 $l = 0$ 或 1，其中 $l = 0$ 时，$(z - x_0)$ 不能整除 $g^*(z)$，即 y 不能整除 $g^*(x_0 + iy)$； $l = 1$ 时，$(z - x_0) \mid g^*(z)$，但 $(z - x_0)^2$ 不能整除 $g^*(z)$，即 $y \mid g^*(x_0 + iy)$，但 y^2 不能整除 $g^*(x_0 + iy)$。

3) 若 $y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$， $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$，则 $(z - z_1)$ 和 $(z - z_2)$ 不能同时整除 $g^*(z)$，即 $(y - y_0)$ 和 $(y + y_0)$ 不能同时整除 $g^*(x_0 + iy)$。

证明 1) 由于对 $\forall\ y_0 \in C$，$\left(y^2 - y_0^2\right)$不能同时整除 $g_0^*(x_0, y)$, $g_1^*(x_0, y)$，于是若 $g_0^*(x_0, y)$, $g_1^*(x_0, y)$ 关于 y 互素，即 $\left(g_0^*(x_0, y), g_1^*(x_0, y)\right) = 1$，根据第二章点 x_0 的 $g(z)$ 性质 2，则 $g^*(z) = 0$ 没有以 x_0 为中点的成对根；若 $g_0^*(x_0, y)$, $g_1^*(x_0, y)$ 关于 y 非互素，即 $\left(g_0^*(x_0, y), g_1^*(x_0, y)\right) \neq 1$，用反证法：假如 $g^*(z) = 0$ 有以 x_0 为中点的成对根，设为 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$，其中 $y_0 \in C$，由题意根据第二章定理 8 推论 3，则 y_0，$-y_0$ 是 $\begin{cases} g_0^*(x_0, y) = 0 \\ g_1^*(x_0, y) = 0 \end{cases}$ 的一对复数解，于是 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid g_0^*(x_0, y)$ 且 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid g_1^*(x_0, y)$，矛盾。因此 $g^*(z) = 0$ 没有以 x_0 为中点的成对根。

2) 若 $z = x_0$ 是 $g^*(z) = 0$ 的 l 重根，用反证法：假如 $l \geq 2$，则 $z_1 = x_0$，$z_2 = x_0$ 是 $g^*(z) = 0$ 以 x_0 为中点的成对根，与 1)矛盾。因此 $l = 0$ 或 1，于是命题成立。

3) 由 1)，则 $(z - z_1)$ 和 $(z - z_2)$ 不能同时整除 $g^*(z)$，由 $g^*(z) = g^*(x_0 + iy)$ 的整除性质，即 $(y - y_0)$ 和 $(y + y_0)$ 不能同时整除 $g^*(x_0 + iy)$。】

定理 9 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的一对复根的充要条件是： y_0^2 是 $d^*\left(x_0, y^2\right) = 0$ 的一个根。

证明 由定理 8 和定理 2 即得。】

它表明 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid f(x_0 + iy)$ 的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right) \mid d^*\left(x_0, y^2\right)$。

设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，由定理 9 和第二章定理 9，则 y_0， $-y_0$ 是 $d(x_0, y) = 0$ 的一对复根的充要条件是：y_0^2 是 $d^*\left(x_0, y^2\right) = 0$ 的一个根。即 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid d(x_0, y) \Leftrightarrow \left(y^2 - y_0^2\right) \mid d^*\left(x_0, y^2\right)$。

推论 1 设 $x_0 \notin R$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$； $\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$

是 $f(z)=0$ 的两对不相同的复根的充要条件是： y_0^2 是 $d^*(x_0,y^2)=0$ 的根， $\overline{y_0^2}$ 是 $d^*(\overline{x_0},y^2)=0$ 的根。

证明 由定理 9 即得。】

推论 1 表明 设 $x_0\notin R$， $y_0\in C$，则 $(y^2-y_0^2)\mid f(x_0+iy)$， $\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f(\overline{x_0}+iy)$的充要条件是： $(y^2-y_0^2)\mid d^*(x_0,y^2)$， $\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid d^*(\overline{x_0},y^2)$。

推论 2 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$； $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是： y_0^2， $\overline{y_0^2}$ 是 $d^*(a,y^2)=0$ 的一对共轭复根。

证明 由题意根据定理 9 即得。】

推论 2 表明 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$，则

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y-\overline{y_0^2}\right)\mid f(a+iy)\text{的充要条件是：}\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid d^*(a,y^2)\text{。}$$

例 5 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$，由推论 2 和第二章定理 9 推论 2，则 y_0， $-y_0$； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的两对不相同的复根的充要条件是： y_0^2， $\overline{y_0^2}$ 是 $d^*(a,y^2)=0$ 的一对共轭复根。即

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid d(a,y)\Leftrightarrow\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid d^*(a,y^2)\text{。}$$

设 $x_0\in C$， $y_0\in C$， $z_0=x_0+iy_0$，若 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 在 $z=z_0$ 时函数值 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z_0-x_0)^2\right)$ $=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy_0)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ (在 z 平面上)的一个(复)根。$z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$(z-z_0)\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。

再设 l 为非负整数，若 $(z-z_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ (在 z 平面上)的 l 重(复)根。

$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 的**整除性质** 设 $x_0\in C$， $y_0\in C$， l 为非负整数， $z=x_0+iy$， $z_0=x_0+iy_0$，则 $(z-z_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

它与 $f(z)=f(x_0+iy)$ 整除性质相同，仅有形式差异。$z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根的充要条件是 $(y-y_0)\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$； $z_0=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l 重根的充要条件是： $(y-y_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$， 但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

定义 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根，特别当 $y_0 = 0$ 时，$(z-x_0)^2 \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，即 x_0 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 2 重以上根，则称 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ (在 z 平面上)的一对(复)根。

$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 为 $(z-x_0)$ 的偶函数，定义 $y_0=0$ 时条件可弱化为 $(z-x_0) \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。

$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 一对复根的**性质** 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对复根的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right) \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

它的证明方法与 $f(z)=0$ 一对复根的性质相同。

定理 10 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 y_0^2 是 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 的一个根的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对复根。

证明 由题设和 $F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right) = i^{2K^*} d^*\left(x_0,y^2\right)$，则 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid d^*\left(x_0,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right) \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。于是命题成立。】

定理 11 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对复根。

证明 由定理 9 和定理 10 即得。】

它表明 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid f(x_0+iy)$ 的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right) \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，根据定理 11 和第二章定理 10，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 的一对复根的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对复根。即 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid F_d(x_0, iy) \Leftrightarrow \left(y^2 - y_0^2\right) \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

推论 1 设 $x_0 \notin R$，$y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$；$\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$，$\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对复根；$\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$，$\overline{z_2} = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(z-\overline{x_0}\right)^2\right)=0$ 的一对复根。

证明 由定理 11 即得。】

推论 1 表明 设 $x_0 \notin R$，$y_0 \in C$，则 $\left(y^2 - y_0^2\right) \mid f(x_0+iy)$，$\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f\left(\overline{x_0}+iy\right)$ 的充要

条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\,F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\,F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},(iy)^2\right)$。

推论 2 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$两对不相同的复根。

证明 由题意根据定理 11 即得。】

例 6 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\,F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)$。

证明 方法与第二章例 13 相同。】

推论 2 表明 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，则

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y-\overline{y_0^2}\right)|\,f(a+iy)\text{的充要条件是：}\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\,F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)\text{。}$$

例 7 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，由推论 2 和第二章定理 10 推论 2，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_a(a,z-a)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$两对不相同的复根。即

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\,F_d(a,iy)\ \Leftrightarrow\ \left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\,F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)\text{。}$$

§3 最大公因式方程(二)根的性质及相关定理

$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$是$F_0^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$, $F_1^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$关于$(z-x_0)^2$的最大公因式，它是关于$x_0$，$(z-x_0)^2$的实系数二元多项式，当$x_0\in C$时，$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$是$(z-x_0)^2$的复系数多项式，它也是$z$的复系数多项式；当$x_0=a\in R$时，$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$是$(z-a)^2$的实系数多项式，它也是$z$的实系数多项式。

$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$根的**性质**

性质 1 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，若$z_1=x_0+iy_0$是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的根，则$z_2=x_0-iy_0$也是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的根。

证明 若$z_1=x_0+iy_0$是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的根，则$F_{d^*}^*\left(x_0,(z_1-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy_0)^2\right)=0$，于是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z_2-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(-iy_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy_0)^2\right)=0$。故$z_2=x_0-iy_0$也是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的根。】

推论 1 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，则$z_1=x_0+iy_0$是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的根的充要条件是：$z_2=x_0-iy_0$是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的根。

证明 充分性也由性质 1 即得。】

推论 2 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，则

$(z-z_1)\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$的充要条件是：$(z-z_2)\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，则

$(z-z_1)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$的充要条件是：$(z-z_2)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。

证明 证必要性。若$(z-z_1)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，令$z=x_0+iy$，则$(z-z_1)=i(y-y_0)$，根据$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$的整除性质，则$(y-y_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。由$F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(x_0,y^2\right)$，则$(y-y_0)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$。由$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$根的性质 2 推论，则$(y+y_0)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$。再由$F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(x_0,y^2\right)$，则$(y+y_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。又$(z-z_2)=i(y+y_0)$，根据$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$的整除性质，则$(z-z_2)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。充分性同理可

证。】

推论 4 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，则 $z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l 重根。

证明 根据推论 3 即得。】

设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 都是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l 重根，则称 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ (在 z 平面上)的一对 l 重(复)根，其中 1) 当 $x_0 = a \in R$，$y_0 \in R$ 时，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x = a$ 上的一对 l 重共轭根；2) 当 $x_0 = a \in R$，y_0 为纯虚数时，称 $z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上实轴上的一对 l 重实根。

推论 5 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$\left(y^2 - y_0^2\right)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，但 $\left(y^2 - y_0^2\right)^{l+1}$ 不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

证明 若 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对 l 重根，则

$(z-z_1)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 且 $(z-z_2)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，但 $(z-z_1)^{l+1}$ 和 $(z-z_2)^{l+1}$ 都不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。令 $z = x_0 + iy$，则 $(z-z_1) = i(y-y_0)$，$(z-z_2) = i(y+y_0)$，由 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ $= F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 的整除性质，则 $(y-y_0)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 且 $(y+y_0)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 和 $(y+y_0)^{l+1}$ 都不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。由于 $y_0 \neq 0$，$\left((y-y_0)^l,(y+y_0)^l\right)=1$，于是 $(y-y_0)^l(y+y_0)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，即 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，否则，假如 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1} \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，则 $(y-y_0)^{l+1} \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，$(y+y_0)^{l+1} \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，矛盾。

反过来，若 $\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，则 $(y-y_0)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 且 $(y+y_0)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。由 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right) = F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 的整除性质，则 $(z-z_1)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 且 $(z-z_2)^l \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。但 $(z-z_1)^{l+1}$ 和 $(z-z_2)^{l+1}$ 都不能整除 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，否则假如 $(z-z_1)^{l+1} \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 或 $(z-z_2)^{l+1} \mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，

由 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 根的性质 1 推论 3，则 $(z-z_1)^{l+1}\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 且 $(z-z_2)^{l+1}\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，由 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 的整除性质，则 $(y-y_0)^{l+1}\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$ 且 $(y+y_0)^{l+1}\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，由 $y_0\neq 0$，$\left((y-y_0)^{l+1},(y+y_0)^{l+1}\right)=1$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，矛盾。所以，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对 l 重根。】

性质 2 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_2=x_0-iy_0$，若 $z_1=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根，则 $\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(z-\overline{x_0}\right)^2\right)=0$ 的根。

证明 若 $z_1=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根，则 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z_1-x_0)^2\right)=0$。于是

$$i^{2K^*}d^*\left(x_0,y_0^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(z_1-x_0)^2\right)=0$$

y_0^2 是 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 的根，由 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 根的性质 1，则 $\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(\overline{x_0},y^2\right)=0$ 的根，即 $d^*\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)=0$。又 $\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，于是 $F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(\overline{z_2}-\overline{x_0}\right)^2\right)=F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(i\overline{y_0}\right)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(\overline{x_0},\overline{y_0^2}\right)=0$，故 $\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(z-\overline{x_0}\right)^2\right)=0$ 的根。】

例 8 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 的根，由性质 1 和 2，则 $z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 也都是 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 的根。

推论 1 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_2=x_0-iy_0$，则 $z_1=x_0+iy_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(z-\overline{x_0}\right)^2\right)=0$ 的根。

证明 充分性由性质 2 即得。】

推论 2 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，则

$$(z-z_1)\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)\text{的充要条件是：}\left(z-\overline{z_2}\right)\mid F_{d^*}^*\left(\overline{x_0},\left(z-\overline{x_0}\right)^2\right)\text{。}$$

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)^l\mid F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)\text{的充要条件是：}\left(z-\overline{z_2}\right)^l\mid F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)\text{。}$$

证明 证必要性。若 $(z-z_1)^l\mid F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$，令 $z=a+iy$，则 $(z-z_1)=i(y-y_0)$，根据

$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)$的整除性质，则$(y-y_0)^l\mid F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)$。由$F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(a,y^2\right)$可得$(y-y_0)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)$。由$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$根的性质 3 推论，则$\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)$。再由$F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(a,y^2\right)$，则$\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)$。$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\left(z-\overline{z_2}\right)=i\left(y-\overline{y_0}\right)$，根据$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)$的整除性质，则$\left(z-\overline{z_2}\right)^l\mid F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$。充分性同理可证。】

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z_2=a-iy_0$，则$z_1=a+iy_0$是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$的$l$重根的充要条件是：$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$的$l$重根。

证明 根据推论 3 即得。】

例 9 设$a\in R$，$y_0\in C$，若$z_1=a+iy_0$是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$的$l$重根，则$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$也都是$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$的$l$重根。

定理 12 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，l为非负整数，则 1) 当$y_0\neq 0$时，y_0^2是$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的一个$l$重非 0 复根的充要条件是：$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$在$z$平面上的一对$l$重根；2) 当$y_0=0$时，0 是$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的$l$重根的充要条件是：$z_0=x_0$是$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$的$2l$重根。

证明 由于$F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)=i^{2K^*}d^*\left(x_0,y^2\right)$，则$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$不能整除$d^*\left(x_0,y^2\right)$的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$不能整除$F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。于是

1) 当$y_0\neq 0$时，由$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$根的性质 1 推论 5 即得。

2) 当$y_0=0$时，则$\left(y^2\right)^l\mid d^*\left(x_0,y^2\right)$，但$\left(y^2\right)^{l+1}$不能整除$d^*\left(x_0,y^2\right)$的充要条件是：$\left(y^2\right)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$，但$\left(y^2\right)^{l+1}$不能整除$F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$。

令$z=x_0+iy$，则$(z-x_0)=iy$，由$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$的整除性质，则$\left(y^2\right)^l\mid F_{d^*}^*\left(x_0,\left(iy^2\right)\right)$，但$\left(y^2\right)^{l+1}$不能整除$F_{d^*}^*\left(x_0,(iy)^2\right)$的充要条件是：$(z-x_0)^{2l}\mid F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，但$(z-x_0)^{2l+2}$不能整除$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。

$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$是关于$(z-x_0)$的偶函数，于是命题成立。】

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，l为非负整数，则y_0^2是$d^*\left(a,y^2\right)=0$的一个l重

非 0 复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的一对 l 重根。

证明 在定理 12 中令 $x_0=a\in R$ 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 y_0^2 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一个 l 重的正实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根。

证明 在推论 1 中令 $y_0\in R$ 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，y_0 为纯虚数，l 为非负整数，则 y_0^2 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一个 l 重负实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上实轴上的一对 l 重实根。

证明 在推论 1 中令 y_0 为纯虚数即得。】

推论 4 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，则 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $d^*\left(a,y^2\right)=0$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$；$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $F^*_{d^*}\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 两对不相同的 l 重根。

证明 由题意根据推论 1 可得。】

推论 4 表明 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，则

$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid d^*\left(a,y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $d^*\left(a,y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid F^*_{d^*}\left(a,(iy)^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $F^*_{d^*}\left(a,(iy)^2\right)$。

下面定理 13，定理 14 及其推论与第二章定理 13，定理 14 及其推论相比较，从内容到证明都非常相似，为了既保持数学证明的严谨性，又不过分繁琐，作者保留定理的证明，而省略部分推论的证明。这样，既便于读者比较，又留下想象空间。

定理 13 设 $x_0\in C$，$f(z)=g^*(z)F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2 均为非负整数，若 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=x_0-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$(z-z_1)\mid g^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g^*(z)$；2) $l_1<l_2$ 时，$(z-z_2)\mid g^*(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g^*(z)$；3) $l_1=l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g^*(z)$。

证明 由题设则 $(z-z_1)^{l_1}\mid f(z)$，但 $(z-z_1)^{l_1+1}$ 不能整除 $f(z)$；$(z-z_2)^{l_2}\mid f(z)$，但

$(z-z_2)^{l_2+1}$不能整除 $f(z)$；由点 x_0 的 $g^*(z)$ 性质，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 不能同时整除 $g^*(z)$，于是

1) $l_1>l_2$ 时，$(z-z_1)|g^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g^*(z)$。否则，假如 $(z-z_1)$ 不能整除 $g^*(z)$，则 $((z-z_1)^{l_1},g^*(z))=1$，$(z-z_1)^{l_1}|F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$，由 $F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)=0$ 根的性质 1 推论 3 则 $(z-z_2)^{l_1}|F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$，$l_1\geq l_2+1$，故 $(z-z_2)^{l_2+1}|F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$，$(z-z_2)^{l_2+1}|f(z)$，矛盾。

2) $l_1<l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1=l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g^*(z)$。否则① 假如 $(z-z_1)|g^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g^*(z)$，则 $((z-z_2)^{l_2},g^*(z))=1$，$(z-z_2)^{l_2}|F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$，由 $F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)=0$ 根的性质 1 推论 3 则 $(z-z_1)^{l_2}|F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$，$(z-z_1)^{l_1}|F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$，又 $(z-z_1)|g^*(z)$，则 $(z-z_1)^{l_1+1}|f(z)$，矛盾。② 假如 $(z-z_2)|g^*(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g^*(z)$，则与①同理可得 $(z-z_2)^{l_2+1}|f(z)$，矛盾。】

推论 设 $x_0\in C$，K^* 为正整数，$f(x_0+iy)=g^*(x_0+iy)\left[i^{2K^*}d^*(x_0,y^2)\right]$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=x_0-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$(y-y_0)|g^*(x_0+iy)$，但 $(y+y_0)$ 不能整除 $g^*(x_0+iy)$；2) $l_1<l_2$ 时，$(y+y_0)|g^*(x_0+iy)$，但 $(y-y_0)$ 不能整除 $g^*(x_0+iy)$；3) $l_1=l_2$ 时，$(y-y_0)$ 和 $(y+y_0)$ 都不能整除 $g^*(x_0+iy)$。

定理 14 设 $x_0\in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1,l_2 均为非负整数，若 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=x_0-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)=0$ 的一对 l_2 重根，$z_1=x_0+iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$ 时，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)=0$ 的一对 l_1 重根，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)=0$ 的一对 l 重根，$z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=x_0-iy_0$ 都不是 $g^*(z)=0$ 的根。

证明 $(2)^{*x_0}$ 有解，则 $f(z)=g^*(z)F^*_{d^*}(x_0,(z-x_0)^2)$。再由题意根据定理 13，那么

1) $l_1>l_2$ 时，$(z-z_1)|g^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g^*(z)$，则 z_2 不是 $g^*(z)=0$ 的根，

于是 $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l_2 重根，由 $F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 根的性质 1 推论 4，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对 l_2 重根。$z_1 = x_0 + iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，$F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l_2 重根，于是 $z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 $l_1 - l_2$ 重根。

2) $l_1 < l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1 = l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g^*(z)$，则 z_1 和 z_2 都不是 $g^*(z)=0$ 的根。又 $l_1 = l_2 = l$，所以 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对 l 重根。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l_1, l_2, l 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是：$l = \min(l_1, l_2)$。

推论 2 设 $a \in R$，$(2)^{*a}$ 有解，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $F^*_{d^*}\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x = a$ 上的一对 l 重共轭根。

推论 3 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l_1, l_2 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，y_0^2 是 $d^*\left(x_0, y^2\right)=0$ 的 l_2 重根， $z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 $l_1 - l_2$ 重根；2) $l_1 < l_2$ 时， y_0^2 是 $d^*\left(x_0, y^2\right)=0$ 的 l_1 重根，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 $l_2 - l_1$ 重根；3) $l_1 = l_2$ 时，记 $l_1 = l_2 = l$，则 y_0^2 是 $d^*\left(x_0, y^2\right)=0$ 的 l 重根， $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 都不是 $g^*(z)=0$ 的根。

证明 由定理 14 和定理 12 即得。】

推论 4 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，l_1, l_2, l 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 y_0^2 是 $d^*\left(x_0, y^2\right)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$l = \min(l_1, l_2)$。

证明 由推论 1 和定理 12 即得】

推论 5 设 $a \in R$，$(2)^{*a}$ 有解，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是：y_0^2 是 $d^*\left(a, y^2\right)=0$ 的 l 重的正实根。

证明 由推论 2 和定理 12 推论 2 即得。】

定理 15 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，l 为非负整数，若 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 1) l 为 ≥ 0 的偶数时，$z_0 = x_0$ 不是 $g^*(z)=0$ 的根，$z_0 = x_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l 重根；2) l 为奇数时，$z_0 = x_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的单根，$z_0 = x_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 $l-1$ 重根。

证明 $(2)^{*x_0}$ 有解，则 $f(z)=g^*(z)F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。若 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，不妨设 $z_0 = x_0$ 分别是 $g^*(z)=0$ 的 l_1 重根，$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 $2l_0$ 重根，于是 $l = l_1 + 2l_0$。由点 x_0 的 $g^*(z)$ 性质，则 $l_1 = 0$ 或 1。于是 1) l 为 ≥ 0 的偶数时，必有 $l_1 = 0$，于是 $2l_0 = l$。因此 $z_0 = x_0$ 不是 $g^*(z)=0$ 的根，$z_0 = x_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l 重根；2) l 为奇数时，必有 $l_1 = 1$，于是 $2l_0 = l-1$。因此 $z_0 = x_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的单根，$z_0 = x_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 $l-1$ 重根。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，l^* 为 ≥ 0 的偶数，若 $z_0 = x_0$ 是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的 l^* 重根，则 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重或者 l^*+1 重根，其中 $g^*(x_0)\neq 0$ 时，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重根；$g^*(x_0)=0$ 时，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l^*+1 重根。

证明 由定理 15 即得。】

推论 2 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=0$ 或 $l=1$ 的充要条件是：$z_0 = x_0$ 不是 $F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$ 的根。

证明 由定理 15 即得。】

推论 3 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，l 为非负整数，若 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则

1) l 为 ≥ 0 的偶数时，$z_0 = x_0$ 不是 $g^*(z)=0$ 的根，0 是 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 的 $\dfrac{l}{2}$ 重根；

2) l 为奇数时，$z_0 = x_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的单根，0 是 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 的 $\dfrac{l-1}{2}$ 重根。

证明 由定理 15 和定理 12 即得。】

推论 4 设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，l^* 为 ≥ 0 的偶数，若 0 是 $d^*\left(x_0,y^2\right)=0$ 的 $\dfrac{l^*}{2}$ 重实根，则 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重或者 l^*+1 重根，其中 $g^*(x_0)\neq 0$ 时，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重根；$g^*(x_0)=0$ 时，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l^*+1 重根。

证明　由推论 1 和定理 12 即得】

推论 5　设 $x_0 \in C$，$(2)^{*x_0}$ 有解，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=0$ 或 $l=1$ 的充要条件是：0 不是 $d^*\left(x_0, y^2\right)=0$ 的根。

证明　由推论 3 即得。】

§4 方程组的解与结式方程的根

将 $f_0^*\left(x,y^2\right)$, $f_1^*\left(x,y^2\right)$关于 y^2 的结式，记为$res\left(f_0^*,f_1^*,y^2\right)=M(x)$，则

$$M(x)=\begin{vmatrix}
\frac{f^{(n)}(x)}{n!} & -\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots\cdots & & & \\
 & \frac{f^{(n)}(x)}{n!} & -\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots\cdots & & \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
 & & & \frac{f^{(n)}(x)}{n!} & -\frac{f^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & \frac{f^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots \\
\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!} & \cdots\cdots & & & \\
 & \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!} & & & \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
 & & & \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{f^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \frac{f^{(n-5)}(x)}{(n-5)!} & \cdots
\end{vmatrix}$$

这是一个$n-1$阶行列式，展开后是x的实系数多项式，次数为$\frac{n(n-1)}{2}$，可设

$$M(x)=B_0x^{\frac{n(n-1)}{2}}+B_1x^{\frac{n(n-1)}{2}-1}+\cdots+B_{\frac{n(n-1)}{2}-1}x+B_{\frac{n(n-1)}{2}}\ (n\geq 2)$$

其中$B_0\neq 0$，$B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}}$均为实数。特别当$n=2$时，$M(x)=\left|\frac{f'(x)}{1!}\right|=f'(x)$。

$M(x)$代表结式，故称$M(x)=0$为结式方程。由于$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}=a_0\neq 0$，我们有

定理[4]**16** 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若$\left(x_0,y_0^2\right)$是方程组$(2)^*$的解，则x_0是$M(x)=0$的根；反之，若x_0是$M(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0^2，使$\left(x_0,y_0^2\right)$是方程组$(2)^*$的解。

推论 1 设$x_0\in C$，$y_0^2\in C$，若y_0^2是$(2)^{*x_0}$的解，则x_0是$M(x)=0$的根；反之，若x_0是$M(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0^2，使y_0^2是$(2)^{*x_0}$的解。

证明 由定理 16 和定理 1 即得。】

推论 2 设$x_0\in C$，则$(2)^{*x_0}$有解的充要条件是：$M(x_0)=0$。

证明 由推论 1 即得。】

设$x_0\in C$，若$M(x_0)=0$，根据推论 2 则$(2)^{*x_0}$有解，$f(z)$就能在z平面上的点x_0分

解成两个 z 的复系数多项式 $g^*(z)$ 与 $F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$ 的乘积，即 $f(z)=g^*(z)F^*_{d^*}\left(x_0,(z-x_0)^2\right)$。

定理 17 设 n 为 ≥ 2 的整数， $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的所有复根，$z_j=x_{jh}+iy_{jh}$， $z_h=x_{jh}-iy_{jh}$ $(1\leq j<h,h=2,3,\cdots,n)$ 是 $f(z)=0$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对复根，则 $\left(x_{jh},y_{jh}^2\right)$ $(1\leq j<h,h=2,3,\cdots,n)$ 是方程组 $(2)^*$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个复数解，$x=x_{jh}$ $(1\leq j<h,h=2,3,\cdots,n)$ 都是 $M(x)=0$ 的根，于是 $\left(x-x_{jh}\right)$ 是 $M(x)$ 的一次因式，而且

$$M(x)=B_0\prod_{1\leq j<h,h=2}^{n}\left(x-x_{jh}\right)\quad (\text{其中 } B_0\in R \text{ 且 } B_0\neq 0)$$

方程组 $(2)^*$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个解， $M(x)=0$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个根， $(2)^*$ 的一个解对应 $M(x)=0$ 的一个根。

证明 根据定理 7 和定理 16 即得，必须说明的是

1. 在 $f(z)=0$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对复根的中点没有重合的情况下， $x=x_{jh}$ （$1\leq j<h$，$h=2,3,\cdots,n$）都是 $M(x)=0$ 的单根(即 $\left(x-x_{jh}\right)$ 是 $M(x)$ 的 1 重因式)。这些根的个数总和等于 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，恰好等于 $M(x)=0$ 的次数，因而这 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个根就是 $M(x)=0$ 的所有复根。

$$M(x)=B_0\prod_{1\leq j<h,h=2}^{n}\left(x-x_{jh}\right)\quad (\text{其中 } B_0\in R \text{ 且 } B_0\neq 0)$$

方程组 $(2)^*$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个各不相同的复数解， $M(x)=0$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个根，可以说 $(2)^*$ 的一个解对应 $M(x)=0$ 的一个根。

2. 在 $f(z)=0$ 的成对复根的中点有重合的情况下， $f(z)=0$ 依然有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对复根，中点也依然是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个(只是有重合而已)，方程组 $(2)^*$ 复数解的个数也还是 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个(其中会有相同的解)， $M(x)=0$ 也依然有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个根。这时只需换一种更普通的表述方式，说 $\left(x-x_{jh}\right)$ 是 $M(x)$ 的一次因式 $(1\leq j<h,h=2,3,\cdots,n)$。这些因式的次数之和为 $C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$，恰好等于 $M(x)$ 的次数，因而它们就是 $M(x)$ 的全部因式。于是有

$$M(x)=B_0\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-x_{jh})\qquad (\text{其中 } B_0\in R \text{ 且 } B_0\neq 0)。】$$

定义 设 $x_0\in C$， $y_0^2\in C$， l 为非负整数，若 (x_0,y_0^2) 是方程组 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的解集的 l 重元素，则称 (x_0,y_0^2) 是 $(2)^*$ 的 l 重(复数)解。

显然，(x_0,y_0^2) 是 $(2)^*$ 的 l 重解的充要条件是：(x_0,y_0^2) 是 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的解集的 l 重元素。(x_0,y_0^2) 是 $(2)^*$ 的 0 重解的充要条件是：(x_0,y_0^2) 不是 $(2)^*$ 的解。

$f(z)=0$ 的次数 $n\ge 2$，由定理 17，它的所有成对复根的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个中点就是 $M(x)=0$ 的所有复根，于是称 $M(x)=0$ 是 $f(z)=0$ 成对复根的中点方程；方程组 $(2)^*$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个解，$M(x)=0$ 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个根，$(2)^*$ 的一个解对应 $M(x)=0$ 的一个根。若 x_0 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，则 $(2)^*$ 恰好有 L_* 个解与之相对应，这 L_* 个解可写成

$$(x_0,y_j^2),\quad j=1,2,\cdots,L_*。$$

这 L_* 个解是 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y^2)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解。

由 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y^2)\}$ 可写成

$$\{(x,y^2)\}=\left\{(x,y^2)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0^*(x,y^2)=0\\ f_1^*(x,y^2)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y^2\in C)\ \ (2)^*\right\}$$

其中 $x=x_0$ 的全部解(含相同解)组成的集合可写成

$$\left\{(x_0,y^2)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0^*(x,y^2)=0\\ f_1^*(x,y^2)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y^2\in C)\ \ (2)^*\right\}$$

因此，说 (x_0,y_j^2) $(j=1,2,\cdots,L_*)$ 是 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y^2)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解，就意味着

$$\{(x_0,y_j^2)\,|\,y_j^2\in C,j=1,2,\cdots,L_*\}=\left\{(x_0,y^2)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0^*(x,y^2)=0\\ f_1^*(x,y^2)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y^2\in C)\ \ (2)^*\right\}。$$

写成推论则有

推论 1 设 $x_0\in C$，则 x_0 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根的充要条件是：$\exists\ y_j^2\in C$，$j=1,2,\cdots,L_*$，使 (x_0,y_j^2) $(j=1,2,\cdots,L_*)$ 是方程组 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y^2)\}$ 中

$x=x_0$ 的全部解(含相同解)，即

$$\left\{\left(x_0,y_j^2\right)\mid y_j^2\in C, j=1,2,\cdots,L_*\right\}=\left\{\left(x_0,y^2\right)\mid\left\{\begin{array}{l}f_0^*\left(x,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x,y^2\right)=0\end{array}\right.\left(x\in C,y^2\in C\right)\ (2)^*\right\}$$

推论 1 可简述成 设 $x_0\in C$，则 x_0 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根的充要条件是：$(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\left\{\left(x,y^2\right)\right\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L_*。

推论 2 设 n 为 ≥ 2 的整数，$x_0\in C$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，l 为非负整数，$z_0=x_0$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的 l 重根，$z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为中点的所有各不相同的成对非 x_0 根，其中 $z_{j1}=x_0+iy_j$，$z_{j2}=x_0-iy_j$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，又 x_0 分别是 $Q(x)=0$ 的 L 重根和 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，则

$$L=l+2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]=l^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\text{，}\quad L_*=\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\text{，}\quad L=l+2L_*\text{。}$$

其中 $l=n$ 时，$s=0$，$L=n^2$，$L_*=\dfrac{n(n-1)}{2}$；$l=0$ 时，$L=2\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$，$L_*=\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$。

证明 根据第二章定理 16 推论 2，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为中点的成对根共有 $\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$ 对，且 $L=l+2\left[\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]=l^2+2\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$。

不妨设 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根(其中 $y_0\in C$)，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的以 x_0 为中点的成对根，由定理 17，则相应的 $(x-x_0)$ 是 $M(x)$ 的一次因式。而这样的成对根共有 $\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$ 对，于是相应的 $(x-x_0)$ 是 $M(x)$ 的 $\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$ 重因式，又 x_0 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，于是 $L_*=\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$。故 $L=l+2L_*$，于是命题成立。】

推论 3 设 $z_0\in C$，若 $z=z_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $(z_0,0)$ 是方程组 $(2)^*$ 的 $\dfrac{l(l-1)}{2}$ 重解。

证明 若 $z=z_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，这 l 个 $z=z_0$ 本身可组合成 $f(z)=0$ 的 $\dfrac{l(l-1)}{2}$ 对复

根 $z=z_0$，$z=z_0$，由定理 17，它对应 $(2)^*$ 的 $\frac{l(l-1)}{2}$ 个复数解 $(z_0,0)$。于是 $(z_0,0)$ 是 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合的 $\frac{l(l-1)}{2}$ 重元素，因此 $(z_0,0)$ 是 $(2)^*$ 的 $\frac{l(l-1)}{2}$ 重解。】

推论 4 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l_1，l_2 均为非负整数，若 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=x_0-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $(z_1,0)$ 和 $(z_2,0)$ 分别是方程组 $(2)^*$ 的 $\frac{l_1(l_1-1)}{2}$ 重和 $\frac{l_2(l_2-1)}{2}$ 重解，$\left(x_0,y_0^2\right)$ 是 $(2)^*$ 的 l_1l_2 重解。

证明 根据推论 3，则 $(z_1,0)$ 和 $(z_2,0)$ 分别是 $(2)^*$ 的 $\frac{l_1(l_1-1)}{2}$ 重和 $\frac{l_2(l_2-1)}{2}$ 重解。

由于 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=x_0-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，它们可组合成 $f(z)=0$ 的 l_1l_2 对复根 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，由定理 17，$(2)^*$ 有 l_1l_2 个复数解 $\left(x_0,y_0^2\right)$ 与之相对应，于是 $\left(x_0,y_0^2\right)$ 是 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合的 l_1l_2 重元素，因此 $\left(x_0,y_0^2\right)$ 是 $(2)^*$ 的 l_1l_2 重解。】

推论 5 设 n 为 ≥ 2 的整数，则 n 次方程 $f(z)=0$ 共轭复根的实部均为 $M(x)=0$ 的实根，$M(x)=0$ 至少有一个实根。

证明 $f(z)=0$ 的 n 个复根或为实根，或为共轭复根，由定理 17，其每对实根的中点或其共轭复根的实部均为 $M(x)=0$ 的实根，$n\geq 2$，$M(x)=0$ 至少有一个实根。】

$f(z)$ 的次数 $n\geq 2$，$M(x)$ 的次数 $\frac{n(n-1)}{2}$ 比 $Q(x)$ 的次数 n^2 要小很多，于是要求 $f(z)=0$ 共轭复根的实部，由推论 5 可以先求 $M(x)=0$ 的实根。作以 $M(x)$，$M^{'}(x)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 x $(x\in R)$ 的变号数分别记为 V_x^M 和 U_x^M。

设 $V_{-\infty}^M-V_{+\infty}^M=T$，由推论 5，则 $T\geq 1$，于是可在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $M(x)=0$ 实根的 T 个隔离区间：$[\alpha_1,\beta_1]$，$[\alpha_2,\beta_2]$，$\cdots$，$[\alpha_T,\beta_T]$，其中 $\alpha_1<\beta_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\cdots\leq\alpha_T<\beta_T$，且 $M(\alpha_j)\neq 0$，$M(\beta_j)\neq 0$，$V_{\alpha_j}^M-V_{\beta_j}^M=1$，$j=1,2,\cdots,T$。于是 $M(x)=0$ 的 T 个各不相同的实根就可表示为 $x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$ (简写成 $x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{M(\ )}$)，$j=1,2,\cdots,T$，

其中 x_j 是 $M(x)=0$ 的 $L_j^M=U_{\alpha_j}^M-U_{\beta_j}^M$ 重实根。

$M(x)=0$ 的实根总数为：$U_{-\infty}^M-U_{+\infty}^M=\sum_{j=1}^{T}\left(U_{\alpha_j}^M-U_{\beta_j}^M\right)=\sum_{j=1}^{T}L_j^M$ 。

$M(x)$ 的实根因式就可表示为：$\prod_{j=1}^{T}\left(x-{}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}\right)^{\left(U_{\alpha_j}^M-U_{\beta_j}^M\right)}$

若 α,β 均为有限实数，且 $\alpha<x_0<\beta$ ，$M(\alpha)\neq 0$ ，$M(x_0)=0$ ，$M(\beta)\neq 0$ ，$V_\alpha^M-V_\beta^M=1$，则 $M(x)=0$ 在 (α,β) 区间内的根 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$ (即 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$)，根 x_0 的重数 $L_0^M=U_\alpha^M-U_\beta^M$ 。

为了方便与二元多项式方程组 $(2)^*$ 进行对比，我们可以将方程组

$$\begin{cases} f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0 \\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=0 \end{cases} \qquad (2)^{*x_0}$$

视为关于 x_0 ，y^2 的二元多项式方程组。设 $x_0\in C$ ，$y_0^2\in C$ ，若 $f_0^*\left(x_0,y^2\right)$, $f_1^*\left(x_0,y^2\right)$ 在 $y^2=y_0^2$ 时函数值满足 $f_0^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$ 且 $f_1^*\left(x_0,y_0^2\right)=0$ ，则称 $\left(x_0,y_0^2\right)$ 是方程组 $(2)^{*x_0}$ 的一个(复数)解。

$\left(x_0,y_0^2\right)$ 是 $(2)^{*x_0}$ 的解的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_0^*\left(x_0,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_1^*\left(x_0,y^2\right)$。

再设 l 为非负整数，若 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_0^*\left(x_0,y^2\right)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid f_1^*\left(x_0,y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0^*\left(x_0,y^2\right)$, $f_1^*\left(x_0,y^2\right)$，则称 $\left(x_0,y_0^2\right)$ 是方程组 $(2)^{*x_0}$ 的 l 重(复数)解。统计解的个数，重解按重数计算。设 $(2)^{*x_0}$ 复数解(含重解)的个数 $K_{x_0}^*$ ，则 $K_{x_0}^*\leq\left[\frac{n}{2}\right]$ 。由 $(2)^{*x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合可写成 $\left\{\left(x_0,y^2\right)\middle|\begin{cases} f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0 \\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=0\end{cases}\ \left(y^2\in C\right)\ (2)^{*x_0}\right\}$ 。$\left(x_0,y_0^2\right)$ 是 $(2)^{*x_0}$ 的 l 重解的充要条件是：$\left(x_0,y_0^2\right)$ 是 $(2)^{*x_0}$ 所有复数解组成的集合的 l 重元素。

定理 18 设 $x_0\in C$ ，$M(x_0)=0$ ，则 $(2)^{*x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合是方程组 $(2)^*$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\left\{\left(x,y^2\right)\right\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解(含相同解)组成的集合的子集，即

$$\left\{(x_0,y^2)\mid\begin{cases}f_0^*(x_0,y^2)=0\\ f_1^*(x_0,y^2)=0\end{cases}\ (y^2\in C)\ (2)^{*x_0}\right\}\subset\left\{(x_0,y^2)\mid\begin{cases}f_0^*(x,y^2)=0\\ f_1^*(x,y^2)=0\end{cases}\ (x\in C,y^2\in C)\ (2)^*\right\}$$

其中$(f(z),f^{'}(z))=1$时，有

$$\left\{(x_0,y^2)\mid\begin{cases}f_0^*(x_0,y^2)=0\\ f_1^*(x_0,y^2)=0\end{cases}\ (y^2\in C)\ (2)^{*x_0}\right\}=\left\{(x_0,y^2)\mid\begin{cases}f_0^*(x,y^2)=0\\ f_1^*(x,y^2)=0\end{cases}\ (x\in C,y^2\in C)\ (2)^*\right\}$$

证明 由$x_0\in C$，$M(x_0)=0$，则$(2)^{*x_0}$有解。记

$$A=\left\{(x_0,y^2)\mid\begin{cases}f_0^*(x_0,y^2)=0\\ f_1^*(x_0,y^2)=0\end{cases}\ (y^2\in C)\ (2)^{*x_0}\right\}$$

$$B=\left\{(x_0,y^2)\mid\begin{cases}f_0^*(x,y^2)=0\\ f_1^*(x,y^2)=0\end{cases}\ (x\in C,y^2\in C)\ (2)^*\right\}$$

则A是由$(2)^{*x_0}$所有复数解组成的集合，B是由$(2)^*$所有复数解组成的集合$\{(x,y^2)\}$中$x=x_0$的全部解组成的集合，A和B是两个允许有重元的有限集合。

$\forall$ $(x_0,y_{j_0}^2)\in A$，$(x_0,y_{j_0}^2)(l)\in A$，则$l\geq 1$，$(x_0,y_{j_0}^2)$是$(2)^{*x_0}$的任意一个解，且$(x_0,y_{j_0}^2)$是$(2)^{*x_0}$的l重解，由旧定义即$y_{j_0}^2$是$(2)^{*x_0}$的l重解，由定理 2，则$y_{j_0}^2$是$d^*(x_0,y^2)=0$的l重根。于是 1. $y_{j_0}=0$时，由定理 15 推论 4，则$z_0=x_0$是$f(z)=0$的$2l$重或$2l+1$重根。

1) 若$z_0=x_0$是$f(z)=0$的$2l$重根，由定理 17 推论 3 则$(x_0,0)$是方程组$(2)^*$的$\frac{2l(2l-1)}{2}=l(2l-1)$重解，故$(x_0,0)$是$(2)^*$所有复数解组成的集合的$l(2l-1)$重元素，从而也是$B$的$l(2l-1)$重元素。由$l\geq 1$，$2l-1\geq 1$，$l(2l-1)\geq l$，则$(x_0,0)$是$B$的$l$重以上(含$l$重)元素，即$(x_0,0)(\geq l)\in B$。

2) 若$z_0=x_0$是$f(z)=0$的$2l+1$重根，由定理 17 推论 3 则$(x_0,0)$是方程组$(2)^*$的$l(2l+1)$重解，故$(x_0,0)$是$(2)^*$所有复数解组成的集合的$l(2l+1)$重元素，从而也是B的$l(2l+1)$重元素。由$l\geq 1$，$2l+1\geq 3$，$l(2l+1)\geq 3l>l$，则$(x_0,0)$是B的l重以上(不含l重)元素，即$(x_0,0)(>l)\in B$。

2. $y_{j_0}\neq 0$时，不妨设$z_1=x_0+iy_{j_0}$，$z_2=x_0-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，由定理 14 推论 4 则$l=\min(l_1,l_2)$。由定理 17 推论 4 则$(x_0,y_{j_0}^2)$是方程组$(2)^*$的l_1l_2重解，

故$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)$是$(2)^*$所有复数解组成的集合的$l_1l_2$重元素，从而也是$B$的$l_1l_2$重元素。由$l=\min(l_1,l_2)$且$l\ge 1$，$l_1l_2\ge l^2\ge l$，则$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)$是$B$的$l$重以上(含$l$重)元素，即$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(\ge l)\in B$。

总之，由$\forall\ \left(x_0,y_{j_0}^2\right)\in A$，$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(l)\in A\Rightarrow\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(\ge l)\in B$。故$A\subset B$，即

$$\left\{\left(x_0,y^2\right)|\begin{cases}f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=0\end{cases}\left(y^2\in C\right)\ (2)^{*x_0}\right\}\subset\left\{\left(x_0,y^2\right)|\begin{cases}f_0^*\left(x,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x,y^2\right)=0\end{cases}\left(x\in C,y^2\in C\right)\ (2)^*\right\}$$

其中$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$时，$f(z)=0$的根均为1重根(即单根)，$z_0=x_0$是$f(z)=0$的0重根或者1重根，由定理15推论5，则0不是$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的根，由定理2则0不是$(2)^{*x_0}$的解，由新定义即$(x_0,0)$不是$(2)^{*x_0}$的解，于是$(x_0,0)$不是$A$的元素。

我们说$(2)^{*x_0}$的解均为1重解，即A的元素都是1重元素。否则，假设存在$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(l)\in A$，$l>1$，则$y_{j_0}\neq 0$，重复上面的论证可知：$y_{j_0}^2$是$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的$l$重根。由于$l=\min(l_1,l_2)$且$l>1$，则$l_1>1$，$l_2>1$，$z_1=x_0+iy_{j_0}$和$z_2=x_0-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根，矛盾。

因此，对$\forall\ \left(x_0,y_{j_0}^2\right)\in A$，$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(l)\in A$，则$l=1$，$y_{j_0}\neq 0$，重复论证可知：$y_{j_0}^2$是$d^*\left(x_0,y^2\right)=0$的$l$重根，$l=\min(l_1,l_2)$且$l=1$，$l_1=1$，$l_2=1$，则$l_1l_2=l^2=l=1$，于是$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)$是$B$的$l$重元素，即$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(l)\in B$。故对$\forall\ \left(x_0,y_{j_0}^2\right)\in A$，$\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(l)\in A\Rightarrow\left(x_0,y_{j_0}^2\right)(l)\in B$。

反过来，$\forall\ \left(x_0,y_{j_1}^2\right)\in B$，那么$\left(x_0,y_{j_1}^2\right)$是方程组$(2)^*$的解，由定理1则$y_{j_1}^2$是$(2)^{*x_0}$的解，由新定义即$\left(x_0,y_{j_1}^2\right)$是$(2)^{*x_0}$的解，于是$\left(x_0,y_{j_1}^2\right)\in A$，即由$\forall\ \left(x_0,y_{j_1}^2\right)\in B\Rightarrow\left(x_0,y_{j_1}^2\right)\in A$。

根据预章定理1，则$A=B$，即

$$\left\{\left(x_0,y^2\right)|\begin{cases}f_0^*\left(x_0,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x_0,y^2\right)=0\end{cases}\left(y^2\in C\right)\ (2)^{*x_0}\right\}=\left\{\left(x_0,y^2\right)|\begin{cases}f_0^*\left(x,y^2\right)=0\\ f_1^*\left(x,y^2\right)=0\end{cases}\left(x\in C,y^2\in C\right)\ (2)^*\right\}$$。】

定理 19 设$x_0\in C$，$M(x_0)=0$，$(2)^{*x_0}$复数解(含重解)的个数为$K_{x_0}^*$，方程组$(2)^*$所有复数解(含相同解)组成的集合$\left\{\left(x,y^2\right)\right\}$中$x=x_0$的全部解(含相同解)的个数为$L_*$，则$K_{x_0}^*\le L_*$，其中$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=0$时，$K_{x_0}^*=L_*$。

证明 不妨设A是由$(2)^{*x_0}$所有复数解组成的集合，B是由$(2)^*$所有复数解组成的

集合$\{(x,y^2)\}$中$x=x_0$的全部解组成的集合。由题设，则A的元素个数为$K_{x_0}^*$，B的元素个数为L_*。由定理 18，则$A\subset B$，因此$K_{x_0}^*\le L_*$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=0$时，$A=B$，于是$K_{x_0}^*=L_*$。】

显然，二元和一元方程组$(2)^{*x_0}$复数解的个数相等，定理 19 中$(2)^{*x_0}$的复数解，无论用一元或二元法表示，命题均成立。

定理 20 设$x_0\in C$，L_*为正整数，若$x=x_0$是$M(x)=0$的L_*重根，$(2)^{*x_0}$复数解(含重解)的个数为$K_{x_0}^*$，则$K_{x_0}^*\le L_*$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$K_{x_0}^*=L_*$。

证明 由定理 17 推论 1 和定理 19 即得。】

定理 21 设$x_0\in C$，L_*为正整数，若$x=x_0$是$M(x)=0$的L_*重根，$d^*\left(x_0,y^2\right)$关于y^2的次数为K^*，则$K^*\le L_*$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$K^*=L_*$。

证明 由定理 2 推论 2 和定理 20 即得。】

第五章
施图姆序列之二

§1 恒定元为实数 a 的方程组

设整数 $n \ge 2$，$a_0 \ne 0$，实系数 n 次多项式 $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$，令 $a \in R$，$z = a + iy$，则有关系式

$$f(z) = f(a+iy) = i^n f_0(a,y) + i^{n-1} f_1(a,y) = i^n\left[f_0(a,y) - i f_1(a,y)\right] \qquad (1)^a$$

于是由 $(1)^a$ 可得 y 的实系数一元多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(a,y) = 0 \\ f_1(a,y) = 0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

其中 $\begin{cases} f_0(a,y) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} y^n - \dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} y^{n-2} + \dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!} y^{n-4} - \cdots \\ f_1(a,y) = \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} y^{n-1} - \dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!} y^{n-3} + \dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!} y^{n-5} - \cdots \end{cases}$

$f_0(a,y)$ 和 $f_1(a,y)$ 是 y 的实系数多项式，为 y 的奇偶函数。而 y 的奇函数在提取一个 y 因子后，其另一个因式必为 y 的偶函数。在消去这个 y 因子后，$(2)^a$ 就变成了 y^2 的实系数一元多项式方程组。为了便于讨论，作如下处理：

n 为偶数时，令 $\begin{cases} f_0(a,y) = f_0^*(a,y^2) \\ f_1(a,y) = y f_1^*(a,y^2) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} f_0^*(a,y^2) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} y^n - \dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} y^{n-2} + \dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!} y^{n-4} - \cdots + (-1)^{\frac{n}{2}} f(a) \\ f_1^*(a,y^2) = \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} y^{n-2} - \dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!} y^{n-4} + \dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!} y^{n-6} - \cdots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} f'(a) \end{cases}$$

n 为奇数时，令 $\begin{cases} f_0(a,y) = y f_0^*(a,y^2) \\ f_1(a,y) = f_1^*(a,y^2) \end{cases}$，则

$$\begin{cases} f_0^*(a,y^2) = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} y^{n-1} - \dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!} y^{n-3} + \dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!} y^{n-5} - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} f'(a) \\ f_1^*(a,y^2) = \dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} y^{n-1} - \dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!} y^{n-3} + \dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!} y^{n-5} - \cdots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} f(a) \end{cases}$$

于是由$(2)^a$可得方程组

$$\begin{cases} f_0^*(a,y^2)=0 \\ f_1^*(a,y^2)=0 \end{cases} \qquad (2)^{*a}$$

其中a为恒定元，y^2是变元。$\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$，故$f_0^*(a,y^2)$，$f_1^*(a,y^2)$是两个$y^2$的系数不全为零的多项式。

定理 1 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，则(a,y_0^2)是方程组$(2)^*$的解充要条件是：y_0^2是$(2)^{*a}$的解。

证明在第四章定理 1 中令$x_0=a\in R$即得。】

简记$f_0^*(a,y^2)=f_0^*(y^2)$，$f_1^*(a,y^2)=f_1^*(y^2)$，称为点a的$f_0^*(y^2)$，$f_1^*(y^2)$，则$(2)^{*a}$简写为

$$\begin{cases} f_0^*(y^2)=0 \\ f_1^*(y^2)=0 \end{cases} \qquad (2)^{*a}$$

$f_0^*(y^2)$，$f_1^*(y^2)$是实系数多项式。$\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$，故$f_0^*(y^2)$是$y^2$的次数为$\left[\dfrac{n}{2}\right]$的多项式，但$f_1^*(y^2)$却有可能是零多项式，即当它的系数全为零时。

设$a\in R$，$y_0^2\in C$，若点a的$f_0^*(y^2)$，$f_1^*(y^2)$在$y^2=y_0^2$时函数值满足$f_0^*(y_0^2)=0$且$f_1^*(y_0^2)=0$，则y_0^2是方程组$(2)^{*a}$的一个(复数)解。若点a的$f_1^*(y^2)\equiv 0$，则点a的$f_0^*(y^2)$ $(=0)$的根就是$(2)^{*a}$的解。显然，y_0^2是$(2)^{*a}$的解的充要条件是$(y^2-y_0^2)\mid f_0^*(y^2)$且$(y^2-y_0^2)\mid f_1^*(y^2)$。

再设l为非负整数，若$(y^2-y_0^2)^l\mid f_0^*(y^2)$且$(y^2-y_0^2)^l\mid f_1^*(y^2)$，但$(y^2-y_0^2)^{l+1}$不能同时整除$f_0^*(y^2)$，$f_1^*(y^2)$，则称$y_0^2$是方程组$(2)^{*a}$的$l$重(复数)解。若点$a$的$f_1^*(y^2)\equiv 0$，则点$a$的$f_0^*(y^2)$ $(=0)$的l重根就是$(2)^{*a}$的l重解。由$(2)^{*a}$所有复数解(含重解)组成的集合是允许有重元的有限集合，它可写成

$$\left\{ y^2 \,\middle|\, \begin{cases} f_0^*(y^2)=0 \\ f_1^*(y^2)=0 \end{cases} \ (y^2\in C)\ \ (2)^{*a} \right\}$$

显然，y_0^2是简写前$(2)^{*a}$的解的充要条件是：y_0^2是简写后$(2)^{*a}$的解。将$(2)^{*a}$简写不影响定理 1 命题的成立，以下各定理也是如此。

当点a的$f_1^*\left(y^2\right)\not\equiv 0$时，将$(2)^{*a}$所有复数解(含重解)组成的集合记作$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}$，且称它是方程$f_0^*\left(y^2\right)=0$所有复根组成的集合与方程$f_1^*\left(y^2\right)=0$所有复根组成的集合的交集。若$\sqrt{f_1^*(\ )}=\phi$，则$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}=\phi$。交集$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}$的本质特征是：设$y_0^2\in C$，$l,l_0,l_1$均为非负整数，则$y_0^2(l)\in\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}\Leftrightarrow y_0^2(l_0)\in\sqrt{f_0^*(\ )}$，$y_0^2(l_1)\in\sqrt{f_1^*(\ )}$，其中$l=\min(l_0,l_1)$。

当点a的$f_1^*\left(y^2\right)\equiv 0$时，若仍然把$f_1^*\left(y^2\right)=0$看作关于$y^2$的方程，则任意复数都是它的根，而且根的重数都是无限次的。在预章由零多项式方程$f_1^*\left(y^2\right)=0$所有复根组成的集合$\sqrt{f_1^*(\ )}$称为整式方程的根全集。根全集$\sqrt{f_1^*(\ )}$是一个允许有重元的无限集合，任意复数都是它的元素，而且元素的重数也都是无限次的。若套用子集定义，则有$\sqrt{f_0^*(\ )}\subset\sqrt{f_1^*(\ )}$。为了统一，这时仍将$(2)^{*a}$所有复数解(含重解)组成的集合记作$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}$，且称它是方程$f_0^*\left(y^2\right)=0$所有复根组成的集合与零多项式方程$f_1^*\left(y^2\right)=0$所有复根组成的集合的交集。这时，$(2)^{*a}$就转化为$f_0^*\left(y^2\right)=0$，故$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}$的本质特征是$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}=\sqrt{f_0^*(\ )}$。

总之，无论点a的$f_1^*\left(y^2\right)$是否是非零多项式，都有

$$\left\{y^2\mid\begin{cases}f_0^*\left(y^2\right)=0\\ f_1^*\left(y^2\right)=0\end{cases}\left(y^2\in C\right)\ (2)^{*a}\right\}=\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}$$

y_0^2是$(2)^{*a}$的l重解的充要条件是：$y_0^2(l)\in\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}$。

定理 2 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，若y_0^2是$(2)^{*a}$的解，则a是$M(x)=0$的根；反过来，若a是$M(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0^2，使y_0^2是$(2)^{*a}$的解。

证明由定理 1 和第四章定理 16 即得。】

推论设$a\in R$，则$(2)^{*a}$有解的充要条件是：$M(a)=0$。

证明根据定理 2 即得。】

引理设$a\in R$，$M(a)=0$，$(2)^{*a}$复数解(含重解)的个数为K_a^*，方程组$(2)^*$所有复数解(含相同解)组成的解集$\left\{\left(x,y^2\right)\right\}$中$x=a$的全部解(含相同解)的个数为$L_*$，则$K_a^*\le L_*$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$K_a^*=L_*$。

证明由第四章定理 19 即得。】

定理 3 设 $a\in R$，L_* 为正整数，若 $x=a$ 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，$(2)^{*a}$ 复数解(含重解)的个数为 K_a^*，则 $K_a^*\le L_*$，其中 $(f(z),f'(z))=1$ 时，$K_a^*=L_*$。

证明 由引理和第四章定理 17 推论 1 即得。】

$(2)^{*a}$ 解的**性质**性质及推论 1 至 4 与第三章 $(2)^a$ 解的性质 2 及其推论本质上相同。

性质设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，若 y_0^2 是 $(2)^{*a}$ 的解，则 $\overline{y_0^2}$ 也是 $(2)^{*a}$ 的解。

推论 1 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，则 y_0^2 是 $(2)^{*a}$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的解。

推论 2 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，则 $(y^2-y_0^2)\mid f_0^*(y^2)$ 且 $(y^2-y_0^2)\mid f_1^*(y^2)$ 的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_0^*(y^2)$ 且 $\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_1^*(y^2)$。

推论 3 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，l 为非负整数，则 $(y^2-y_0^2)^l\mid f_0^*(y^2)$ 且 $(y^2-y_0^2)^l\mid f_1^*(y^2)$ 的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_0^*(y^2)$ 且 $\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_1^*(y^2)$。

推论 4 设 $a\in R$，$y_0^2\in C$，l 为非负整数，则 y_0^2 是 $(2)^{*a}$ 的 l 重解的充要条件是：$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的 l 重解。

推论 5 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，则 y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是：$(y^2-y_0^2)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_0^*(y^2)$ 且 $(y^2-y_0^2)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_1^*(y^2)$，但 $(y^2-y_0^2)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0^*(y^2), f_1^*(y^2)$。

证明 在第四章 $(2)^{*x_0}$ 解的性质推论 5 中简记 $f_0^*(a,y^2)=f_0^*(y^2)$，$f_1^*(a,y^2)=f_1^*(y^2)$ 即得。】

定理 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为正整数，若 $(y^2-y_0^2)^l\mid f_0^*(y^2)$ 且 $(y^2-y_0^2)^l\mid f_1^*(y^2)$，则 $(y^2-y_0^2)^l\mid f(a+iy)$，于是

1)当 $y_0\ne 0$ 时，$(y-y_0)^l\mid f(a+iy)$，$(y+y_0)^l\mid f(a+iy)$，即 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根；

2)当 $y_0=0$ 时，$y^{2l}\mid f(a+iy)$，即 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 $2l$ 重以上根。

证明在第四章定理 4 中令 $x_0=a\in R$，简记 $f_0^*(a,y^2)=f_0^*(y^2)$，$f_1^*(a,y^2)=f_1^*(y^2)$ 即

得。】

推论设$a \in R$，l为正整数，若$y^{2l} \mid f_0^*(y^2)$且$y^{2l} \mid f_1^*(y^2)$，则$y^{2l} \mid f(a+iy)$，即$z_0 = a$是$f(z)=0$的$2l$重以上根。

证明在定理 4 中令$y_0 = 0$即得。】

定理 5 设$a \in R$，则0是$(2)^{*a}$的解的充要条件是：$z = a$是$f(z)=0$的 2 重以上根。

证明根据定理 1 和第四章定理 5 即得。】

定理 6 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则(a, y_0)，$(a, -y_0)$是方程组(2)一对复数解的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*a}$的一个解。

证明由定理 1 和第四章定理 6 即得。】

定理 7 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$的一对复根的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*a}$的一个解。

证明 1 由定理 1 和第四章定理 7 推论 2 即得。】

证明 2 由定理 6 和第二章定理 7 推论 2 即得。】

定理 7 表明 设$a \in R$，$y_0 \in C$，则

$(y^2 - y_0^2) \mid f(a+iy)$的充要条件是：$(y^2 - y_0^2) \mid f_0^*(y^2)$且$(y^2 - y_0^2) \mid f_1^*(y^2)$

由定理 7 和第三章§1 定理 7 可知　设$a \in R$，$y_0 \in C$，则y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对复数解的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*a}$的一个解。即

$$(y^2 - y_0^2) \mid f_0(y) \text{且} (y^2 - y_0^2) \mid f_1(y) \Leftrightarrow (y^2 - y_0^2) \mid f_0^*(y^2) \text{且} (y^2 - y_0^2) \mid f_1^*(y^2)。$$

例 1 设$a \in R$，$y_0 \in C$，若$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$的一对复根，由定理 7 和定理 2 推论，则$M(a) = 0$。

推论 1 设$a \in R$，则$z_1 = a$，$z_2 = a$是$f(z)=0$的一对实根的充要条件是：0 是$(2)^{*a}$的一个实数解。

证明 在定理 7 中令$y_0 = 0$即得。】

推论 2 设$a \in R$，$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x = a$上的一对共轭根的充要条件是：y_0^2是$(2)^{*a}$的一个正实数解。

证明 在定理 7 中令$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$即得。】

推论 3 设$a \in R$，y_0为纯虚数，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$在z平面实轴

上的一对非 a 实根的充要条件是： y_0^2 是 $(2)^{*a}$ 的一个负实数解。

证明 在定理 7 中令 y_0 为纯虚数即得。】

推论 4 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a - iy_0$； $\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是： y_0^2， $\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对共轭复数解。

证明 由题意根据定理 7 即得。】

推论 4 表明 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，则 $\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy)$ 的充要条件是：

$$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_0^*\left(y^2\right) 且 \left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_1^*\left(y^2\right)$$

例 2 设 $a \in R$， $y_0^2 \notin R$，由推论 4 和第三章§1 定理 7 推论 5，则 y_0， $-y_0$； $-\overline{y_0}$， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的两对不相同的复数解的充要条件是： y_0^2， $\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对共轭复数解。即

$$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_0(y) 且 \left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_1(y) 的充要条件是：$$

$$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_0^*\left(y^2\right) 且 \left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_1^*\left(y^2\right)。$$

作点 a 的以 $f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)$ 为基的施图姆序列

$$\left\{f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right), f_2^*\left(y^2\right), \cdots, f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right\} \qquad (3)^{*a}$$

$(3)^{*a}$ 内均为实系数多项式，其中 $f_j^*\left(y^2\right) = q_j^*\left(y^2\right) f_{j+1}^*\left(y^2\right) - f_{j+2}^*\left(y^2\right)$，即

$$f_{j+2}^*\left(y^2\right) = -rem\left(f_j^*\left(y^2\right), f_{j+1}^*\left(y^2\right)\right), \quad j = 0,1,2,\cdots,\left(m^* - 1\right)$$

且 $f_{m^*+1}^*\left(y^2\right) \equiv 0$，最后多项式 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 是 $f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)$(关于 y^2)的最大公因式。

点 a 的 $f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)$ 是两个不全为零的多项式，它们的最大公因式是非零多项式，于是用 $\left(f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)\right)$ 来表示首项系数是1的那个最大公因式。

若 $\left(f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)\right) = 1$，则称点 a 的 $f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)$(关于 y^2)互素。

设 $a \in R$， $M(a) = 0$，由定理 2 推论，则 $(2)^{*a}$ 有解，根据预章定理 2 推论 2，则 $(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 关于 y^2 的次数 $K^* \geq 1$， $\left(f_0^*\left(y^2\right), f_1^*\left(y^2\right)\right) \neq 1$。可设

$$\begin{cases} f_0^*\left(y^2\right) = g_0^{**}\left(y^2\right) f_{m^*}^*\left(y^2\right) \\ f_1^*\left(y^2\right) = g_1^{**}\left(y^2\right) f_{m^*}^*\left(y^2\right) \end{cases} (即 \begin{cases} f_0^*\left(a, y^2\right) = g_0^{**}\left(a, y^2\right) f_{m^*}^*\left(a, y^2\right) \\ f_1^*\left(a, y^2\right) = g_1^{**}\left(a, y^2\right) f_{m^*}^*\left(a, y^2\right) \end{cases})$$

其中 $g_0^{**}(y^2), g_1^{**}(y^2)$ 是实系数多项式，$g_0^{**}(y^2)$ 是非零多项式，但 $g_1^{**}(y^2)$ 却有可能是零多项式，根据预章定理 5，则 $\begin{cases} g_0^{**}(y^2)=0 \\ g_1^{**}(y^2)=0 \end{cases}$ 无解，$(g_0^{**}(y^2), g_1^{**}(y^2))=1$。于是 $f(z)=$
$f(a+iy)=i^n f_0(a,y)+i^{n-1}f_1(a,y)=i^n f_0(y)+i^{n-1}f_1(y)$，其中

1. n 为偶数时，$\begin{cases} f_0(y)=f_0^*(y^2) \\ f_1(y)=yf_1^*(y^2) \end{cases}$，于是

$$f(a+iy)=i^n f_0^*(y^2)+i^{n-1}yf_1^*(y^2)=i^n\left[g_0^{**}(y^2)-iyg_1^{**}(y^2)\right]f_{m^*}^*(y^2)$$

令 $\begin{cases} g_0^*(y)=g_0^{**}(y^2) \\ g_1^*(y)=yg_1^{**}(y^2) \end{cases}$(即 $\begin{cases} g_0^*(a,y)=g_0^{**}(a,y^2) \\ g_1^*(a,y)=yg_1^{**}(a,y^2) \end{cases}$)

则 $f(a+iy)=i^n\left[g_0^{**}(y^2)-iyg_1^{**}(y^2)\right]f_{m^*}^*(y^2)=i^n\left[g_0^*(y)-ig_1^*(y)\right]f_{m^*}^*(y^2)$

其中 $g_0^*(y)$ 为偶函数，$g_1^*(y)$ 为奇函数，且对 $\forall\ y_0\in C$，$(y^2-y_0^2)$ 不能同时整除 $g_0^*(y)$, $g_1^*(y)$(否则，假如 $\exists\ y_0\in C$，满足 $(y^2-y_0^2)\mid g_0^*(y)$ 且 $(y^2-y_0^2)\mid g_1^*(y)$，那么 1)当 $y_0\neq 0$ 时，$((y^2-y_0^2), y)=1$，于是 $(y^2-y_0^2)\mid g_0^{**}(y^2)$ 且 $(y^2-y_0^2)\mid g_1^{**}(y^2)$；2)当 $y_0=0$ 时，$y^2\mid g_0^*(y)$ 且 $y^2\mid g_1^*(y)$，则 $y^2\mid g_0^{**}(y^2)$ 且 $y\mid g_1^{**}(y^2)$，而由 $y\mid g_1^{**}(y^2)\Rightarrow y^2\mid g_1^{**}(y^2)$，于是 $y^2\mid g_0^{**}(y^2)$ 且 $y^2\mid g_1^{**}(y^2)$。故无论 $y_0\neq 0$ 还是 $y_0=0$ 都与 $g_0^{**}(y^2), g_1^{**}(y^2)$ 关于 y^2 互素矛盾)。

2. n 为奇数时，$\begin{cases} f_0(y)=yf_0^*(y^2) \\ f_1(y)=f_1^*(y^2) \end{cases}$，于是

$$f(a+iy)=i^n yf_0^*(y^2)+i^{n-1}f_1^*(y^2)=i^n\left[yg_0^{**}(y^2)-ig_1^{**}(y^2)\right]f_{m^*}^*(y^2)$$

令 $\begin{cases} g_0^*(y)=yg_0^{**}(y^2) \\ g_1^*(y)=g_1^{**}(y^2) \end{cases}$(即 $\begin{cases} g_0^*(a,y)=yg_0^{**}(a,y^2) \\ g_1^*(a,y)=g_1^{**}(a,y^2) \end{cases}$)

则 $f(a+iy)=i^n\left[yg_0^{**}(y^2)-ig_1^{**}(y^2)\right]f_{m^*}^*(y^2)=i^n\left[g_0^*(y)-ig_1^*(y)\right]f_{m^*}^*(y^2)$

其中 $g_0^*(y)$ 为奇函数，$g_1^*(y)$ 为偶函数，且对 $\forall\ y_0\in C$，$(y^2-y_0^2)$ 不能同时整除 $g_0^*(y), g_1^*(y)$ (否则，同样会与 $g_0^{**}(y^2), g_1^{**}(y^2)$ 关于 y^2 互素发生矛盾)。

因此，无论 n 为偶数或奇数，都有 $f(a+iy)=i^n\left[g_0^*(y)-ig_1^*(y)\right]f_{m^*}^*(y^2)$，令

$$g^*(z)=g^*(a+iy)=i^{n-2K^*}\left[g_0^*(y)-ig_1^*(y)\right]$$

实系数多项式 $g_0^*(y), g_1^*(y)$ 为奇偶函数，且对 $\forall\ y_0\in C$，$(y^2-y_0^2)$ 不能同时整除 $g_0^*(y)$, $g_1^*(y)$。于是 $f(z)=f(a+iy)=g^*(a+iy)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*(y^2)\right]$

令 $F_{m^*}\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，则 $f(z)=g^*(a+iy)F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$，于是有

$$f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$$

该式与 a 有关，它是 $f(z)$ 在 z 平面实轴上点 a 的分解式，其中 $g^*(z)$ 为点 a 的 $g^*(z)$，$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$。$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$，$F_{m^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$ 是关于 a，$(z-a)^2$ 的实系数二元多项式，且 $a\in R$，于是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 是 $(z-a)^2$ 的实系数 K^* 次多项式，它也是 z 的实系数 $2K^*$ 次多项式，故 $g^*(z)$ 是实系数 $n-2K^*$ 次多项式。

由于 $F_0(iy)=i^n f_0(y)$，$F_1(iy)=i^{n-1}f_1(y)$，那么

1. n 为偶数时，由于 $\begin{cases} f_0(y)=f_0^*\left(y^2\right) \\ f_1(y)=yf_1^*\left(y^2\right)\end{cases}$，令 $\begin{cases} F_0^*\left((iy)^2\right)=i^n f_0^*\left(y^2\right) \\ F_1^*\left((iy)^2\right)=i^{n-2}f_1^*\left(y^2\right)\end{cases}$，则

$$\begin{cases} F_0(iy)=F_0^*\left((iy)^2\right) \\ F_1(iy)=iyF_1^*\left((iy)^2\right)\end{cases} \text{即} \begin{cases} F_0(z-a)=F_0^*\left((z-a)^2\right) \\ F_1(z-a)=(z-a)F_1^*\left((z-a)^2\right)\end{cases}$$

2. n 为奇数时，由于 $\begin{cases} f_0(y)=yf_0^*\left(y^2\right) \\ f_1(y)=f_1^*\left(y^2\right)\end{cases}$，令 $\begin{cases} F_0^*\left((iy)^2\right)=i^{n-1}f_0^*\left(y^2\right) \\ F_1^*\left((iy)^2\right)=i^{n-1}f_1^*\left(y^2\right)\end{cases}$，则

$$\begin{cases} F_0(iy)=iyF_0^*\left((iy)^2\right) \\ F_1(iy)=F_1^*\left((iy)^2\right)\end{cases} \text{即} \begin{cases} F_0(z-a)=(z-a)F_0^*\left((z-a)^2\right) \\ F_1(z-a)=F_1^*\left((z-a)^2\right)\end{cases}$$

由 $\begin{cases} f_0^*\left(y^2\right)=g_0^{**}\left(y^2\right)f_{m^*}^*\left(y^2\right) \\ f_1^*\left(y^2\right)=g_1^{**}\left(y^2\right)f_{m^*}^*\left(y^2\right)\end{cases}$，于是

1. n 为偶数时，有 $\begin{cases} i^n f_0^*\left(y^2\right)=i^{n-2K^*}g_0^{**}\left(y^2\right)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right] \\ i^{n-2}f_1^*\left(y^2\right)=i^{n-2K^*-2}g_1^{**}\left(y^2\right)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right]\end{cases}$

令 $G_0^{**}\left((iy)^2\right)=i^{n-2K^*}g_0^{**}\left(y^2\right)$，$G_1^{**}\left((iy)^2\right)=i^{n-2K^*-2}g_1^{**}\left(y^2\right)$，则有

$$\begin{cases} F_0^*\left((iy)^2\right)=G_0^{**}\left((iy)^2\right)F_{m^*}^*\left((iy)^2\right) \\ F_1^*\left((iy)^2\right)=G_1^{**}\left((iy)^2\right)F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)\end{cases}$$

2. n 为奇数时，$\begin{cases} i^{n-1}f_0^*\left(y^2\right)=i^{n-2K^*-1}g_0^{**}\left(y^2\right)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right] \\ i^{n-1}f_1^*\left(y^2\right)=i^{n-2K^*-1}g_1^{**}\left(y^2\right)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right]\end{cases}$

令 $G_0^{**}\left((iy)^2\right)=i^{n-2K^*-1}g_0^{**}\left(y^2\right)$，$G_1^{**}\left((iy)^2\right)=i^{n-2K^*-1}g_1^{**}\left(y^2\right)$，则也有

$$\begin{cases} F_0^*\left((iy)^2\right) = G_0^{**}\left((iy)^2\right)F_{m^*}^*\left((iy)^2\right) \\ F_1^*\left((iy)^2\right) = G_1^{**}\left((iy)^2\right)F_{m^*}^*\left((iy)^2\right) \end{cases}$$

$z = a + iy$，于是无论 n 为偶数或奇数，都有

$$\begin{cases} F_0^*\left((z-a)^2\right) = G_0^{**}\left((z-a)^2\right)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right) \\ F_1^*\left((z-a)^2\right) = G_1^{**}\left((z-a)^2\right)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right) \end{cases}$$

其中 $F_0^*\left((z-a)^2\right)$ 是 $(z-a)^2$ 的次数为 $\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 的多项式，但 $F_1^*\left((z-a)^2\right)$ 却有可能是 $(z-a)^2$ 的零多项式，即当它关于 $(z-a)^2$ 的系数全为零时。由于 $(2)^{*a}$ 有解，又

1. n 为偶数时，$\begin{cases} F_0^*\left((z-a)^2\right) = F_0^*\left((iy)^2\right) = i^n f_0^*\left(y^2\right) \\ F_1^*\left((z-a)^2\right) = F_1^*\left((iy)^2\right) = i^{n-2} f_1^*\left(y^2\right) \end{cases}$

2. n 为奇数时，$\begin{cases} F_0^*\left((z-a)^2\right) = F_0^*\left((iy)^2\right) = i^{n-1} f_0^*\left(y^2\right) \\ F_1^*\left((z-a)^2\right) = F_1^*\left((iy)^2\right) = i^{n-1} f_1^*\left(y^2\right) \end{cases}$

于是无论 n 为偶数或奇数，$\begin{cases} F_0^*\left((z-a)^2\right) = 0 \\ F_1^*\left((z-a)^2\right) = 0 \end{cases}$ 都有解，从而 $F_0^*\left((z-a)^2\right)$，$F_1^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 $(z-a)^2$ 非互素，即 $\left(F_0^*\left((z-a)^2\right), F_1^*\left((z-a)^2\right)\right) \neq 1$。

$\begin{cases} G_0^{**}\left((z-a)^2\right) = 0 \\ G_1^{**}\left((z-a)^2\right) = 0 \end{cases}$ 无解。否则，假如 $\begin{cases} G_0^{**}\left((z-a)^2\right) = 0 \\ G_1^{**}\left((z-a)^2\right) = 0 \end{cases}$ 有解，则 $\exists\ y_0 \in C$，将 $z_0 = a + iy_0$ 代入 $\begin{cases} G_0^{**}\left((z-a)^2\right) = 0 \\ G_1^{**}\left((z-a)^2\right) = 0 \end{cases}$ 后，满足 $\begin{cases} G_0^{**}\left((z_0-a)^2\right) = 0 \\ G_1^{**}\left((z_0-a)^2\right) = 0 \end{cases}$。则

1. n 为偶数时，有 $\begin{cases} G_0^{**}\left((z_0-a)^2\right) = G_0^{**}\left((iy_0)^2\right) = i^{n-2K^*} g_0^{**}\left(y_0^2\right) = 0 \\ G_1^{**}\left((z_0-a)^2\right) = G_1^{**}\left((iy_0)^2\right) = i^{n-2K^*-2} g_1^{**}\left(y_0^2\right) = 0 \end{cases}$

2. n 为奇数时，有 $\begin{cases} G_0^{**}\left((z_0-a)^2\right) = G_0^{**}\left((iy_0)^2\right) = i^{n-2K^*-1} g_0^{**}\left(y_0^2\right) = 0 \\ G_1^{**}\left((z_0-a)^2\right) = G_1^{**}\left((iy_0)^2\right) = i^{n-2K^*-1} g_1^{**}\left(y_0^2\right) = 0 \end{cases}$

于是 y_0^2 是 $\begin{cases} g_0^{**}\left(y^2\right) = 0 \\ g_1^{**}\left(y^2\right) = 0 \end{cases}$ 的解，矛盾。因此，$\left(G_0^{**}\left((z-a)^2\right), G_1^{**}\left((z-a)^2\right)\right) = 1$，即 $G_0^{**}\left((z-a)^2\right)$，$G_1^{**}\left((z-a)^2\right)$ 关于 $(z-a)^2$ 互素，$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 是 $F_0^*\left((z-a)^2\right)$，$F_1^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 $(z-a)^2$ 的一个最大公因式。

综上所述，设 $a \in R$，若 $M(a) = 0$，则 $(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 关于 y^2 的次数 $K^* \geq 1$，$f(z)$ 就

能在 z 平面实轴上的点 a 分解成两个 z 的实系数多项式 $g^*(z)$ 与 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 的乘积，即

$$f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$$

其中 $g^*(z)$ 为点 a 的 $g^*(z)$。由 $z=a+iy$，该式又可写成 $f(a+iy)=g^*(a+iy)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right]$。于是说点 a 的 $g^*(z)$，就意味着 $f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 或 $f(a+iy)=g^*(a+iy)\left[i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right]$。反之亦然。

点 a 的 $g^*(z)$ **性质** 设 $a\in R$，l 为非负整数，$g^*(z)=g^*(a+iy)=i^{n-2K^*}\left[g_0^*(y)-ig_1^*(y)\right]$，其中实系数多项式 $g_0^*(y),\ g_1^*(y)$ 为奇偶函数，且对 $\forall\ y_0\in C$，$\left(y^2-y_0^2\right)$ 不能同时整除 $g_0^*(y),\ g_1^*(y)$，于是 1) $g^*(z)=0$ 没有以 a 为中点的成对根。2)若 $z_0=a$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=0$ 或 1，其中 $l=0$ 时，$(z-a)$ 不能整除 $g^*(z)$，即 y 不能整除 $g^*(a+iy)$；$l=1$ 时，$(z-a)\,|\,g^*(z)$，但 $(z-a)^2$ 不能整除 $g^*(z)$，即 $y\,|\,g^*(a+iy)$，但 y^2 不能整除 $g^*(a+iy)$。3)若 $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 不能同时整除 $g^*(z)$，即 $(y-y_0)$ 和 $(y+y_0)$ 不能同时整除 $g^*(a+iy)$。

证明 在第四章点 x_0 的 $g^*(z)$ 性质中令 $x_0=a\in R$，简记 $g_0^*(a,y)=g_0^*(y)$，$g_1^*(a,y)=g_1^*(y)$ 即得。】

§2 最大公因式方程(一)

设施图姆序列$(3)^{*a}$内$f_{m^*}^*(y^2)$关于y^2的次数为K^*，且记

$$f_{m^*}^*(y^2)=0 \tag{4^{*a}}$$

则称它为$(3)^{*a}$最后的K^*次方程$(4)^{*a}$。y_0^2是$(4)^{*a}$的根的充要条件是：$(y^2-y_0^2)\mid f_{m^*}^*(y^2)$。$y_0^2$是$(4)^{*a}$的$l$重根的充要条件是：$(y^2-y_0^2)^l \mid f_{m^*}^*(y^2)$，但$(y^2-y_0^2)^{l+1}$不能整除$f_{m^*}^*(y^2)$。

$(4)^{*a}$所有复根(含重根)组成的集合可写成$\left\{y^2 \mid f_{m^*}^*(y^2)=0\ (y^2\in C)\ (4)^{*a}\right\}$，或$\sqrt{f_{m^*}^*(\ )}$，于是$\left\{y^2 \mid f_{m^*}^*(y^2)=0\ (y^2\in C)\ (4)^{*a}\right\}=\sqrt{f_{m^*}^*(\ )}$。$y_0^2$是$(4)^{*a}$的$l$重根的充要条件是：$y_0^2(l)\in\sqrt{f_{m^*}^*(\ )}$。

$f_{m^*}^*(y^2)$是$f_0^*(y^2), f_1^*(y^2)$关于y^2的最大公因式，下面定理1及其推论根据预章定理2及其推论即得。

定理 1 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，l为非负整数，则

1) y_0^2是$(2)^{*a}$的解的充要条件是：y_0^2是$(4)^{*a}$的根。

2) y_0^2是$(2)^{*a}$的l重解的充要条件是：y_0^2是$(4)^{*a}$的l重根。

推论 1 设$a\in R$，则$(2)^{*a}$所有复数解(含重解)组成的集合与$(4)^{*a}$所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即$\sqrt{f_0^*(\ )}\cap\sqrt{f_1^*(\ )}=\sqrt{f_{m^*}^*(\ )}$，于是$(4)^{*a}$的所有复根就是$(2)^{*a}$的所有复数解。

推论 2 设$a\in R$，$(2)^{*a}$复数解(含重解)的个数为K_a^*，$(4)^{*a}$关于y^2的次数为K^*，则$K_a^*=K^*$，故$(2)^{*a}$有解的充要条件是：$K^*\ge 1$。

推论 3 设$a\in R$，则$(2)^{*a}$无解的充要条件是：$\left(f_0^*(y^2), f_1^*(y^2)\right)=1$。

推论 4 设$a\in R$，在$(3)^{*a}$内 1)当$f_1^*(y^2)\not\equiv 0$时，设$y_0^2\in C$，l, l_0, l_1均为非负整数，则

$$y_0^2(l)\in\sqrt{f_{m^*}^*(\ )} \Leftrightarrow y_0^2(l_0)\in\sqrt{f_0^*(\ )},\ y_0^2(l_1)\in\sqrt{f_1^*(\ )}，其中 l=\min(l_0,l_1)。$$

2)当$f_1^*(y^2)\equiv 0$时，则$f_{m^*}^*(y^2)=f_0^*(y^2)$，$m^*=0$。

定理 2 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，若y_0^2是$(4)^{*a}$的根，则a是$M(x)=0$的根；反过来，若a

是$M(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0^2，使y_0^2是$(4)^{*a}$的根。

证明 由定理 1 和§1 定理 2 即得。】

推论 设$a\in R$，则$(4)^{*a}$次数(即$(3)^{*a}$内$f_{m^*}^*(y^2)$关于y^2的次数)$K^*\geq 1$的充要条件是：$M(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

定理 3 设$a\in R$，L_*为正整数，若$x=a$是$M(x)=0$的L_*重根，$(4)^{*a}$关于y^2的次数为K^*，则$K^*\leq L_*$，其中$(f(z),f'(z))=1$时，$K^*=L_*$。

证明$(4)^{*a}$关于y^2的次数为K^*，由定理 1 推论 2，则$(2)^{*a}$复数解(含重解)的个数也为K^*，再由§1 定理 3 即得。

推论 设$a\in R$，L_*为正整数，$x=a$是$M(x)=0$的L_*重根，$(4)^{*a}$关于y^2的次数为K^*，若$K^*<L_*$，则$f(z)=0$有重根。

证明 用反证法。假设$f(z)=0$没有重根，则$(f(z),f'(z))=1$，由定理 3 则$K^*=L_*$，矛盾。所以$f(z)=0$有重根。】

$(4)^{*a}$根的**性质** $(4)^{*a}$是y^2的实系数代数方程，根据第二章§2 性质及推论，它的根具有性质 1 及其推论。

性质 1 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，若y_0^2是$(4)^{*a}$的根，则$\overline{y_0^2}$也是$(4)^{*a}$的根。

推论 1 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，则y_0^2是$(4)^{*a}$的根的充要条件是：$\overline{y_0^2}$是$(4)^{*a}$的根。

推论 2 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，则$(y^2-y_0^2)\mid f_{m^*}^*(y^2)$的充要条件是：$\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_{m^*}^*(y^2)$。

推论 3 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，l为非负整数，则

$$(y^2-y_0^2)^l\mid f_{m^*}^*(y^2)\text{的充要条件是：}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_{m^*}^*(y^2)。$$

推论 4 设$a\in R$，$y_0^2\in C$，l为非负整数，则y_0^2是$(4)^{*a}$的l重根的充要条件是：$\overline{y_0^2}$是$(4)^{*a}$的l重根。

推论 5 设$a\in R$，$y_0^2\notin R$，l为非负整数，则y_0^2，$\overline{y_0^2}$是$(4)^{*a}$的一对l重共轭复根的充要条件是：$(y^2-y_0^2)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l\mid f_{m^*}^*(y^2)$，但$(y^2-y_0^2)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$不能整除$f_{m^*}^*(y^2)$。

点 a 的 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 为 y 的偶函数，若把 $(4)^{*a}$ 看作 y 的方程，则第三章 $(4)^a$ 根的性质 1，性质 2 及其推论对它也是适用的，只要将 $(4)^a$ 改为 $(4)^{*a}$，将 $f_m(y)$ 改为 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 即可。下面性质 2，性质 3 及其推论就是如此，证明予以省略。

性质 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 的充要条件是：$(y+y_0)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$。

推论 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则

$$(y-y_0)^l \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right) \text{的充要条件是：} (y+y_0)^l \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)。$$

性质 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$。

推论 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则

$$(y-y_0)^l \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right) \text{的充要条件是：} \left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)。$$

例 1 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，l 为非负整数，由定理 1 则 1) y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对共轭复数解的充要条件是：y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(4)^{*a}$ 的一对共轭复根；2) y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(2)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是：y_0^2，$\overline{y_0^2}$ 是 $(4)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复根。

定理 4 设 $a\in R$，则 0 是 $(4)^{*a}$ 的根的充要条件是：$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。

证明 由定理 1 和§1 定理 5 即得。】

定理 5 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是方程组(2)的一对复数解的充要条件是：y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的一个根。

证明 由定理 1 和§1 定理 6 即得。】

定理 6 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的一个根。

证明 1 由定理 1 和§1 定理 7 即得。】

证明 2 由定理 5 和第二章定理 7 推论 2 即得。】

定理 6 表明 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)\mid f(a+iy)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$。

设 $a\in R$，$y_0\in C$，由定理 6 和第三章§2 定理 6，则 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对复根的充要条件是：y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的一个根。即

$$\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_m(y) \Leftrightarrow \left(y^2-y_0^2\right)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)。$$

推论 1 设$a \in R$，则$z_1 = a$，$z_2 = a$是$f(z)=0$的一对实根的充要条件是：0 是$(4)^{*a}$的一个实根。

证明 在定理 6 中令$y_0 = 0$即得。】

推论 2 设$a \in R$，$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x = a$上的一对共轭根的充要条件是：y_0^2是$(4)^{*a}$的一个正实根。

证明 在定理 6 中令$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$即得。】

推论 3 设$a \in R$，y_0为纯虚数，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$f(z)=0$在z平面实轴上的一对非a实根的充要条件是：y_0^2是$(4)^{*a}$的一个负实根。

证明 在定理 6 中令y_0为纯虚数即得。】

推论 4 设$a \in R$，$y_0^2 \notin R$，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$；$\overline{z_1} = a - i\overline{y_0}$，$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$是$f(z)=0$两对不相同的复根的充要条件是：$y_0^2$，$\overline{y_0^2}$是$(4)^{*a}$的一对共轭复根。

证明 由题意根据定理 6 即得。】

推论 4 表明 设$a \in R$，$y_0^2 \notin R$，则

$$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y - \overline{y_0^2}\right) \mid f(a+iy) \text{的充要条件是：} \left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)\text{。}$$

例 2 设$a \in R$，$y_0^2 \notin R$，由推论 4 和第三章§2 定理 6 推论 5，则y_0，$-y_0$；$-\overline{y_0}$，$\overline{y_0}$是$(4)^{a}$的两对不相同的复根的充要条件是：y_0^2和$\overline{y_0^2}$是$(4)^{*a}$的一对共轭复根。即

$$\left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_m(y) \Leftrightarrow \left(y^2 - y_0^2\right)\left(y^2 - \overline{y_0^2}\right) \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)\text{。}$$

定理 7 设$a \in R$，K^*为正整数，$f(a+iy) = g^*(a+iy)\left[i^{2K^*} f_{m^*}^*\left(y^2\right)\right]$，$y_0 \in C$且$y_0 \neq 0$，$l_1, l_2$为非负整数，若$z_1 = a + iy_0$和$z_2 = a - iy_0$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根，则 1) $l_1 > l_2$时，$(y - y_0) \mid g^*(a+iy)$，但$(y + y_0)$不能整除$g^*(a+iy)$；2) $l_1 < l_2$时，$(y + y_0) \mid g^*(a+iy)$，但$(y - y_0)$不能整除$g^*(a+iy)$；3) $l_1 = l_2$时，$(y - y_0)$和$(y + y_0)$都不能整除$g^*(a+iy)$。

证明 在第四章定理 13 推论中令$x_0 = a \in R$，并把$d^*\left(a, y^2\right)$记为$f_{m^*}^*\left(y^2\right)$即得。】

下面定理 8 及其推论 1 和 2，由$a \in R$，$M(a) = 0$，根据§1 定理 2 推论，则$(2)^{*a}$有解，于是分别在第四章定理 14 推论 3 和 4 中令$x_0 = a \in R$，然后包括推论 5 在内将$d^*\left(a, y^2\right) = 0$改为$(4)^{*a}$即得。

定理 8 设 $a\in R$， $M(a)=0$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时， y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的 l_2 重根， $z_1=a+iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$ 时， y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的 l_1 重根， $z_2=a-iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的 l 重根， $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 都不是 $g^*(z)=0$ 的根。

推论 1 设 $a\in R$， $M(a)=0$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l_1,l_2,l 为非负整数， $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的 l 重根的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。

推论 2 设 $a\in R$， $M(a)=0$， $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$， l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是： y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的 l 重的正实根。

下面定理 9 及其推论 1，由 $a\in R$， $M(a)=0$，则 $(2)^{*a}$ 有解，于是分别在第四章定理 15 推论 3 和 4 中令 $x_0=a\in R$，将 $d^*(a,y^2)=0$ 改为 $(4)^{*a}$ 即得。

定理 9 设 $a\in R$， $M(a)=0$，l 为非负整数，若 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则

1) l 为 ≥ 0 的偶数时， $z_0=a$ 不是 $g^*(z)=0$ 的根， 0 是 $(4)^{*a}$ 的 $\frac{l}{2}$ 重根；

2) l 为奇数时， $z_0=a$ 是 $g^*(z)=0$ 的单根， 0 是 $(4)^{*a}$ 的 $\frac{l-1}{2}$ 重根。

推论 1 设 $a\in R$， $M(a)=0$， l^* 为 ≥ 0 的偶数，若 0 是 $(4)^{*a}$ 的 $\frac{l^*}{2}$ 重根，则 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重或者 l^*+1 重根，其中 $g^*(a)\neq 0$ 时， $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重根； $g^*(a)=0$ 时， $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l^*+1 重根。

推论 2 设 $a\in R$，$M(a)=0$，$z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=0$ 或 1 的充要条件是：0 不是 $(4)^{*a}$ 的根。

证明 由定理 9 即得。】

§3 最大公因式方程(二)

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 是 $F_0^*\left((z-a)^2\right)$, $F_1^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 $(z-a)^2$ 的最大公因式。$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$，$F_{m^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$ 是关于 a，$(z-a)^2$ 的实系数二元多项式，且 $a\in R$，于是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 是 $(z-a)^2$ 的实系数多项式，它也是 z 的实系数多项式。

设 $a\in R$，$y_0\in C$，$z_0=a+iy_0$，若 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 在 $z=z_0$ 的函数值 $F_{m^*}^*\left((z_0-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy_0)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y_0^2\right)=0$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ (在 z 平面上)的一个(复)根。

显然，$z_0=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$(z-z_0)\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$。

再设 l 为非负整数，若 $(z-z_0)^l\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ (在 z 平面上)的 l 重(复)根。

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$ 的**整除性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z=a+iy$，$z_0=a+iy_0$，则 $(z-z_0)^l\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

显然，$z_0=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$(y-y_0)\mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$；$z_0=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 根的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根，则 $z_2=a-iy_0$ 也是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根。

证明 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 为 $(z-a)$ 的偶函数，命题成立。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根。

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right) \text{的充要条件是：} (z-z_2)\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)\text{。}$$

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)^l \mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$$的充要条件是：$(z-z_2)^l \mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$。

证明 在第四章$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$根的性质 1 推论 3 中令$x_0=a\in R$，简记$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$ $=F_{m^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$即得。】

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根的充要条件是：$z_2=a-iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根。

推论 5 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，l为非负整数，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的一对$l$重根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l \mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$，但$\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$不能整除$F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

证明 在第四章$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$根的性质 1 推论 5 中令$x_0=a\in R$，简记$F_{d^*}^*\left(a,(iy)^2\right)$ $=F_{m^*}^*\left(a,(iy)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$，并将$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$改为$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$即得。】

性质 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_2=a-iy_0$，若$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根，则$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$也是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根。

证明 若$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根，则$F_{m^*}^*\left((z_1-a)\right)=0$。于是

$$i^{2K^*} f_{m^*}^*\left(y_0^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy_0)^2\right)=F_{m^*}^*\left((z_1-a)\right)=0$$

y_0^2是$(4)^{*a}$的根，由$(4)^{*a}$根的性质 1 则$\overline{y_0^2}$是$(4)^{*a}$的根，即$f_{m^*}^*\left(\overline{y_0^2}\right)=0$。$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，于是$F_{m^*}^*\left((\overline{z_2}-a)\right)=F_{m^*}^*\left(\left(i\overline{y_0}\right)^2\right)=i^{2K^*} f_{m^*}^*\left(\overline{y_0^2}\right)=0$。故$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$也是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根。】

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_2=a-iy_0$，则$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根的充要条件是：$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根。

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1) \mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$$的充要条件是：$\left(z-\overline{z_2}\right) \mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$。

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)^l \mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$$的充要条件是：$\left(z-\overline{z_2}\right)^l \mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$

证明 在第四章$F_{d^*}^*\left(x_0,(z-x_0)^2\right)=0$根的性质 2 推论 3 中简记$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$

$=F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$即得。】

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z_2=a-iy_0$，则$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根的充要条件是：$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根。

例 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则 1)若$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根，则$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$都是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根；2)若$z_1=a+iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根，则$z_2=a-iy_0$，$\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$都是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根。

定义 设$a\in R$，$y_0\in C$，若$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$都是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的根，特别当$y_0=0$时，$(z-a)^2\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，则称$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$(在$z$平面上)的一对(复)根。

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$为$(z-a)$的偶函数，定义当$y_0=0$时的条件可弱化为$(z-a)\mid F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$。

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$一对复根的**性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的一对复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

定理 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则 1) y_0^2是$(4)^{*a}$的一个根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的一对根。2)当$y_0\neq0$时，$y_0^2$是$(4)^{*a}$的一个$l$重非0复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的一对$l$重根；当$y_0=0$时，0是$(4)^{*a}$的$l$重根的充要条件是：$z_0=a$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$2l$重根。

证明 1)在第四章定理 10 中，2)在第四章定理 12 中，令$x_0=a\in R$，并将$d^*\left(a,y^2\right)=0$改为$(4)^{*a}$，将$F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$改为$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$即得。】

推论 1 设$a\in R$，$y_j\in C$，$1\le K^*\le\left[\dfrac{n}{2}\right]$，则$y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$是$(4)^{*a}$的所有复根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)。

证明 若y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$是$(4)^{*a}$的所有复根，则$f_{m^*}^*\left(y^2\right)$关于$y^2$的次数为$K^*$，

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，于是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 z 的次数为 $2K^*$。由定理 1，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的 K^* 对根，这些根的个数 $2K^*$ 恰好等于 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 z 的次数，所以 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根。

反过来，若 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根，则 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 z 的次数为 $2K^*$，$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，于是 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 关于 y^2 的次数为 K^*。由定理 1 则 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $(4)^{*a}$ 的 K^* 个根，恰好等于 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 关于 y^2 的次数，因此 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有复根。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_j\in C$，则 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有各不相同的复根的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根。

证明 若 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有各不相同的复根，由定理 1，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的 $\underline{K^*}$ 对各不相同的成对根。用反证法：假如 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的各不相同的成对根除了这 $\underline{K^*}$ 对根外还有一对根 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，其中 $y_0\in C$，且满足 $z_1\neq z_{j1}$，$z_1\neq z_{j2}$，$z_2\neq z_{j1}$，$z_2\neq z_{j2}$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$，于是 $y_0\neq y_j$，$y_0\neq -y_j$ ($j=1,2,\cdots,\underline{K^*}$)。由定理 1，则 y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的一个根，且 $y_0^2\neq y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$，矛盾。因此，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根。

反过来，若 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根，由定理 1 则 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $(4)^{*a}$ 的 $\underline{K^*}$ 个各不相同的复根。用反证法：假如 $(4)^{*a}$ 的各不相同的复根除了这 $\underline{K^*}$ 个根外还有一个根 y_0^2，其中 $y_0\in C$，$y_0^2\neq y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$，于是 $y_0\neq y_j$，$y_0\neq -y_j$ ($j=1,2,\cdots,\underline{K^*}$)。由定理 1，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的成对根，而且 $z_1\neq z_{j1}$，$z_1\neq z_{j2}$；$z_2\neq z_{j1}$，$z_2\neq z_{j2}$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$，矛盾。因此，$y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所

有各不相同的复根。】

推论 3 设$a \in R$，$y_0 \in R$，l为非负整数，则 1) y_0^2是$(4)^{*a}$的一个非负实根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上的一对根。2)当$y_0 \neq 0$时，$y_0^2$是$(4)^{*a}$的一个$l$重的正实根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上的一对$l$重共轭根；当$y_0 = 0$时，0是$(4)^{*a}$的$l$重实根的充要条件是：$z_0 = a$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$2l$重实根。

证明 在定理 1 中令$y_0 \in R$即得。】

推论 4 设$a \in R$，$y_j \in R$，则y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$(4)^{*a}$的所有非负实根(含重根)的充要条件是：$z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上的所有根(含重根)。

证明 若y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$(4)^{*a}$的所有非负实根，由推论 3 则$z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在直线$x=a$上的$K'^*$对根。用反证法：假如$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在直线$x=a$上的根除了这$K'^*$对根外还有一个根$z_1 = a + iy_0$，其中$y_0 \in R$，且$z_1 \neq z_{j1}$，$z_1 \neq z_{j2}$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$(否则会与推论 3 的 2)发生矛盾)，于是$y_0 \neq y_j$，$y_0 \neq -y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$，由$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$根的性质 1 则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在直线$x=a$上的一对根。由推论 3 则$y_0^2$是$(4)^{*a}$的一个非负实根，且$y_0^2 \neq y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$，矛盾。因此$z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在直线$x=a$上的所有根。

反过来，若$z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在直线$x=a$上的所有根，由推论 3 则$y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$(4)^{*a}$的$K'^*$个非负实根。用反证法：假如$(4)^{*a}$的非负实根除了这$K'^*$个根外还有一个根$y_0^2$，其中$y_0^2 \geq 0$且$y_0^2 \neq y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$(否则会与推论 3 的 2)发生矛盾)，于是$y_0 \in R$，$y_0 \neq y_j$，$y_0 \neq -y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$。由推论 3 则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在直线$x=a$上的一对根，且$z_1 \neq z_{j1}$，$z_1 \neq z_{j2}$；$z_2 \neq z_{j1}$，$z_2 \neq z_{j2}$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$，矛盾。所以$y_j^2$ $\left(j=1,2,\cdots,K'^*\right)$是$(4)^{*a}$的所有非负实根。】

推论 5 设 $a\in R$， $y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$， $k^{(1)}$ 为正整数，则 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)的充要条件是：y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^{*a}$ 的所有正实根(含重根)。

证明 若 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有共轭根，不妨设 $z=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 $2l$ 重实根，于是 $\overbrace{z=a,z=a,\cdots,z=a}^{2l}$， $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，由推论 4 则 $\overbrace{0,0,\cdots,0}^{l}$， y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^{*a}$ 的所有非负实根，其中 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^{*a}$ 的所有正实根。

反过来，若 y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^{*a}$ 的所有正实根，不妨设 0 是 $(4)^{*a}$ 的 l 重实根，于是 $\overbrace{0,0,\cdots,0}^{l}$， y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $(4)^{*a}$ 的所有非负实根，由推论 4 则 $\overbrace{z=a,z=a,\cdots,z=a}^{2l}$， $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有共轭根。】

推论 6 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，k 为正整数，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有非 a 根(含重根)的充要条件是: y_j^2 $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有非 0 复根(含重根)。

证明 必要性不妨设 $z=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 $2l$ 重实根，充分性不妨设 0 是 $(4)^{*a}$ 的 l 重实根，根据推论 1 即得。】

例 2 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$， l 为非负整数，则 1) y_0^2， $\overline{y_0^2}$ 是 $(4)^{*a}$ 的一对共轭复根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$； $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$， $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 两对不相同的复根；2) y_0^2， $\overline{y_0^2}$ 是 $(4)^{*a}$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$； $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$， $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 两对不相同的 l 重复根。

证明 根据定理 1 即得。】

例 2 表明 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$， l 为非负整数，则

1) $\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 的充要条件是： $\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$；

2) $\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l \mid f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^l \mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)^{l+1}$ 不能整除 $F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

定理 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对复根，则 a 是 $M(x)=0$ 的根；反过来，若 a 是 $M(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对复根。

证明 由定理 1 和§2 定理 2 即得。】

推论 设 $a\in R$，则 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 关于 z 的次数 $2K^*\geq 2$ 的充要条件是：$M(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

定理 3 设 $f(z)$ 的次数 $n\geq 2$，$a\in R$，若 $M(a)=0$，则 $(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 关于 y^2 的次数 K^* 满足 $1\leq K^*\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，$f(z)$ 就能在 z 平面实轴上的点 a 分解成两个 z 的实系数多项式 $g^*(z)$ 与 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 的乘积，即 $f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，其中 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 z 的次数为 $2K^*$，$g^*(z)$ 的次数为 $n-2K^*$。

证明 由§2 定理 2 推论 2 和§1 相关论述即知命题成立。】

定理 4 设 $a\in R$，则 $z_1=a$，$z_2=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对实根的充要条件是：$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根。

证明 由定理 1，则 0 是 $(4)^{*a}$ 的实根的充要条件是：$z_1=a$，$z_2=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对实根。再由§2 定理 4 即得。】

定理 5 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 (a,y_0)，$(a,-y_0)$ 是方程组(2)的一对复数解的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对复根。

证明 由定理 1 和§2 定理 5 即得。】

定理 6 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对复根。

证明 1 由定理 1 和§2 定理 6 即得。】

证明 2 由定理 5 和第二章定理 7 推论 2 即得。】

定理 6 表明 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)|\,f(a+iy)$ 的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\,F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

设 $a\in R$， $y_0\in C$， 由定理 6 和第三章§3 定理 8 则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对复根。即

$$\left(y^2-y_0^2\right)|\,F_m(iy)\Leftrightarrow\left(y^2-y_0^2\right)|\,F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$$

推论 1 设 $a\in R$，则 $z_1=a$， $z_2=a$ 是 $f(z)=0$ 的一对 a 实根的充要条件是： $z_1=a$，$z_2=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对 a 实根。

证明 在定理 6 中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $a\in R$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对非 a 复根的充分必要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对非 a 复根。

证明 在定理 6 中令 $y_0\neq 0$ 即得。】

例 3 由推论 2 可知：1)设 $a\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭根；2)设 $a\in R$，y_0 为纯虚数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上的一对非 a 实根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面实轴上的一对非 a 实根。

推论 3 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$； $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$； $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 两对不相同的复根。

证明 根据推论 2 即得。】

推论 3 表明 设 $a\in R$， $y_0^2\notin R$，则

$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y-\overline{y_0^2}\right)|\,f(a+iy)$ 的充要条件是： $\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)|\,F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)$。

例 4 设 $a\in R$，$y_0^2\notin R$，由推论 3 和第三章§3 定理 8 推论 3，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$； $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 两对不相同的复根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$； $\overline{z_1}=a-i\overline{y_0}$， $\overline{z_2}=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 两对不相同的复根。即

$$\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid F_m(iy)\Leftrightarrow\left(y^2-y_0^2\right)\left(y^2-\overline{y_0^2}\right)\mid F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)。$$

定理 7 设 $a\in R$， $f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时， $(z-z_1)\mid g^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g^*(z)$；2) $l_1<l_2$ 时，$(z-z_2)\mid g^*(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g^*(z)$；3) $l_1=l_2$ 时， $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g^*(z)$。

证明 在第四章定理 13 中令 $x_0=a\in R$，将 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)$ 记为 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 即得。】

下面定理 8 及其推论 1 和 2，由 $a\in R$， $M(a)=0$，根据§1 定理 2 推论，则 $(2)^{*a}$ 有解，于是分别在第四章定理 14 及推论 1 中令 $x_0=a\in R$，然后包括推论 2 在内将 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 改为 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 即得。

定理 8 设 $a\in R$， $M(a)=0$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l_1,l_2 为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时， $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对 l_2 重根，$z_1=a+iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$ 时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对 l_1 重根， $z_2=a-iy_0$ 是 $g^*(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对 l 重根， $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 都不是 $g^*(z)=0$ 的根。

推论 1 设 $a\in R$， $M(a)=0$， $y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$， l_1,l_2,l 为非负整数， $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a-iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对 l 重根的充要条件是： $l=\min(l_1,l_2)$。

推论 2 设 $a\in R$， $M(a)=0$， $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$， l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根的充要条件是： $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l 重共轭根。

下面定理 9 及其推论 1，由 $a\in R$， $M(a)=0$，则 $(2)^{*a}$ 有解，于是分别在第四章定理 15 及推论 1 中令 $x_0=a\in R$，将 $F_{d^*}^*\left(a,(z-a)^2\right)=0$ 改为 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 即得。

定理 9 设 $a\in R$， $M(a)=0$， l 为非负整数，若 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则

1) l 为 ≥ 0 的偶数时， $z_0=a$ 不是 $g^*(z)=0$ 的根， $z_0=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l 重根；

2) l 为奇数时， $z_0=a$ 是 $g^*(z)=0$ 的单根， $z_0=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 $l-1$ 重根。

推论 1 设 $a\in R$ ， $M(a)=0$ ， l^* 为 ≥ 0 的偶数，若 $z_0=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l^* 重根，则 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重或者 l^*+1 重根，其中 $g^*(a)\neq 0$ 时，$z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l^* 重根；$g^*(a)=0$ 时， $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l^*+1 重根。

推论 2 设 $a\in R$ ，$M(a)=0$ ，$z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=0$ 或 1 的充要条件是：$z_0=a$ 不是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的根。

证明　由定理 9 即得。】

推论 3 设 $a\in R$ ， $M(a)=0$ ，若 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，且 $l\geq 2$ ， l 为偶数时，记 $l^*=l$ ；l 为奇数时，记 $l^*=l-1$ ，则 $z_0=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l^* 重根，l^* 为 ≥ 2 的偶数。

证明　由定理 9 即得。】

§4 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集

定义 1 设整数 $n \geq 2$， $a \in R$， $M(a)=0$， $y_j \in C$， $1 \leq K^* \leq \left[\frac{n}{2}\right]$； $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,K^*$)是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 K^* 对根，记

$$B_a^*=\left\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,K^*\right\}$$

假设 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0} \in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0} \in B_a^*$，即 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 B_a^* 的任意一对元素，其中 1)当 $y_{j_0} \neq 0$ 时，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，那么就称 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 B_a^* 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对严格对称要求的一对 l 重元素；2)当 $y_{j_0}=0$ 时，由于 $z_{j_0 1}=a \in B_a^*$， $z_{j_0 2}=a \in B_a^*$，若 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l \geq 2$，于是 l 为偶数时，记 $l^*=l$；l 为奇数时，记 $l^*=l-1$，则 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 B_a^* 的 l^* 重元素，其中 l^* 为 ≥ 2 的偶数， $z_{j_0 1}=a$ 和 $z_{j_0 2}=a$ 是 B_a^* 的一对元素，那么就称 $z_{j_0 1}=a$， $z_{j_0 2}=a$ 是 B_a^* 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对严格对称要求的一对元素。

满足上述条件就称 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的一个根集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的 K^* 对根。

该定义当 $y_{j_0}=0$ 时，由于 $z_{j_0 1}=a \in B_a^*$， $z_{j_0 2}=a \in B_a^*$，则 $z_{j_0 1}=a$ 和 $z_{j_0 2}=a$ 是 B_a^* 的两个相同的元素。如果 $z_{j_0 1}=a$ 是 B_a^* 的 l^* 重元素，那么 $z_{j_0 2}=a$ 也是 B_a^* 的 l^* 重元素，为便于统一叙述还可以说 $z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$ 都是 B_a^* 的 l^* 重元素，并理解为 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 B_a^* 的 l^* 重元素，记作 $a=z_{j_0 1}\left(l^*\right) \in B_a^*$ ($a=z_{j_0 2}\left(l^*\right) \in B_a^*$)。

例 设 $a \in R$， $y_{j_0} \in C$， B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，假如 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 B_a^* 的任意一对元素，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，就能推导出 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重

元素，即由 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^{*\#}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^{*\#}$，则 B_a^* 是 $B_a^{*\#}$ 的子集，即 $B_a^*\subset B_a^{*\#}$。当且仅当 $B_a^*\subset B_a^{*\#}$ 且 $B_a^{*\#}\subset B_a^*$ 时，$B_a^*=B_a^{*\#}$。当且仅当 $B_a^*\subset B_a^{*\#}$ 且 $B_a^*\neq B_a^{*\#}$ 时，B_a^* 是 $B_a^{*\#}$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质** 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l 为非负整数，B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，1)若 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*$，且 $l=0$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_a^*$。2)若 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*$，且 $y_{j_0}\neq 0$ 时，$l\geq 1$；$y_{j_0}=0$ 时，l 为 ≥ 2 的偶数，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$。3)若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*$，则 $y_{j_0}\neq 0$ 时，$l\geq 1$；$y_{j_0}=0$ 时，l 为 ≥ 2 的偶数。4)若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，$B_a^*\subset B_a^{*\#}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$。

在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集合 B_a^* 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 的充要条件是：$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l 为非负整数，B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 是 B_a^* 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 B_a^* 的 l 重元素。

证明 $l\geq 1$ 时，由定义 1，命题成立；$l=0$ 时，由性质 1，命题也成立。】

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素。

证明 证必要性。若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，则 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，

不妨设 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由定义 1 则 $l=\min(l_1,l_2)$，再由定义 1 则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素，命题成立。

2) $y_j=0$ 时，$z_{j_0 1}=a\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 1}=a\in B_a^{*\#}$，$z_{j_0 2}=a\in B_a^{*\#}$。不妨设 $z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 $f(z)=0$ 的 l_0 重根，则 $l_0\ge 2$。由于 $z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，即 $z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 B_a^* 的 l 重元素，由定义 1 则 l_0 为偶数时，$l=l_0$；l_0 为奇数时，$l=l_0-1$，其中 l 为 ≥ 2 的偶数。再由定义 1 则 $z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素，即 $z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$ 都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素，命题也成立。充分性同理可证。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，且 $B_a^*\subset B_a^{*\#}$。若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 也都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素，即由

$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^{*\#}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^{*\#}$。

证明 由 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，且 $B_a^*\subset B_a^{*\#}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，若 $B_a^{*\#}$ 的任何一对元素都属于 B_a^*，即由 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}\Rightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，则 $B_a^{*\#}\subset B_a^*$。

证明 由 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}\Rightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，根据性质 3，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，即由 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^{*\#}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^{*\#}\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*$，故 $B_a^{*\#}\subset B_a^*$。】

推论 3 设 $a\in R$，B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，$B_a^*\subset B_a^{*\#}$ 且 $B_a^*\ne B_a^{*\#}$，则 $B_a^{*\#}$ 至少有一对元素不属于 B_a^*。

证明 由题设则 $B_a^{*\#} \not\subset B_a^*$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a \in R$，$y_{j_0} \in C$，B_a^* 和 $B_a^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个根集，若 $B_a^{*\#}$ 至少有一对元素不属于 B_a^*，设为 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$，则显然有 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in B_a^{*\#}$，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in B_a^{*\#}$ 且 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \notin B_a^*$，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \notin B_a^*$，$f\left(z_{j_0 1}\right) = f\left(a + iy_{j_0}\right) = 0$，$f\left(z_{j_0 2}\right) = f\left(a - iy_{j_0}\right) = 0$。

定义 2 设整数 $n \geq 2$，$a \in R$，$1 \leq K^* \leq \left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$B_a^* = \left\{z_{j1} = a + iy_j, z_{j2} = a - iy_j \mid y_j \in C, j = 1,2,\cdots,K^*\right\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，并且不存在 $B_a^{*\#}$，使 $B_a^* \subset B_a^{*\#}$ 且 $B_a^* \neq B_a^{*\#}$，$B_a^{*\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，则称 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集，且称其所有元素 $z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $\left(j = 1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根。

性质 5 设 $a \in R$，则 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集的充要条件是：B_a^* 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a \in R$，$y_{j_0} \in C$，B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集，若 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则

$$z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in B_a^* \text{ 且 } z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in B_a^*。$$

证明 用反证法。假设 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in B_a^*$ 不成立，那么 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \notin B_a^*$ 或 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \notin B_a^*$，由性质 1 则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \notin B_a^*$ 且 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \notin B_a^*$。由于 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，于是

1) $y_{j_0} \neq 0$ 时，不妨设 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \geq 1$，$l_2 \geq 1$，记 $l = \min\left(l_1, l_2\right)$，则 $l \geq 1$。令 $B_a^{*\#}$ 包含 B_a^* 的一切元素，$z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 都是 $B_a^{*\#}$ 的 l 重元素，于是找到根集合 $B_a^{*\#}$，使 $B_a^* \subset B_a^{*\#}$ 且 $B_a^* \neq B_a^{*\#}$，$B_a^{*\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集合。但这与 B_a^* 是根全集矛盾。

2) $y_{j_0}=0$时，$z_{j_01}=a$，$z_{j_02}=a$是$f(z)=0$的一对实根，$z_{j_01}=a\notin B_a^*$且$z_{j_02}=a\notin B_a^*$。不妨设$z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是$f(z)=0$的l重根，则$l\geq 2$，于是l为偶数时，记$l^*=l$；l为奇数时，记$l^*=l-1$。令$B_a^{*\#}$包含B_a^*的一切元素，$z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是$B_a^{*\#}$的l^*重元素，其中l^*为≥ 2的偶数，$z_{j_01}=a$和$z_{j_02}=a$是$B_a^{*\#}$的一对元素，于是找到根集合$B_a^{*\#}$，使$B_a^*\subset B_a^{*\#}$且$B_a^*\neq B_a^{*\#}$，$B_a^{*\#}$也是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根集合。但这与B_a^*是根全集矛盾。

因此，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$。】

推论 1 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^*是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin B_a^*$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin B_a^*$，则$B_a^*$还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^*是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin B_a^*$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin B_a^*$，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$不是$f(z)=0$的一对复根。

证明 由性质 6 即得。】

性质 7 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，B_a^*和$B_a^{*\#}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的二个根集，其中B_a^*为根全集，则$B_a^{*\#}\subset B_a^*$。

证明 用反证法：假如$B_a^{*\#}\not\subset B_a^*$，由性质 3 推论 2，则$B_a^{*\#}$至少有一对元素不属于$B_a^*$，设为$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$，其中$y_{j_0}\in C$，由性质 4，则有$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$且$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin B_a^*$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin B_a^*$，$f(z_{j_01})=f(a+iy_{j_0})=0$，$f(z_{j_02})=f(a-iy_{j_0})=0$。特别当$y_{j_0}=0$时，由于$z_{j_01}=a\in B_a^{*\#}$，$z_{j_02}=a\in B_a^{*\#}$，故$a$是$f(z)=0$的 2 重以上根，于是$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，由性质 6 推论 1，则$B_a^*$还不是根全集，矛盾。所以$B_a^{*\#}\subset B_a^*$。】

推论 设$a\in R$，若B_a^*和$B_a^{*\#}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的二个根全集，则$B_a^*=B_a^{*\#}$。

证明 由性质 7 即得。】

定理 1 设整数$n\ge 2$，$a\in R$，$1\le K^*\le\left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$B_a^*=\left\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K^*\right\}$$

是由$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)组成的集合，则$B_a^*$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对严格对称的根全集。

证明 由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则$M(a)=0$，$f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，故$B_a^*$的所有元素$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$是$f(z)=0$在$z$平面上的$K^*$对根。

假设$\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$且$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，其中

1) $y_{j_0}\ne 0$时，不妨设$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则$l_1\ge 1$，$l_2\ge 1$。记$l=\min(l_1,l_2)$，则$l\ge 1$，由§3 定理 8 推论 1，则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的一对$l$重根，于是$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$都是$B_a^*$的$l$重元素，因而$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$B_a^*$的符合$f(z)=0$的根在$z$平面上关于点$a$成对严格对称要求的一对$l$重元素。

2) $y_{j_0}=0$时，$z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$是$f(z)=0$的一对实根，$z_{j_0 1}=a\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a\in B_a^*$。不妨设$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是$f(z)=0$的l重根，则$l\ge 2$，于是l为偶数时，记$l^*=l$；l为奇数时，记$l^*=l-1$，由§3 定理 9 推论 3，则$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l^*$重根，于是$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是B_a^*的l^*重元素，其中l^*为≥ 2的偶数，$z_{j_0 1}=a$和$z_{j_0 2}=a$是B_a^*的一对元素，因而$z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$是B_a^*的符合$f(z)=0$的根在z平面上关于点a成对严格对称要求的一对元素。

因此，B_a^*是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根集合。再证B_a^*是根全集，用反证法：假设B_a^*还不是根全集，那么一定存在$B_a^{*\#}$，使$B_a^*\subset B_a^{*\#}$且$B_a^*\ne B_a^{*\#}$，$B_a^{*\#}$也是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根集，由性质 3 推论 3，则$B_a^{*\#}$至少有一对元素不属于B_a^*，设为$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$，其中$y_{j_0}\in C$，由性质 4，则有$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$且$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_a^*$，$f\left(z_{j_0 1}\right)=f\left(a+iy_{j_0}\right)=0$，$f\left(z_{j_0 2}\right)=f\left(a-iy_{j_0}\right)=0$。特别当$y_{j_0}=0$时，由于$z_{j_0 1}=a\in B_a^{*\#}$，

$z_{j_0 2}=a\in B_a^{*\#}$，则a是$f(z)=0$的 2 重以上根，故$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，由§3 定理 6 则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的一对复根，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，矛盾。所以，$B_a^*$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对严格对称的根全集。】

推论 1 设$a\in R$，则B_a^*是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集的充要条件是：$M(a)=0$，B_a^*是由$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由定理 1 和性质 7 推论即得。】

推论 2 设$a\in R$，则B_a^*是由$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的全部根组成的集合的充要条件是：$M(a)=0$，B_a^*是由$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l_1,l_2,l均为非负整数，B_a^*是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集，于是$y_{j_0}\neq 0$时，若$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是B_a^*的一对l重元素的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。其中$y_{j_0}\in R$时，则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对l重共轭根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是B_a^*的一对l重元素。

证明 由题意根据推论 1，则$M(a)=0$，B_a^*是由$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)组成的集合，于是$y_{j_0}\neq 0$时，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的一对$l$重根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$B_a^*$的一对$l$重元素。再由题意根据§3 定理 8 推论 1 即得。其中$y_{j_0}\in R$时，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上的一对$l$重共轭根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$B_a^*$的一对$l$重元素。再由§3 定理 8 推论 2 即得。】

推论 4 设$a\in R$，l为非负整数，l^*为≥ 0的偶数，B_a^*是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集，于是 1)若a是$f(z)=0$的l重根，且l为≥ 0偶数时，记$l^*=l$；l为奇数时，记$l^*=l-1$，则$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是B_a^*的l^*重元素；2) 若$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是B_a^*的l^*重元素，则a是$f(z)=0$的l^*重或者l^*+1重根。

证明 由题意根据推论 1，则 $M(a)=0$， B_a^* 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，故 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l^* 重根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 B_a^* 的 l^* 重元素。于是

1)由§3 定理 9 即知命题成立；2)由§3 定理 9 推论 1 即知命题成立。】

引理 设 $a\in R$， $y_j\in C$，则 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根的充要条件是： $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)。

证明 令 $B_a^*=\left\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K^*\right\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设整数 $n\geq 2$， $a\in R$， $y_j\in C$， $1\leq K^*\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，则 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根的充要条件是： y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,K^*\right)$ 是方程 $(4)^{*a}$ 的所有复根(含重根)。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 1 即得。】

推论 设 $a\in R$， $M(a)=0$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根的对数等于 $(4)^{*a}$ 关于 y^2 的次数。

证明 由定理 2 即得。】

§5 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根全集

定义 1 设整数 $n \ge 2$，$a \in R$，$M(a)=0$，$y_j \in C$ 且 $y_j \ne 0$，$1 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$，而 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 k 对非 a 根，则 $Q(a)=0$，记

$$B_{@}^{*}=\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j \in C 且 y_j \ne 0, j=1,2,\cdots,k\}$$

假设 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0} \in B_{@}^{*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0} \in B_{@}^{*}$，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $B_{@}^{*}$ 的 l 重元素，那么就称 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_{@}^{*}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对严格对称要求的一对 l 重元素。

满足上述条件就称 $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的一个非 a 根集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的 k 对非 a 根。

还可给出较为简洁的定义

定义 2 设整数 $n \ge 2$，$a \in R$，$M(a)=0$，$y_j \in C$ 且 $y_j \ne 0$，$1 \le k \le \left[\frac{n}{2}\right]$，而 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 k 对非 a 根，记

$$B_{@}^{*}=\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j \in C 且 y_j \ne 0, j=1,2,\cdots,k\}$$

若 $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于 a 点成对严格对称的根集，则称 $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的一个非 a 根集，其余部分与定义 1 相同。

以上两个定义是等价的，两者并存是为方便与§4 定义 1 以及第三章§5 定义 1 作比较，省略对本节性质和定理 1 及其推论的证明。与§4 比较，本节定义多了限制条件“$y_j \ne 0$”，由此将 $f(z)=0$ 的实根 a(假如有的话)排除在集合 $B_{@}^{*}$ 之外。

在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根集合 $B_{@}^{*}$ 的**性质**

性质 1 设 $a \in R$，$y_{j_0} \in C$ 且 $y_{j_0} \ne 0$，$B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根集，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0} \in B_{@}^{*}$ 的充要条件是：$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0} \in B_{@}^{*}$。

性质 2 设 $a \in R$，$y_{j_0} \in C$ 且 $y_{j_0} \ne 0$，l 为非负整数，$B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于

点 a 成对严格对称的非 a 根集，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 是 $B_@^*$ 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^*$ 的 l 重元素。

性质 3 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_@^*$ 和 $B_@^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根集，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^*$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^*$ 且 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^{*\#}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^{*\#}$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^*$ 的一对 l 重元素的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^{*\#}$ 的一对 l 重元素。

推论 1 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_@^*$ 和 $B_@^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根集， $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^*$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^*$， 且 $B_@^*\subset B_@^{*\#}$， 若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $B_@^*$ 的一对 l 重元素，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 也是 $B_@^{*\#}$ 的一对 l 重元素，即由 $a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@^*\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_@^{*\#}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_@^{*\#}$。

推论 2 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_@^*$ 和 $B_@^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根集，若 $B_@^{*\#}$ 的任何一对元素都属于 $B_@^*$，即由 $\forall\ z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^{*\#}$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^{*\#}\Rightarrow z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^*$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^*$， 则 $B_@^{*\#}\subset B_@^*$。

推论 3 设 $a\in R$， $B_@^*$ 和 $B_@^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根集，若 $B_@^*\subset B_@^{*\#}$ 且 $B_@^*\neq B_@^{*\#}$，则 $B_@^{*\#}$ 至少有一对元素不属于 $B_@^*$。

性质 4 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_@^*$ 和 $B_@^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根集，若 $B_@^{*\#}$ 至少有一对元素不属于 $B_@^*$，设为 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$， 则有 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_@^{*\#}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_@^{*\#}$ 且 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin B_@^*$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin B_@^*$， $f(z_{j_01})=f(a+iy_{j_0})=0$， $f(z_{j_02})=f(a-iy_{j_0})=0$。

定义 3 设整数 $n\geq 2$， $a\in R$， $1\leq k\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$B_@^*=\{z_{j1}=a+iy_j,z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C且y_j\neq 0,j=1,2,\cdots,k\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根集，且不存在 $B_@^{*\#}$，使

$B_{@}^{*} \subset B_{@}^{*\#}$ 且 $B_{@}^{*} \neq B_{@}^{*\#}$， $B_{@}^{*\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根集，则称 $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根全集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部非 a 根。

本节定义 1 与第三章§5 定义 1 是等价的，两者非 a 根全集的定义也是如此，于是添加的“成对”两个字可以去掉，例如：

$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根全集事实上就是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集，因此 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部非 a 根即为 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部非 a 根。

至于为何选用不同的集合符号和名称，则是为了本章节的需要。

性质 5 设 $a\in R$，则 $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根全集的充要条件是：$B_{@}^{*}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部非 a 根组成的集合。

性质 6 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根全集，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_{@}^{*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_{@}^{*}$。

推论 1 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根集，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_{@}^{*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_{@}^{*}$，则 $B_{@}^{*}$ 还不是非 a 根全集。

推论 2 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$ 且 $y_{j_0}\neq 0$， $B_{@}^{*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的非 a 根全集，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin B_{@}^{*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin B_{@}^{*}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对复根。

性质 7 设 $a\in R$， $B_{@}^{*}$ 和 $B_{@}^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根集，其中 $B_{@}^{*}$ 为非 a 根全集，则 $B_{@}^{*\#}\subset B_{@}^{*}$。

推论 设 $a\in R$，若 $B_{@}^{*}$ 和 $B_{@}^{*\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的二个非 a 根全集，则 $B_{@}^{*} = B_{@}^{*\#}$。

定理 1 设整数$n\ge 2$，$a\in R$，$1\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]$，集合

$$B_{@}^{*}=\left\{z_{j1}=a+iy_{j},z_{j2}=a-iy_{j}\mid y_{j}\in C\text{且}y_{j}\ne 0,\ \ j=1,2,\cdots,k\right\}$$

是由$F_{m^*}^{*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根(含重根)组成的集合，则$B_{@}^{*}$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对严格对称的非$a$根全集。

以下推论为叙述简便，说$B_{@}^{*}$是由$F_{m^*}^{*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根组成的集合时，默认$F_{m^*}^{*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上非$a$根(含重根)的对数$k\ge 1$。

推论 1 设$a\in R$，则$B_{@}^{*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的非a根全集的充要条件是：$M(a)=0$，$B_{@}^{*}$是由$F_{m^*}^{*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根(含重根)组成的集合。

推论 2 设$a\in R$，则$B_{@}^{*}$是由$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的全部非a根组成的集合的充要条件是：$M(a)=0$，$B_{@}^{*}$是由$F_{m^*}^{*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根(含重根)组成的集合。

推论 3 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$且$y_{j_0}\ne 0$，l_1,l_2,l均为非负整数，$B_{@}^{*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的非a根全集，若$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$B_{@}^{*}$的一对l重元素的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。其中$y_{j_0}\in R$时，则$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对l重共轭根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$B_{@}^{*}$的一对l重元素。

引理 设$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\ne 0$，则$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的全部非a根的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$F_{m^*}^{*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的所有非$a$根(含重根)。

证明 令$B_{@}^{*}=\left\{z_{j1}=a+iy_{j},z_{j2}=a-iy_{j}\mid y_{j}\in C\text{且}y_{j}\ne 0,j=1,2,\cdots,k\right\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设整数$n\ge 2$，$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\ne 0$，$1\le k\le\left[\frac{n}{2}\right]$，则$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$

$(j=1,2,\cdots,k)$是n次方程$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的全部非a根的充要条件是：$y_j^2\ (j=1,2,\cdots,k)$是方程$(4)^{*a}$的所有非0复根(含重根)。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 6 即得。】

推论 设$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\neq 0$，则$y_j^2\ (j=1,2,\cdots,k)$是方程$(4)^{*a}$的所有非0复根(含重根)的充要条件是：y_j，$-y_j\ (j=1,2,\cdots,k)$是方程$(4)^a$的所有非0复根(含重根)。

证明 $f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的全部非a根即为$f(z)=0$在z平面上关于点a严格对称的全部非a根，于是由定理 2 和第三章§5 定理 2 即得。】

根据推论，本文用k既表示$(4)^a$所有非0复根的对数，也表示$(4)^{*a}$所有非0复根的个数，还统一用k表示$F_m(z-a)=0$和$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根的对数。

设$a\in R$，$M(a)=0$，则$(3)^{*a}$内$f_{m^*}^*\left(y^2\right)$关于$y^2$的次数$K^*\geq 1$，将$f_{m^*}^*\left(y^2\right)$写成**规范形式**

$$f_{m^*}^*\left(y^2\right)=y^{l^*}[a_{m^*0}y^{2k}-a_{m^*1}y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}a_{m^*\ k-1}y^2+(-1)^k a_{m^*k}] \qquad (4)^{*a}$$

其关于y^2的次数$K^*=\dfrac{l^*}{2}+k\geq 1$，其中$k$为非负整数，$l^*$为$\geq 0$的偶数，但$k$和$l^*$不能同时为零，$a_{m^*0}\neq 0$，$a_{m^*k}\neq 0$，且$a_{m^*0},a_{m^*1},\cdots,a_{m^*\ k-1},a_{m^*k}$均为实数。于是$(4)^{*a}$复根和非0复根的个数分别为$K^*$和$k$，0是$(4)^{*a}$的$\dfrac{l^*}{2}$重实根，由§4 和§5 定理 2，则$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对严格对称的根和非$a$根的对数分别为$K^*$和$k$，$z=a$是$f(z)=0$的$l^*$重或者$l^*+1$重根，且$K^*=\dfrac{l^*}{2}+k$。

假设$z=a$是$f(z)=0$的l重根($l\geq 0$)，则$(4)^{*a}$中的l^*满足：1) l为≥ 0的偶数时，$l^*=l$；2) l为奇数时，$l^*=l-1$。

根全集B_a^*与非a根全集$B_@^*$的**关系性质**

设$f(z)$的次数≥ 2，$a\in R$，K^*为正整数，l为非负整数，$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集B_a^*和非a根全集$B_@^*$的元素对数分别为K^*和k，$z=a$是$f(z)=0$的l重根，且l为≥ 0的偶数时，记$l^*=l$；l为奇数时，记$l^*=l-1$，则$B_a^*=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l^*}\cup B_@^*$，$2K^*=l^*+2k$，其中$l^*$为$\geq 0$的偶数。

证明 根据§4 和§5 定理 1 推论 1，则 $M(a)=0$，B_a^* 和 $B_@^*$ 分别是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)和所有非 a 根(含重根)组成的集合；根据§3 定理 9，则 $z=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l^* 重根，l^* 为 ≥ 0 的偶数。由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合是由所有 a 根和所有非 a 根组成，其中所有 a 根组成的根就是 $\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l^*}$，于是 $B_a^*=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l^*}\cup B_@^*$。

由于是两个允许有重元有限集合的并运算，因此并集 B_a^* 的元素个数就等于这两个集合的元素个数之和，即 $2K^*=l^*+2k$，其中 l^* 为 ≥ 0 的偶数。】

定理 3 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$M(a)=0$，若 $B_@$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合，$B_@^*$ 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合，则 $B_@=B_@^*$，于是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)就是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)。

证明 根据第三章§5 和本节定理 1 推论 1，则 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的非 a 根全集；$B_@^*$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a(成对)严格对称的非 a 根全集，由第三章§5 性质 7 推论，则 $B_@=B_@^*$，于是命题成立。】

推论 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)。

证明 由定理 3 即得。】

定理 4 设 $a\in R$，l 为非负整数，$Q(a)=0$，$M(a)=0$，B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，B_a^* 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 1) l 为 ≥ 0 的偶数时，有 $B_a=B_a^*$；2) l 为奇数时，有 $B_a=\{a\}\cup B_a^*$。

证明 根据第三章§4 定理 1 推论 1，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根全集，由根全集 B_a 与非 a 根全集 $B_@$ 的关系性质，则 $B_a=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}\cup B_@$，其中 $B_@$

是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合。

根据本章§4 定理 1 推论 1，则 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集，由根全集 B_a^* 与非 a 根全集 $B_@^*$ 的关系性质，则 $B_a^*=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l^*}\cup B_@^*$，其中 $B_@^*$ 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)组成的集合，且 l 为 ≥ 0 的偶数时，$l^*=l$；l 为奇数时，$l^*=l-1$。

根据定理 3，则 $B_@=B_@^*$，1) l 为 ≥ 0 的偶数时，$l^*=l$，故 $B_a=B_a^*$；2) l 为奇数时，$l^*=l-1$，故 $B_a=\{a\}\cup B_a^*$。】

定理 5 设 $a\in R$，$M(a)=0$，l 为非负整数，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $(4)^{*a}$ 关于 y^2 的次数 $K^*\ge 1$，$(4)^a$ 的次数 $K\ge 2$，$Q(a)=0$，于是 1) l 为 ≥ 0 的偶数时，有 $K=2K^*$，$F_m(z-a)=cF_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，$f_m(y)=cf_{m^*}^*\left(y^2\right)$，其中 c 为非 0 实常数；2) l 为奇数时，有 $K=2K^*+1$，$F_m(z-a)=c(z-a)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，$f_m(y)=cyf_{m^*}^*\left(y^2\right)$，其中 c 为非 0 实常数。

证明 由 $a\in R$，$M(a)=0$，根据§2 定理 2 推论，则 $(4)^{*a}$ 关于 y^2 的次数 $K^*\ge 1$，$(4)^{*a}$ 至少有一个根，设它为 y_0^2，由§2 定理 6，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，再由第三章§2 定理 6，则 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对复根，故 $(4)^a$ 的次数 $K\ge 2$，$Q(a)=0$。而 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$ 关于 z 的次数为 $2K^*$，不妨设 B_a^* 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，则 B_a^* 的元素个数为 $2K^*$；$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$，$F_m(z-a)$ 关于 z 的次数为 K，不妨设 B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，则 B_a 的元素个数为 K。$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，根据定理 4 则 1) l 为 ≥ 0 的偶数时，有 $B_a=B_a^*$，于是 $K=2K^*$，$F_m(z-a)=cF_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，$f_m(y)=cf_{m^*}^*\left(y^2\right)$，其中 c 为非 0 实常数；2) l 为奇数时，有 $B_a=\{a\}\cup B_a^*$，于是 $K=2K^*+1$，$F_m(z-a)=c(z-a)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，$f_m(y)=cyf_{m^*}^*\left(y^2\right)$，其中 c 非 0 实常数。】

定理 6 设 $a\in R$，$M(a)=0$，$y_j\in R$ 且 $y_j\ne 0$，则 1) y_j^2 ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $(4)^{*a}$ 的所有正实根(含重根)的充要条件是：y_j，$-y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有非 0 实根(含重根)；2) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有

共轭根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)。

证明 不妨设 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根($l\ge 0$)，根据定理 5，则 l 为 ≥ 0 的偶数时，有 $F_m(z-a)=cF_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，$f_m(y)=cf_{m^*}^*\left(y^2\right)$；$l$ 为奇数时，有 $F_m(z-a)=c(z-a)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，$f_m(y)=cyf_{m^*}^*\left(y^2\right)$，其中 c 为非 0 实常数。于是无论 l 是奇数还是 ≥ 0 的偶数，命题 1)和 2)均成立。】

定理 7 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\ne 0$，则 1) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$) 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)的充要条件是：y_j^2 ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$) 是 $(4)^{*a}$ 的所有正实根(含重根)。2) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k^{(1)}$)是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)。

证明 由题设则 $M(a)=0$，于是根据定理 6，1)和 2)可分别再由第三章§3 的定理 13 和定理 11 推论 2 即得。】

$(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$还可写成**标准式**

$$f_{m^*}^*\left(y^2\right)=a_{m^*0}y^{l^*}[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^{*a}$$

其关于 y^2 的次数 $K^*=\dfrac{l^*}{2}+k\ \ge 1$，其中 k 为非负整数，l^* 为 ≥ 0 的偶数，但 k 和 l^* 不能同时为零，$a_{m^*0}\ne 0$，$\lambda_k\ne 0$，且 $a_{m^*0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，当 $k=0$ 时，$\lambda_k=\lambda_0=1$。

由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)=i^{l^*+2k}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，于是

$$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}[(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k]$$

若 k 为正整数，可进一步细化，令

$$p(y^2)=y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k\text{，则}$$

$$f_{m^*}^*\left(y^2\right)=a_{m^*0}y^{l^*}p\left(y^2\right)$$

该 $p\left(y^2\right)$为点 a 的 $p\left(y^2\right)$，将 $p\left(y^2\right)=0$ 视为关于 y^2 的 k 次方程，由于 $\lambda_k\ne 0$，0 不是 $p\left(y^2\right)=0$ 的根。设 $y_j\in C$ 且 $y_j\ne 0$，若 y_j^2 $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $p\left(y^2\right)=0$ 的所有复根，则它们

就是$(4)^{*a}$所有非0复根。也可将$p\left(y^2\right)=0$视为关于y的$2k$次方程，设$y_j\in C$且$y_j\neq 0$，若y_j，$-y_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$p\left(y^2\right)=0$的所有复根，则它们是$(4)^a$所有非0复根。

可见该$p\left(y^2\right)$与$f_m(y)=a_{m0}y^l p\left(y^2\right)$中的$p\left(y^2\right)$事实上是同一个多项式。

再令$P\left((iy)^2\right)=i^{2k}p\left(y^2\right)$，由$z=a+iy$，则$P\left((z-a)^2\right)=P\left((iy)^2\right)=i^{2k}p\left(y^2\right)$，于是

$$P\left((z-a)^2\right)=(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k，则$$

$$F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$$

$P\left((z-a)^2\right)$是$(z-a)^2$的实系数k次多项式，也是z的实系数$2k$次多项式。

该$P\left((z-a)^2\right)$与$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$中的$P\left((z-a)^2\right)$事实上是同一个多项式。

由于$\lambda_k\neq 0$，$z_0=a$不是$P\left((z-a)^2\right)=0$的根，于是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的$2k$个根均不等于a，$F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$，所以$P\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上的$2k$个根就是$F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根。于是有

定理 8 设$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\neq 0$，则$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有根(含重根)的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上所有非$a$根(含重根)。

推论 1 设$a\in R$，则$B^*_@$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的非a根全集的充要条件是：$M(a)=0$，$B^*_@$是由$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由定理8和定理1推论1即得。】

推论 2 设$a\in R$，则$B^*_@$是由$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的全部非a根组成的集合的充要条件是：$M(a)=0$，$B^*_@$是由$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由定理8和定理1推论2即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\neq 0$，若$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有根(含重根)，则它们既是$F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$也是

$F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上所有非 a 根(含重根)。

证明 由定理 8 和定理 3 推论即得。】

例 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则

1) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部非 a 根的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)；

2) $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)的充要条件是：y_j^2 $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有非 0 复根(含重根)。

证明 1)由定理 8 推论 2 即得，2)由 1)根据定理 2 即得】

定理 9 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，若 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)，则它们既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 还是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有共轭根(含重根)。

证明 由题设则 $M(a)=0$，根据定理 6 和第三章§5 定理 4 即得。】

$P\left((z-a)^2\right)=0$ 根的**性质**　与 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 根的性质相同。

性质 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 的根，则 $z_2=a-iy_0$ 也是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 的根。

推论 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 的根的充要条件是：$z_2=a-iy_0$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 的根。

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)\mid P\left((z-a)^2\right)\text{的充要条件是：}(z-z_2)\mid P\left((z-a)^2\right)\text{。}$$

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$，则

$$(z-z_1)^l\mid P\left((z-a)^2\right)\text{的充要条件是：}(z-z_2)^l\mid P\left((z-a)^2\right)\text{。}$$

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_2=a-iy_0$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l 重根。

推论 5 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 一对 l 重根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)^l\mid P\left((iy)^2\right)$，但 $\left(y^2-y_0^2\right)^{l+1}$ 不能整除

$P\left((iy)^2\right)$。

性质 2 设$a \in R$，$y_0 \in C$，$z_2 = a - iy_0$，若$z_1 = a + iy_0$是$P\left((z-a)^2\right)=0$的根，则$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$也是$P\left((z-a)^2\right)=0$的根。

推论 1 设$a \in R$，$y_0 \in C$，$z_2 = a - iy_0$，则$z_1 = a + iy_0$是$P\left((z-a)^2\right)=0$的根的充要条件是：$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$是$P\left((z-a)^2\right)=0$的根。

推论 2 设$a \in R$，$y_0 \in C$，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$，则

$$(z-z_1) \mid P\left((z-a)^2\right)\text{的充要条件是：}\left(z-\overline{z_2}\right) \mid P\left((z-a)^2\right)\text{。}$$

推论 3 设$a \in R$，$y_0 \in C$，l为非负整数，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a - iy_0$，则

$$(z-z_1)^l \mid P\left((z-a)^2\right)\text{的充要条件是：}\left(z-\overline{z_2}\right)^l \mid P\left((z-a)^2\right)\text{。}$$

推论 4 设$a \in R$，$y_0 \in C$，l为非负整数，$z_2 = a - iy_0$，则$z_1 = a + iy_0$是$P\left((z-a)^2\right)=0$的l重根的充要条件是：$\overline{z_2} = a + i\overline{y_0}$是$P\left((z-a)^2\right)=0$的$l$重根。

再令$s = (z-a)^2 = -y^2$，则$P(s) = s^k + \lambda_1 s^{k-1} + \cdots + \lambda_{k-1}s + \lambda_k$，其中$\lambda_k \neq 0$，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_k$均为实数，$P(0) = \lambda_k \neq 0$，实系数$k$次多项式$P(s)$称为点$a$的$P(s)$。

定理 10 设$a \in R$，点a的$P(s)$次数$k \geq 1$，$s_j \in C$且$s_j \neq 0$，l_j为正整数，若s_j是$P(s)=0$的l_j重根，则$z_{j1} = a + i\sqrt{-s_j}$，$z_{j2} = a - i\sqrt{-s_j}$是$P\left((z-a)^2\right)=0$的一对$l_j$重根，其中 1)若$s_j$是$P(s)=0$的$l_j$重负实根，则$z_{j1} = a + i\sqrt{-s_j}$，$z_{j2} = a - i\sqrt{-s_j}$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上的一对$l_j$重共轭根；2)若$s_j$是$P(s)=0$的$l_j$重的正实根，则$z_{j1} = a + \sqrt{s_j}$，$z_{j2} = a - \sqrt{s_j}$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面实轴上的一对$l_j$重实根。

证明 若s_j是$P(s)=0$的l_j重根，则$(s-s_j)^{l_j} \mid P(s)$，但$(s-s_j)^{l_j+1}$不能整除$P(s)$。又$s=(z-a)^2$，于是$\left[(z-a)^2 - s_j\right]^{l_j} \mid P\left((z-a)^2\right)$，但$\left[(z-a)^2 - s_j\right]^{l_j+1}$不能整除$P\left((z-a)^2\right)$。

由于$(z-z_{j1})(z-z_{j2}) = z^2 - (z_{j1}+z_{j2})z + z_{j1}z_{j2} = z^2 - 2az + (a^2 - s_j) = (z-a)^2 - s_j$，从而$\left[(z-z_{j1})(z-z_{j2})\right]^{l_j} \mid P\left((z-a)^2\right)$，故$(z-z_{j1})^{l_j} \mid P\left((z-a)^2\right)$，$(z-z_{j2})^{l_j} \mid P\left((z-a)^2\right)$。

但$(z-z_{j1})^{l_j+1}$和$(z-z_{j2})^{l_j+1}$都不能整除$P\left((z-a)^2\right)$。否则，假如$(z-z_{j1})^{l_j+1} \mid P\left((z-a)^2\right)$或$(z-z_{j2})^{l_j+1} \mid P\left((z-a)^2\right)$，由$P\left((z-a)^2\right)=0$根的性质 1 推论 3，则$(z-z_{j1})^{l_j+1} \mid P\left((z-a)^2\right)$且

$(z-z_{j2})^{l_j+1} \mid P((z-a)^2)$，由于 $s_j \neq 0$，$z_{j1} \neq z_{j2}$，则 $((z-z_{j1})^{l_j+1},(z-z_{j2})^{l_j+1})=1$，$[(z-z_{j1})(z-z_{j2})]^{l_j+1} \mid P((z-a)^2)$，于是 $[(z-a)^2-s_j]^{l_j+1} \mid P((z-a)^2)$，矛盾。

所以，$z_{j1}=a+i\sqrt{-s_j}$，$z_{j2}=a-i\sqrt{-s_j}$ 是 $P((z-a)^2)=0$ 的一对 l_j 重根，于是 1)令 $s_j<0$ 即得；2)令 $s_j>0$，则 $z_{j1}=a+i\sqrt{-s_j}=a-\sqrt{s_j}$，$z_{j2}=a-i\sqrt{-s_j}=a+\sqrt{s_j}$，再按书写习惯调整即得。】

推论 1 设 $a\in R$，点 a 的 $P(s)$ 次数 $k\geq 1$，$s_j\in C$ 且 $s_j\neq 0$，l_j 为正整数，若 s_j 是 $P(s)=0$ 的 l_j 重根，则 $z_{j1}=a+i\sqrt{-s_j}$，$z_{j2}=a-i\sqrt{-s_j}$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $F^*_{m^*}((z-a)^2)=0$ 的一对 l_j 重根，其中 1)若 s_j 是 $P(s)=0$ 的 l_j 重负实根，则 $z_{j1}=a+i\sqrt{-s_j}$，$z_{j2}=a-i\sqrt{-s_j}$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $F^*_{m^*}((z-a)^2)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l_j 重共轭根；2)若 s_j 是 $P(s)=0$ 的 l_j 重的正实根，则 $z_{j1}=a+\sqrt{s_j}$，$z_{j2}=a-\sqrt{s_j}$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $F^*_{m^*}((z-a)^2)=0$ 在 z 平面实轴上的一对 l_j 重实根。

证明 由 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P((z-a)^2)$ 和 $F^*_{m^*}((z-a)^2)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*} P((z-a)^2)$，根据定理 10 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，点 a 的 $P(s)$ 次数 $k\geq 1$，l_j 为正整数，若 s_j 是 $P(s)=0$ 的 l_j 重负实根，则 $z_{j1}=a+i\sqrt{-s_j}$，$z_{j2}=a-i\sqrt{-s_j}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对 l_j 重共轭根。

证明 由题设，则 $Q(a)=0$，$M(a)=0$，再根据推论 1 和第三章§3 定理 10 推论 2 或第五章§3 定理 8 推论 2 即得。】

§6 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集

定义 1 设整数 $n \ge 2$， $a \in R$， $M(a)=0$， $y_j \in C$， $1 \le \underline{K^*} \le \left[\frac{n}{2}\right]$； $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\underline{K^*}$ 对各不相同的成对根，记

$$\underline{B_a^*}=\left\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right\}$$

则称 $\underline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的一个根集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的 $\underline{K^*}$ 对各不相同的成对根。

若 $\underline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，对 $\forall$ $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，其中 1) $y_{j_0} \ne 0$ 时， $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 都是 $\underline{B_a^*}$ 的单元素，则称 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对单层对称要求的一对单元素。2) $y_{j_0}=0$ 时， $z_{j_01}=a$ ($z_{j_02}=a$)是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素， $z_{j_01}=a$ 和 $z_{j_02}=a$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的一对元素，则称 $z_{j_01}=a$， $z_{j_02}=a$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对单层对称要求的一对元素。

$y_{j_0}=0$ 时，由于 $z_{j_01}=a \in \underline{B_a^*}$， $z_{j_02}=a \in \underline{B_a^*}$，则 $z_{j_01}=a$ 和 $z_{j_02}=a$ 是 B_a^* 的两个相同的元素。如果 $z_{j_01}=a$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，那么 $z_{j_02}=a$ 也是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，为便于统一叙述还可以说 $z_{j_01}=a$， $z_{j_02}=a$ 都是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，并理解为 $z_{j_01}=a$ ($z_{j_02}=a$)是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，记作 $a=z_{j_01}(2) \in \underline{B_a^*}$ ($a=z_{j_02}(2) \in \underline{B_a^*}$)。

例 设 $a \in R$， $y_{j_0} \in C$， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，假设对 $\forall$ $z_{j_01}=a+iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$，满足：1) $y_{j_0} \ne 0$ 时， $a+iy_{j_0}=z_{j_01}(1) \in \underline{B_a^*}$， $a-iy_{j_0}=z_{j_02}(1) \in \underline{B_a^*} \Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(1) \in \underline{B_a^{*\#}}$， $a-iy_{j_0}=z_{j_02}(1) \in \underline{B_a^{*\#}}$； 2) $y_{j_0}=0$ 时， $a=z_{j_01}(2) \in \underline{B_a^*}$ ($a=z_{j_02}(2) \in \underline{B_a^*} \Rightarrow a=z_{j_01}(2) \in \underline{B_a^{*\#}}$ ($a=z_{j_02}(2) \in \underline{B_a^{*\#}}$)，则 $\underline{B_a^*}$

是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的子集，即 $\underline{B_a^*} \subset \underline{B_a^{*\#}}$ 。当且仅当 $\underline{B_a^*} \subset \underline{B_a^{*\#}}$ 且 $\underline{B_a^{*\#}} \subset \underline{B_a^*}$ 时， $\underline{B_a^*} = \underline{B_a^{*\#}}$ 。当且仅当 $\underline{B_a^*} \subset \underline{B_a^{*\#}}$ 且 $\underline{B_a^*} \neq \underline{B_a^{*\#}}$ 时， $\underline{B_a^*}$ 是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质** 设 $a \in R$ ， $y_{j_0} \in C$ ， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，若 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ， 且 $\underline{B_a^*} \subset \underline{B_a^{*\#}}$ ，则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^{*\#}}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^{*\#}}$ 。

在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集合 $\underline{B_a^*}$ 的**性质**

性质 1 设 $a \in R$ ，$y_{j_0} \in C$ ，$\underline{B_a^*}$ 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ 的充要条件是： $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ 。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设 $a \in R$ ，$y_{j_0} \in C$ ，$\underline{B_a^*}$ 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ 的充要条件是：1) $y_{j_0} \neq 0$ 时， $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的一对单元素， 即 $a + iy_{j_0} = z_{j_0 1}(1) \in \underline{B_a^*}$ ， $a - iy_{j_0} = z_{j_0 2}(1) \in \underline{B_a^*}$ ； 2) $y_{j_0} = 0$ 时， $z_{j_0 1} = a$ ($z_{j_0 2} = a$)是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，即 $a = z_{j_0 1}(2) \in \underline{B_a^*}$ ($a = z_{j_0 2}(2) \in \underline{B_a^*}$)。

证明 由定义即得。】

性质 3 设 $a \in R$ ， $y_{j_0} \in C$， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，$z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^{*\#}}$ ，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^{*\#}}$ ，则 1) $y_{j_0} \neq 0$ 时， $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 既是 $\underline{B_a^*}$ 的一对单元素，也是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的一对单元素；2) $y_{j_0} = 0$ 时， $z_{j_0 1} = a$ ($z_{j_0 2} = a$)既是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，也是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的 2 重元素。

证明 由性质 2 即得。】

推论 1 设 $a \in R$ ， $y_{j_0} \in C$， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，若 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ， 且 $\underline{B_a^*} \subset \underline{B_a^{*\#}}$ ， 则 1) $y_{j_0} \neq 0$ 时， $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ ，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 既是 $\underline{B_a^*}$ 的一对单元素，也是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的一对单元素；2) $y_{j_0} = 0$ 时， $z_{j_0 1} = a$ ($z_{j_0 2} = a$)既是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，也是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的 2 重元素。

证明 由 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \underline{B_a^*}$ ，且 $\underline{B_a^*} \subset \underline{B_a^{*\#}}$ ，则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \underline{B_a^{*\#}}$ ，

$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，$\underline{B_a^{*\#}}$ 的任何一对元素都属于 $\underline{B_a^*}$，即由 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$ $\Rightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$， 则 $\underline{B_a^{*\#}}\subset\underline{B_a^*}$。

证明 由 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}\Rightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，由性质 3 则 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，由 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的一对单元素，能推导出 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的一对单元素， 即由 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in\underline{B_a^{*\#}}$， $a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in\underline{B_a^{*\#}}$ $\Rightarrow$ $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in\underline{B_a^*}$， $a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in\underline{B_a^*}$； 2) $y_{j_0}=0$ 时， 由 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\underline{B_a^{*\#}}$ 的 2 重元素，能推导出 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，即由 $a=z_{j_0 1}(2)\in\underline{B_a^{*\#}}$ ($a=z_{j_0 2}(2)\in\underline{B_a^{*\#}}$) $\Rightarrow$ $a=z_{j_0 1}(2)\in\underline{B_a^*}$ ($a=z_{j_0 2}(2)\in\underline{B_a^*}$)。于是有 $\underline{B_a^{*\#}}\subset\underline{B_a^*}$。】

推论 3 设 $a\in R$， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，若 $\underline{B_a^*}\subset\underline{B_a^{*\#}}$ 且 $\underline{B_a^*}\neq\underline{B_a^{*\#}}$， 则 $\underline{B_a^{*\#}}$ 至少有一对元素不属于 $\underline{B_a^*}$。

证明 由题设则 $\underline{B_a^{*\#}}\not\subset\underline{B_a^*}$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$， $\underline{B_a^*}$ 和 $\underline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的二个根集，若 $\underline{B_a^{*\#}}$ 至少有一对元素不属于 $\underline{B_a^*}$， 设为 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$，则显然有 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$， $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$， $f(z_{j_0 1})=f(a+iy_{j_0})=0$， $f(z_{j_0 2})=f(a-iy_{j_0})=0$。

定义 2 设整数 $n\geq 2$， $a\in R$， $1\leq\underline{K^*}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$\underline{B_a^*}=\{z_{j1}=a+iy_j,z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，并且不存在 $\underline{B_a^{*\#}}$， 使 $\underline{B_a^*}\subset\underline{B_a^{*\#}}$ 且 $\underline{B_a^*}\neq\underline{B_a^{*\#}}$， $\underline{B_a^{*\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，则称 $\underline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集，且称其所有元素 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K^*})$是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根。

性质 5 设$a\in R$，则$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集的充要条件是：$\underline{B_a^*}$是由$f(z)=0$在z平面关于点a对称的全部各不相同的成对根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，则

$$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}\text{且}z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}。$$

证明 用反证法。假设$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$不成立，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$或$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$，由性质 1 则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$。由于$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，于是

1) $y_{j_0}\neq 0$时，令$\underline{B_a^{*\#}}$包含$\underline{B_a^*}$的一切元素，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$都是$\underline{B_a^{*\#}}$的单元素，于是找到根集合$\underline{B_a^{*\#}}$，使$\underline{B_a^*}\subset\underline{B_a^{*\#}}$且$\underline{B_a^*}\neq\underline{B_a^{*\#}}$，$\underline{B_a^{*\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根集合。但这与$\underline{B_a^*}$是根全集矛盾。

2) $y_{j_0}=0$时，$z_{j_01}=a\notin\underline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a\notin\underline{B_a^*}$，令$\underline{B_a^{*\#}}$包含$\underline{B_a^*}$的一切元素，$z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是$\underline{B_a^{*\#}}$的 2 重元素，$z_{j_01}=a$和$z_{j_02}=a$是$\underline{B_a^{*\#}}$的一对元素，于是找到根集合$\underline{B_a^{*\#}}$，使$\underline{B_a^*}\subset\underline{B_a^{*\#}}$且$\underline{B_a^*}\neq\underline{B_a^{*\#}}$，$\underline{B_a^{*\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根集合。但这与$\underline{B_a^*}$是根全集矛盾。

所以，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$。】

推论 1 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$，则$\underline{B_a^*}$还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$不是$f(z)=0$的一对复根。

证明 由性质 6 即得。】

下面性质 7 及推论的证明方法与§4 性质 7 及推论相同予以省略。

性质 7 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\underline{B_a^*}$和$\underline{B_a^{*\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的二个根集，其中$\underline{B_a^*}$为根全集，则$\underline{B_a^{*\#}}\subset\underline{B_a^*}$。

推论 设$a\in R$，若$\underline{B_a^*}$和$\underline{B_a^{*\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的二个根全集，则$\underline{B_a^*}=\underline{B_a^{*\#}}$。

定理 1 设整数$n\geq 2$，$a\in R$，$1\leq\underline{K^*}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$\underline{B_a^*}=\left\{z_{j1}=a+iy_j,z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right\}$$

是由$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面上以$a$为中点的所有各不相同的成对根组成的集合，则$\underline{B_a^*}$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根全集。

证明 由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则$M(a)=0$，$f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，故$\underline{B_a^*}$的所有元素$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ ($j=1,2,\cdots,\underline{K^*}$)是方程$f(z)=0$在$z$平面上的$\underline{K^*}$对各不相同的成对根，由定义 1，则$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根集合。

再证$\underline{B_a^*}$是根全集，用反证法：假设$\underline{B_a^*}$还不是根全集，那么一定存在$\underline{B_a^{*\#}}$，使$\underline{B_a^*}\subset\underline{B_a^{*\#}}$且$\underline{B_a^*}\neq\underline{B_a^{*\#}}$，$\underline{B_a^{*\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根集，由性质 3 推论 3 则$\underline{B_a^{*\#}}$至少有一对元素不属于$\underline{B_a^*}$，设为$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$，其中$y_{j_0}\in C$，由性质 4 则有$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^{*\#}}$且$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$，$f\left(z_{j_01}\right)=f\left(a+iy_{j_0}\right)=0$，$f\left(z_{j_02}\right)=f\left(a-iy_{j_0}\right)=0$。特别当$y_{j_0}=0$时，$z_{j_01}=a\in\underline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_02}=a\in\underline{B_a^{*\#}}$，故$a$是$f(z)=0$的 2 重以上根，于是$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，由§3 定理 6 则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的一对复根，于是$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，矛盾。所以，$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根全集。】

推论 1 设$a\in R$，则$\underline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集的充

要条件是：$M(a)=0$，$\underline{B_a^*}$ 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根组成的集合。

证明 由定理 1 和性质 7 推论即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $\underline{B_a^*}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根组成的集合的充要条件是：$M(a)=0$，$\underline{B_a^*}$ 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$\underline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集，1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的一对单元素。2) $y_{j_0}=0$ 时，$z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$ 是 $f(z)=0$ 的一对实根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素。

证明 由题意根据推论 1，则 $M(a)=0$，$\underline{B_a^*}$ 是由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根组成的集合。于是 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对复根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $\underline{B_a^*}$ 的一对单元素。再由§3 定理 6 推论 2 即得。2) $y_{j_0}=0$ 时，$z_{j_0 1}=a$，$z_{j_0 2}=a$ 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 的一对实根的充要条件是：$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素。再由§3 定理 6 推论 1 即得。】

引理 设 $a\in R$，$y_j\in C$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根的充要条件是：$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根。

证明 令 $\underline{B_a^*}=\left\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设整数 $n\geq 2$，$a\in R$，$y_j\in C$，$1\leq \underline{K^*}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根的充要条件是：y_j^2 $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right)$是方程 $(4)^{*a}$ 的所有各不相同的复根。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 2 即得。】

设整数 $n\geq 2$，$a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，$1\leq \underline{K^*}\leq\left[\frac{n}{2}\right]$，$l$ 为非负整数，n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的各不相同的成对根的对数为 $\underline{K^*}$，若 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，且 l 为 ≥ 0 的偶数时，记 $l^*=l$；l 为奇数时，记 $l^*=l-1$，由§3 定理 9 则 $z=a$ 是 $F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$ 的 l^* 重根，其中 l^* 为 ≥ 0 的偶数，$F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$。于是

1. $l\geq 2$ 时，l^* 为 ≥ 2 的偶数，于是 $z_1=a$，$z_2=a$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根，从而它们也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根，$\underline{K^*}=1+s$。

2. $l=0$ 或 1 时，$l^*=0$，于是 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根，从而它们也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根，$\underline{K^*}=s$。

推论 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，l 为非负整数，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，于是 1) $l\geq 2$ 时，$z_1=a$，$z_2=a$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根的充要条件是：0，y_j^2 $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有各不相同的复根；2) $l=0$ 或 1 时，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根的充要条件是：y_j^2 $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $(4)^{*a}$ 的所有各不相同的复根。

证明 由题意根据定理 2 即得。】

设 $a\in R$，$M(a)=0$，当 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 0 重根或者 1 重根，由§3 定理 9 推论 2 则 $z=a$ 不是 $F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$ 的根。这时，若 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，根据定义则 B_a^* 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，且 $a\notin B_a^*$(若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，则 $y_{j_0}\neq 0$)，这时，

$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$B_a^*$的一对单元素，即$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in B_a^*$。

例　设$a\in R$，$\underline{B_a^*}$和B_a^*分别是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称根集合和成对严格对称根集合，$y_{j_0}\in C$，假如$\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$且$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，满足 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in\underline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in\underline{B_a^*}$ $\Rightarrow$ $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(\geq 1)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(\geq 1)\in B_a^*$；2) $y_{j_0}=0$时，$a=z_{j_0 1}(2)\in\underline{B_a^*}$ ($a=z_{j_0 2}(2)\in\underline{B_a^*}$) $\Rightarrow$ $a=z_{j_0 1}(\geq 2)\in B_a^*$ ($a=z_{j_0 2}(\geq 2)\in B_a^*$)，则$\underline{B_a^*}$是$B_a^*$的子集，即$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$。反过来，假如$\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$且$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，满足 1) $y_{j_0}\neq 0$时，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in B_a^*\Rightarrow$ $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in\underline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in\underline{B_a^*}$；2) $y_{j_0}=0$时，$a=z_{j_0 1}(2)\in B_a^*$ ($a=z_{j_0 2}(2)\in B_a^*$) $\Rightarrow a=z_{j_0 1}(2)\in\underline{B_a^*}$ ($a=z_{j_0 2}(2)\in\underline{B_a^*}$)，则$B_a^*$是$\underline{B_a^*}$的子集，即$B_a^*\subset\underline{B_a^*}$。当且仅当$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$且$B_a^*\subset\underline{B_a^*}$时，$\underline{B_a^*}=B_a^*$；当且仅当$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$且$\underline{B_a^*}\neq B_a^*$时，$\underline{B_a^*}$是$B_a^*$的真子集。

性质　设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根集合$\underline{B_a^*}$和成对严格对称的根集合B_a^*的元素对数分别为$\underline{K^*}$和K^*，1)若$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$，则$\underline{K^*}\leq K^*$；若$\underline{B_a^*}=B_a^*$，则$\underline{K^*}=K^*$；若$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$且$\underline{B_a^*}\neq B_a^*$，则$\underline{K^*}<K^*$；若$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$，$\underline{K^*}=K^*$，则$\underline{B_a^*}=B_a^*$。2)若$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$，则

$$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*，\ z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*。$$

设$a\in R$，$\underline{B_a^*}=\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对单层对称的根全集，利用$\underline{B_a^*}$可以生成$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对严格对称的根全集$B_a^*$，方法如下：

假设$\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$且$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，于是$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根。令$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$。那么

1. $y_{j_0}\neq 0$时，若$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则$l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$。记$l=\min(l_1,l_2)$，则$l\geq 1$，令$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$都是B_a^*的l重元素，于是$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$是B_a^*的符合$f(z)=0$的根在z平面上关于点a成对

严格对称要求的一对 l 重元素。

2. $y_{j_0}=0$ 时，$z_{j_01}=a\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a\in\underline{B_a^*}$，若 $z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l\geq 2$，l 为偶数时，记 $l^*=l$；l 为奇数时，记 $l^*=l-1$，则令 $z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是 B_a^* 的 l^* 重元素，其中 l^* 为 ≥ 2 的偶数， $z_{j_01}=a$ 和 $z_{j_02}=a$ 是 B_a^* 的一对元素，于是 $z_{j_01}=a$，$z_{j_02}=a$ 是 B_a^* 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对严格对称要求的一对元素。

在对 $\underline{B_a^*}$ 的每一对元素都进行了上述操作之后，由此生成的 B_a^* 符合 z 平面上成对严格对称根集合的定义，因此 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，下面进一步证明它是根全集。

定理 3 设整数 $n\geq 2$， $a\in R$， $1\leq\underline{K^*}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$\underline{B_a^*}=\left\{z_{j1}=a+iy_j,z_{j2}=a-iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a^*}$ 用上述方法所生成的 B_a^* 的元素对数为 K^*， $y_{j_0}\in C$，则 1) $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$ 的充要条件是： $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$；2) B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集；3) $\underline{B_a^*}\subset B_a^*$， $\underline{K^*}\leq K^*$。

证明 由题设，则 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，而且

1)必要性显然，证充分性。若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由性质 6，则 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$。故充分性成立。

2)用反证法：假设 B_a^* 还不是根全集，那么一定存在 $B_a^{*\#}$，使 $B_a^*\subset B_a^{*\#}$ 且 $B_a^*\neq B_a^{*\#}$，$B_a^{*\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集，由§4 性质 3 推论 3 则 $B_a^{*\#}$ 至少有一对元素不属于 B_a^*，设为 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$，其中 $y_{j_0}\in C$，由§4 性质 4 则有 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_a^{*\#}$ 且 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin B_a^*$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin B_a^*$，$f(z_{j_01})=f(a+iy_{j_0})=0$， $f(z_{j_02})=f(a-iy_{j_0})=0$。

特别当 $y_{j_0}=0$ 时， $z_{j_01}=a\in B_a^{*\#}$， $z_{j_02}=a\in B_a^{*\#}$，故 a 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由 1)则必有 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$ 且

$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin \underline{B_a^*}$，由性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a^*}$ 还不是根全集，矛盾。所以，B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集。

3)假设 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$，于是 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，那么① $y_{j_0}\neq 0$ 时，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $\underline{B_a^*}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in \underline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in \underline{B_a^*}$。不妨设 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $l\geq 1$，由 B_a^* 生成法，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，因此 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 1 重以上元素，即 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(\geq 1)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(\geq 1)\in B_a^*$。于是由 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(1)\in \underline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(1)\in \underline{B_a^*}\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(\geq 1)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(\geq 1)\in B_a^*$。② $y_{j_0}=0$ 时，$z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 $\underline{B_a^*}$ 的 2 重元素，即 $a=z_{j_0 1}(2)\in \underline{B_a^*}$（$a=z_{j_0 2}(2)\in \underline{B_a^*}$）。由于 $z_{j_0 1}=a\in \underline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a\in \underline{B_a^*}$，不妨设 $z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l\geq 2$，l 为偶数时，记 $l^*=l$；l 为奇数时，记 $l^*=l-1$，由 B_a^* 生成法则 $z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 B_a^* 的 l^* 重元素，其中 l^* 为 ≥ 2 的偶数，因此 $z_{j_0 1}=a$（$z_{j_0 2}=a$）是 B_a^* 的 2 重以上元素，即 $a=z_{j_0 1}(\geq 2)\in B_a^*$（$a=z_{j_0 2}(\geq 2)\in B_a^*$）。于是由 $a=z_{j_0 1}(2)\in \underline{B_a^*}$（$a=z_{j_0 2}(2)\in \underline{B_a^*}$）$\Rightarrow$ $a=z_{j_0 1}(\geq 2)\in B_a^*$（$a=z_{j_0 2}(\geq 2)\in B_a^*$）。因此 $\underline{B_a^*}\subset B_a^*$。又 $\underline{B_a^*}$ 和 B_a^* 的元素对数分别为 $\underline{K^*}$ 和 K^*，所以 $\underline{K^*}\leq K^*$。】

若 $\underline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集，则 $\underline{B_a^*}$ 是由各不相同的成对元素组成的集合，利用 $\underline{B_a^*}$ 用上述方法所生成的 B_a^* 的成对元素不一定各不相同。由定理 3，有

$$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \underline{B_a^*},\quad z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}\Leftrightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*,\quad z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*。$$

事实上，由 B_a^* 的所有各不相同的成对元素组成的集合就是 $\underline{B_a^*}$。在 B_a^* 中任意取一对元素，为减少任意取的次数，可以只在 $\underline{B_a^*}$ 中选取，即用 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$ 来代表 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，或者说

$$\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \underline{B_a^*} \text{ 且 } z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}\Leftrightarrow \forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^* \text{ 且 } z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*。$$

§7 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根全集

按惯例，首先要定义 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根集，但它的元素个数却不一定是偶数，故采用生成法定义。

定义 1 设整数 $n\geq 2$， $a\in R$， $M(a)=0$， $1\leq \underline{K^*}\leq\left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$\underline{B_a^*}=\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根集，利用 $\underline{B_a^*}$ 生成 $\overline{B_a^*}$，方法如下：

假设 $\forall\ z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，于是 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，令 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，其中 $y_{j_0}\neq 0$ 时，若 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$， $l_2\geq 1$，令 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^*}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，那么就称 $z_{j_01}=a+iy_{j_0}$， $z_{j_02}=a-iy_{j_0}$ 是 $\overline{B_a^*}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对普通对称要求的一对元素。

$y_{j_0}=0$ 时， $z_{j_01}=a\in\underline{B_a^*}$， $z_{j_02}=a\in\underline{B_a^*}$，若 $z_{j_01}=a$ ($z_{j_02}=a$)是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l\geq 2$， l 为偶数时，记 $l^*=l$； l 为奇数时，记 $l^*=l-1$，令 $z_{j_01}=a$ ($z_{j_02}=a$)是 $\overline{B_a^*}$ 的 l^* 重元素，其中 l^* 为 ≥ 2 的偶数， $z_{j_01}=a$ 和 $z_{j_02}=a$ 是 $\overline{B_a^*}$ 的一对元素，那么就称 $z_{j_01}=a$， $z_{j_02}=a$ 是 $\overline{B_a^*}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于点 a 成对普通对称要求的一对元素。

在对 $\underline{B_a^*}$ 的每一对元素都进行了上述操作之后，由此生成的 $\overline{B_a^*}$ 就称为 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的一个根集，且称其所有元素是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对(普通)对称的若干个根。

例 1 设 $a\in R$， $y_{j_0}\in C$， l^* 为 ≥ 2 的偶数， $\overline{B_a^*}$ 和 $\overline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的二个根集，假如 $\forall\ z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$ 且 $z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$ 满足 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时， $a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l_1)\in\overline{B_a^*}$， $a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l_2)\in\overline{B_a^*}\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l_1)\in\overline{B_a^{*\#}}$， $a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l_2)\in\overline{B_a^{*\#}}$； 2)

$y_{j_0}=0$时，$a=z_{j_01}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^*}$（$a=z_{j_02}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^*}$）$\Rightarrow$ $a=z_{j_01}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^{*\#}}$（$a=z_{j_02}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^{*\#}}$），则$\overline{B_a^*}$是$\overline{B_a^{*\#}}$的子集，即$\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$。当且仅当$\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$且$\overline{B_a^{*\#}}\subset\overline{B_a^*}$时，$\overline{B_a^*}=\overline{B_a^{*\#}}$。当且仅当$\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$且$\overline{B_a^*}\neq\overline{B_a^{*\#}}$时，$\overline{B_a^*}$是$\overline{B_a^{*\#}}$的真子集。

元素与集合的**关系性质** 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\overline{B_a^*}$和$\overline{B_a^{*\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的根集，1) $y_{j_0}\neq 0$时，若$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l_1)\in\overline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l_2)\in\overline{B_a^*}$，且$l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$；若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l_1)\in\overline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l_2)\in\overline{B_a^*}$，则$l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$。2) $y_{j_0}=0$时，若$a=z_{j_01}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^*}$（$a=z_{j_02}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^*}$）且$l^*$为$\geq 2$的偶数，则$z_{j_01}=a\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a\in\overline{B_a^*}$；若$z_{j_01}=a\in\overline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a\in\overline{B_a^*}$，$a=z_{j_01}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^*}$（$a=z_{j_02}\left(l^*\right)\in\overline{B_a^*}$），则$l^*$为$\geq 2$的偶数。3)若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，且$\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$。

在z平面上关于点a成对普通对称的根集合$\overline{B_a^*}$的**性质**

性质 1 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\overline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的根集，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$的充要条件是：$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$且$y_{j_0}\neq 0$，$\overline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的根集，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$和$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$分别是$\overline{B_a^*}$的$l_1$重和$l_2$重元素。

证明 由定义 1 即得。】

性质 3 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l^*为≥ 2的偶数，$\overline{B_a^*}$和$\overline{B_a^{*\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的二个根集，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$且$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$，于是

1) $y_{j_0}\neq 0$时，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$分别是$\overline{B_a^*}$的l_1重和l_2重元素的充要条

件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素。

2) $y_{j_0}=0$ 时，则 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\overline{B_a^{*}}$ 的 l^* 重元素的充要条件是：$z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l^* 重元素。

证明 由题设，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，于是

1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，由性质 2 即知命题成立。

2) $y_j=0$ 时，不妨设 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l\geq 2$。证必要性。若 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\overline{B_a^{*}}$ 的 l^* 重元素，由定义 1 则 l 为偶数时，$l^*=l$；l 为奇数时，$l^*=l-1$，再由定义 1 则 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l^* 重元素，命题成立。充分性同理可证。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l^* 为 ≥ 2 的偶数，$\overline{B_a^{*}}$ 和 $\overline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的二个根集，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，且 $\overline{B_a^{*}}\subset\overline{B_a^{*\#}}$，于是 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^{*}}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 也分别是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素；2) $y_{j_0}=0$ 时，若 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\overline{B_a^{*}}$ 的 l^* 重元素，则 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)也是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l^* 重元素。

证明 由 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，且 $\overline{B_a^{*}}\subset\overline{B_a^{*\#}}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\overline{B_a^{*}}$ 和 $\overline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的二个根集，若 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的任何一对元素都属于 $\overline{B_a^{*}}$，即由 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$ $\Rightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，则 $\overline{B_a^{*\#}}\subset\overline{B_a^{*}}$。

证明 由 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}\Rightarrow z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*}}$，由性质 3，则 1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^{*}}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，即由 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l_1)\in\overline{B_a^{*\#}}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l_2)\in\overline{B_a^{*\#}}\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l_1)\in\overline{B_a^{*}}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l_2)\in\overline{B_a^{*}}$；2) $y_{j_0}=0$ 时，若 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的 l^* 重元素，则 $z_{j_0 1}=a$ ($z_{j_0 2}=a$)也是 $\overline{B_a^{*}}$ 的 l^* 重元素，即由

$a = z_{j_0 1}\left(l^*\right) \in \overline{B_a^{*\#}}$ ($a = z_{j_0 2}\left(l^*\right) \in \overline{B_a^{*\#}}$) $\Rightarrow$ $a = z_{j_0 1}\left(l^*\right) \in \overline{B_a^*}$ ($a = z_{j_0 2}\left(l^*\right) \in \overline{B_a^*}$)。所以 $\overline{B_a^{*\#}} \subset \overline{B_a^*}$ 。】

推论 3 设 $a \in R$ ， $\overline{B_a^*}$ 和 $\overline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的二个根集，若 $\overline{B_a^*} \subset \overline{B_a^{*\#}}$ 且 $\overline{B_a^*} \neq \overline{B_a^{*\#}}$ ，则 $\overline{B_a^{*\#}}$ 至少有一对元素不属于 $\overline{B_a^*}$ 。

证明 由题设则 $\overline{B_a^{*\#}} \not\subset \overline{B_a^*}$ ，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a \in R$ ， $y_{j_0} \in C$ ， $\overline{B_a^*}$ 和 $\overline{B_a^{*\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的二个根集，若 $\overline{B_a^{*\#}}$ 至少有一对元素不属于 $\overline{B_a^*}$ ，设为 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ ，则显然有 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \overline{B_a^{*\#}}$ ，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \overline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \notin \overline{B_a^*}$ ，$z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \notin \overline{B_a^*}$ ，

$$f\left(z_{j_0 1}\right) = f\left(a + iy_{j_0}\right) = 0，\quad f\left(z_{j_0 2}\right) = f\left(a - iy_{j_0}\right) = 0。$$

定义 2 设 $a \in R$ ， $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根集，并且不存在 $\overline{B_a^{*\#}}$ ，使 $\overline{B_a^*} \subset \overline{B_a^{*\#}}$ 且 $\overline{B_a^*} \neq \overline{B_a^{*\#}}$ ， $\overline{B_a^{*\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根集，则称 $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根全集，且称其所有元素是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对(普通)对称的全部根。

性质 5 设 $a \in R$ ，则 $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根全集的充要条件是： $\overline{B_a^*}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对(普通)对称的全部根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a \in R$ ， $y_{j_0} \in C$， $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根全集，若 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则

$$z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \overline{B_a^*} \text{ 且 } z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \overline{B_a^*}。$$

证明 用反证法。假设 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \in \overline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \in \overline{B_a^*}$ 不成立，则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \notin \overline{B_a^*}$ 或 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \notin \overline{B_a^*}$ ，由性质 1 则 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0} \notin \overline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0} \notin \overline{B_a^*}$ 。由于 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ ， $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，于是

1) $y_{j_0} \neq 0$ 时，不妨设 $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \geq 1$ ， $l_2 \geq 1$ 。令 $\overline{B_a^{*\#}}$ 包含 $\overline{B_a^*}$ 的一切元素， $z_{j_0 1} = a + iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2} = a - iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^{*\#}}$ 的

l_1重和l_2重元素，于是找到根集合$\overline{B_a^{*\#}}$，使$\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$且$\overline{B_a^*}\neq\overline{B_a^{*\#}}$，$\overline{B_a^{*\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对普通对称的根集合。但这与$\overline{B_a^*}$是根全集矛盾。

2) $y_{j_0}=0$时，$z_{j_01}=a$，$z_{j_02}=a$是$f(z)=0$的一对实根，$z_{j_01}=a\notin\overline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a\notin\overline{B_a^*}$。不妨设$z_{j_01}=a$ ($z_{j_02}=a$)是$f(z)=0$的l重根，则$l\geq 2$，于是l为偶数时，记$l^*=l$；l为奇数时，记$l^*=l-1$。令$\overline{B_a^{*\#}}$包含$\overline{B_a^*}$的一切元素，$z_{j_01}=a$ ($z_{j_02}=a$)是$\overline{B_a^{*\#}}$的l^*重元素其中l^*为≥ 2的偶数，$z_{j_01}=a$和$z_{j_02}=a$是$\overline{B_a^{*\#}}$的一对元素，于是找到根集合$\overline{B_a^{*\#}}$，使$\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$且$\overline{B_a^*}\neq\overline{B_a^{*\#}}$，$\overline{B_a^{*\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于点$a$成对普通对称的根集合。但这与$\overline{B_a^*}$是根全集矛盾。

因此，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$。】

推论 1 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\overline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的根集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$是$f(z)=0$的一对复根，$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\overline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\overline{B_a^*}$，则$\overline{B_a^*}$还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$\overline{B_a^*}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的根全集，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\notin\overline{B_a^*}$且$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\notin\overline{B_a^*}$，则$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}$不是$f(z)=0$的一对复根。

证明 由性质 6 即得。】

下面性质 7 及推论的证明方法与§4 性质 7 及推论相同予以省略。

性质 7 设$a\in R$，$\overline{B_a^*}$和$\overline{B_a^{*\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的二个根集，其中$\overline{B_a^*}$为根全集，则$\overline{B_a^{*\#}}\subset\overline{B_a^*}$。

推论 设$a\in R$，若$\overline{B_a^*}$和$\overline{B_a^{*\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对普通对称的二个根全集，则$\overline{B_a^*}=\overline{B_a^{*\#}}$。

例 2 设$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集为B_a^*，成对单层对称的根全集为$\underline{B_a^*}$，成对普通对称的根全集为$\overline{B_a^*}$，若$z_{j_01}=a+iy_{j_0}$，

$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \overline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \overline{B_a^*}$。

例 3 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，l^* 为 ≥ 2 的偶数，B_a^* 和 $\overline{B_a^*}$ 分别是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集合和成对普通对称的根集合，假如 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，满足：1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*\Rightarrow$ $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(\geq l)\in \overline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(\geq l)\in \overline{B_a^*}$；2) $y_{j_0}=0$ 时，$a=z_{j_0 1}(l^*)\in B_a^*$（$a=z_{j_0 2}(l^*)\in B_a^*$）$\Rightarrow$ $a=z_{j_0 1}(l^*)\in \overline{B_a^*}$（$a=z_{j_0 2}(l^*)\in \overline{B_a^*}$），则 B_a^* 是 $\overline{B_a^*}$ 的子集，即 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$。反过来，假如 $\forall$ $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \overline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \overline{B_a^*}$，满足：1) $y_{j_0}\neq 0$ 时，$a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in \overline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in \overline{B_a^*}\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*$；2) $y_{j_0}=0$ 时，$a=z_{j_0 1}(l^*)\in \overline{B_a^*}$（$a=z_{j_0 2}(l^*)\in \overline{B_a^*}$）$\Rightarrow$ $a=z_{j_0 1}(l^*)\in B_a^*$（$a=z_{j_0 2}(l^*)\in B_a^*$），则 $\overline{B_a^*}$ 是 B_a^* 的子集，即 $\overline{B_a^*}\subset B_a^*$。当且仅当 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$ 且 $\overline{B_a^*}\subset B_a^*$ 时，$B_a^*=\overline{B_a^*}$；当且仅当 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$ 且 $B_a^*\neq \overline{B_a^*}$ 时，B_a^* 是 $\overline{B_a^*}$ 的真子集。

性质 设 $a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根集合 B_a^* 和成对普通对称的根集合 $\overline{B_a^*}$ 的元素个数分别为 $2K^*$，$\overline{K^*}$。1)若 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$，则 $2K^*\leq \overline{K^*}$；若 $B_a^*=\overline{B_a^*}$，则 $2K^*=\overline{K^*}$；若 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$ 且 $B_a^*\neq \overline{B_a^*}$，则 $2K^*<\overline{K^*}$；若 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$，$2K^*=\overline{K^*}$，则 $B_a^*=\overline{B_a^*}$。2)若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，且 $B_a^*\subset \overline{B_a^*}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \overline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in \overline{B_a^*}$。

定理 1 设整数 $n\geq 2$，$a\in R$，$1\leq \underline{K^*}\leq \left[\dfrac{n}{2}\right]$，集合

$$\underline{B_a^*}=\left\{z_{j1}=a+iy_j, z_{j2}=a-iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K^*}\right\}$$

是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a^*}$ 用§6 方法生成的 B_a^* 的元素对数为 K^*，利用 $\underline{B_a^*}$ 用本节方法定义的 $\overline{B_a^*}$ 的元素个数为 $\overline{K^*}$，$y_{j_0}\in C$，则 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集，而且 1) $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in \underline{B_a^*}$，

$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$ 的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$；2) $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的关于点 a 成对普通对称的根全集；3) $\underline{B_a^*}\subset B_a^*\subset\overline{B_a^*}$，$2\underline{K^*}\le 2K^*\le\overline{K^*}$ 。

证明 根据§6 定理 3，则 B_a^* 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的根全集；由题设，则 $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根集，而且

1)必要性显然，证充分性。若 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由§6 性质 6 则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$。故充分性成立。

2)用反证法：假设 $\overline{B_a^*}$ 还不是根全集，那么一定存在 $\overline{B_a^{*\#}}$，使 $\overline{B_a^*}\subset\overline{B_a^{*\#}}$ 且 $\overline{B_a^*}\ne\overline{B_a^{*\#}}$，$\overline{B_a^{*\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根集，由性质 3 推论 3，则 $\overline{B_a^{*\#}}$ 至少有一对元素不属于 $\overline{B_a^*}$，设为 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$，其中 $y_{j_0}\in C$，由性质 4 则有 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^{*\#}}$ 且 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin\overline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin\overline{B_a^*}$，$f(z_{j_0 1})=f(a+iy_{j_0})=0$，$f(z_{j_0 2})=f(a-iy_{j_0})=0$ 。

特别当 $y_{j_0}=0$ 时，$z_{j_0 1}=a\in\overline{B_a^{*\#}}$，$z_{j_0 1}=a\in\overline{B_a^{*\#}}$，故 a 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，由 1) 则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\notin\underline{B_a^*}$，由§6 性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a^*}$ 还不是根全集，矛盾。所以 $\overline{B_a^*}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对普通对称的根全集。

3)假设 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，由§6 知即 $\forall\ z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$ 且 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$，则 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根，于是① $y_{j_0}\ne 0$ 时，不妨设 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\ge 1$，$l_2\ge 1$。记 $l=\min(l_1,l_2)$，则有 $l_1\ge l\ge 1$，$l_2\ge l\ge 1$。由 B_a^* 生成法，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 B_a^* 的 l 重元素，即 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_0 2}(l)\in B_a^*$。由 $\overline{B_a^*}$ 定义法，$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 分别是 $\overline{B_a^*}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，因此 $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}$ 都是 $\overline{B_a^*}$ 的 l 重以上（含 l 重）元素，即 $a+iy_{j_0}=z_{j_0 1}(\ge l)\in\overline{B_a^*}$，

$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(\geq l)\in\overline{B_a^*}$。于是由

$a+iy_{j_0}=z_{j_01}(l)\in B_a^*$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(l)\in B_a^*\Rightarrow a+iy_{j_0}=z_{j_01}(\geq l)\in\overline{B_a^*}$，$a-iy_{j_0}=z_{j_02}(\geq l)\in\overline{B_a^*}$。

② $y_{j_0}=0$时，$z_{j_01}=a\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a\in\underline{B_a^*}$，不妨设$z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是$f(z)=0$的$l$重根，则$l\geq 2$，于是$l$为偶数时，记$l^*=l$；$l$为奇数时，记$l^*=l-1$，则$l^*$为$\geq 2$的偶数。由$B_a^*$生成法，则$z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是$B_a^*$的$l^*$重元素，即$a=z_{j_01}(l^*)\in B_a^*$（$a=z_{j_02}(l^*)\in B_a^*$）。由$\overline{B_a^*}$定义法，则$z_{j_01}=a$（$z_{j_02}=a$）是$\overline{B_a^*}$的$l^*$重元素，即$a=z_{j_01}(l^*)\in\overline{B_a^*}$（$a=z_{j_02}(l^*)\in\overline{B_a^*}$）。于是由$a=z_{j_01}(l^*)\in B_a^*$（$a=z_{j_02}(l^*)\in B_a^*$）$\Rightarrow a=z_{j_01}(l^*)\in\overline{B_a^*}$（$a=z_{j_02}(l^*)\in\overline{B_a^*}$）。

所以$B_a^*\subset\overline{B_a^*}$。由§6 定理 3，则$\underline{B_a^*}\subset B_a^*$，故$\underline{B_a^*}\subset B_a^*\subset\overline{B_a^*}$。又$\underline{B_a^*}$，$B_a^*$，$\overline{B_a^*}$的元素个数分别为$2\underline{K^*}$，$2K^*$，$\overline{K^*}$，于是有$2\underline{K^*}\leq 2K^*\leq\overline{K^*}$。】

定理 2 设$\deg f(z)\geq 2$，$a\in R$，$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集$\underline{B_a^*}$，成对严格对称的根全集B_a^*，成对普通对称的根全集$\overline{B_a^*}$的元素个数分别为$2\underline{K^*}$，$2K^*$，$\overline{K^*}$，则$\underline{B_a^*}\subset B_a^*\subset\overline{B_a^*}$，$2\underline{K^*}\leq 2K^*\leq\overline{K^*}$，其中$B_a^*$和$\overline{B_a^*}$可看作是利用$\underline{B_a^*}$分别用§6方法生成和用本节方法定义。

证明 由题设不妨假设利用$\underline{B_a^*}$用§6 方法生成的$B_a^{*\#}$的元素个数为$2K^{*\#}$，利用$\underline{B_a^*}$用本节方法定义的$\overline{B_a^{*\#}}$的元素个数为$\overline{K^{*\#}}$，根据定理 1，则$B_a^{*\#}$和$\overline{B_a^{*\#}}$分别是$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的根全集和成对普通对称的根全集，而且

$$\underline{B_a^*}\subset B_a^{*\#}\subset\overline{B_a^{*\#}},\quad 2\underline{K^*}\leq 2K^{*\#}\leq\overline{K^{*\#}}。$$

由§4 性质 7 推论，则$B_a^*=B_a^{*\#}$，于是$2K^*=2K^{*\#}$；由性质 7 推论，则$\overline{B_a^*}=\overline{B_a^{*\#}}$，于是$\overline{K^*}=\overline{K^{*\#}}$，所以$\underline{B_a^*}\subset B_a^*\subset\overline{B_a^*}$，$2\underline{K^*}\leq 2K^*\leq\overline{K^*}$，于是命题成立。】

推论 设$\deg f(z)\geq 2$，$a\in R$，$y_{j_0}\in C$，$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集为$\underline{B_a^*}$，成对严格对称的根全集为B_a^*，成对普通对称的根全集为$\overline{B_a^*}$，则

1) $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$；

2) $z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\underline{B_a^*}$的充要条件是：$z_{j_01}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_02}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$；

3) $z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in B_a^*$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in B_a^*$的充要条件是：$z_{j_0 1}=a+iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$，$z_{j_0 2}=a-iy_{j_0}\in\overline{B_a^*}$。

证明 由题意根据定理 2，B_a^*和$\overline{B_a^*}$可看作是利用$\underline{B_a^*}$分别用§6 方法生成和用本节方法定义，于是 1)由§6 定理 3 即得；2)由定理 1 即得；3)由 1)和 2)即得。】

定理 3 设$\deg f(z)\ge 2$，$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\ne 0$，l_{j1},l_{j2},L_*均为正整数，l为非负整数，$f(z)=0$在z平面上关于点a成对单层对称的根全集$\underline{B_a^*}$，成对严格对称的根全集B_a^*，成对普通对称的根全集$\overline{B_a^*}$的元素个数分别为$2\underline{K^*}$，$2K^*$，$\overline{K^*}$；$f(z)=0$在z平面上关于点a成对严格对称的非a根全集$B_@^*$的元素对数为k；$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有各不相同的根，其中$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$分别是$f(z)=0$在的l_{j1}重和l_{j2}重根，记$l_j=\min(l_{j1},l_{j2})$。如果$z=a$是$f(z)=0$的l重根，那么

1) $l\ge 2$时，有$\underline{K^*}=1+s$，其中

l为偶数时，$2K^*=l+2\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中$k=\sum_{j=1}^{s}l_j$)，$\overline{K^*}=l+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$；

l为奇数时，$2K^*=(l-1)+2\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中$k=\sum_{j=1}^{s}l_j$)，$\overline{K^*}=(l-1)+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$。

2) $l=0$或1时，有$\underline{K^*}=s$，$K^*=\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中$k=\sum_{j=1}^{s}l_j$)，$\overline{K^*}=\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$。

3)若$x=a$是$M(x)=0$的L_*重根，则 $L_*=\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$，且$\overline{K^*}\le 2L_*$。

证明 由题设则$M(a)=0$，根据定理 2，则B_a^*和$\overline{B_a^*}$可看作是利用$\underline{B_a^*}$分别用§6 方法生成和用本节方法定义。由于$z=a$是$f(z)=0$的l重根($l\ge 0$)，当l为≥ 0的偶数时，记$l^*=l$；当l为奇数时，记$l^*=l-1$，由§3 定理 9 则$z=a$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l^*$重根，其中$l^*$为$\ge 0$的偶数。又$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$P\left((z-a)^2\right)=0$在z平面上的所有各不相同的根，而$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$，于是

1) $l\ge 2$时，l^*为≥ 2的偶数；$z_1=a$，$z_2=a$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$

是 $F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根，由§6 定理 1 推论 1，则它们是 $\underline{B_a^*}$ 的所有元素，故 $\underline{B_a^*}$ 的元素对数 $\underline{K^*}=1+s$ 。

由题设 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，且 $l_{j1}\ge 1$，$l_{j2}\ge 1$，记 $l_j=\min(l_{j1},l_{j2})$，则 $l_j\ge 1$。由根全集 B_a^* 生成法，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a-iy_j$ 都是 B_a^* 的 l_j 重元素 $(j=1,2,\cdots,s)$， $z_1=a$（$z_2=a$）是 B_a^* 的 l^* 重元素。故 B_a^* 的元素个数 $2K^*=l^*+2\sum_{j=1}^{s}l_j$，其中 l 为偶数时，$2K^*=l+2\sum_{j=1}^{s}l_j$；$l$ 为奇数时，$2K^*=(l-1)+2\sum_{j=1}^{s}l_j$ 。

由根全集 B_a^* 与非 a 根全集 $B_@^*$ 的关系性质，则

$$B_a^*=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l^*}\cup B_@^*，\ 且\ 2K^*=l^*+2k，\ 于是\ k=\sum_{j=1}^{s}l_j\ 。$$

由根全集 $\overline{B_a^*}$ 定义法，则 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ 分别是 $\overline{B_a^*}$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重元素 $(j=1,2,\cdots,s)$，$z_1=a$（$z_2=a$）是 $\overline{B_a^*}$ 的 l^* 重元素。故 $\overline{B_a^*}$ 的元素个数 $\overline{K^*}=l^*+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$，其中 l 为偶数时， $\overline{K^*}=l+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$； l 为奇数时， $\overline{K^*}=(l-1)+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$。

2) $l=0$ 或 1 时， $l^*=0$； $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F^*_{m^*}\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对根，由§6 定理 1 推论 1，则它们是 $\underline{B_a^*}$ 的所有元素，故 $\underline{B_a^*}$ 的元素对数 $\underline{K^*}=s$ 。

接下来与 1)同理可证得 $K^*=\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中 $k=\sum_{j=1}^{s}l_j$)， $\overline{K^*}=\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$。

3)对于 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的任意一对非 a 根 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a-iy_0$ (其中 $y_0\in C$ 且 $y_0\ne 0$)，由§6 性质 6，则 $z_1=a+iy_0\in\underline{B_a^*}$， $z_2=a-iy_0\in\underline{B_a^*}$ 。于是无论 $l\ge 2$ 还是 $l=0$ 或 1， $\underline{B_a^*}$ 中元素 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 就是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对非 a 根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a-iy_j$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根。若 $x=a$ 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，由第四章定理 17 推论 2，则

$$L_* = \frac{l(l-1)}{2} + \sum_{j=1}^{s} l_{j1} l_{j2}$$

下面证明 $\overline{K^*} \le 2L_*$。由于 $l_{j1} \ge 1$，$l_{j2} \ge 1$，则 $l_{j1}(l_{j2}-1)+(l_{j1}-1)l_{j2} \ge 0$，故 $l_{j1}+l_{j2} \le 2l_{j1}l_{j2}$ $(j=1,2,\cdots,s)$。于是① $l \ge 2$ 时，$l(l-2) \ge 0$，$l-1 < l \le l(l-1)$，则

l 为偶数时，$\overline{K^*} = l + \sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2}) \le l(l-1) + 2\sum_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2} = 2L_*$；

l 为奇数时，$\overline{K^*} = (l-1) + \sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2}) < l(l-1) + 2\sum_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2} = 2L_*$。

② $l=0$ 或 1 时，$\overline{K^*} = \sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2}) \le 2\sum_{j=1}^{s} l_{j1}l_{j2} = 2L_*$。总之，$\overline{K^*} \le 2L_*$。】

设 $a \in R$，$y_j \in C$ 且 $y_j \ne 0$，若 $z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，则由 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right) = a_{m^*0}(z-a)^{l^*} P\left((z-a)^2\right)$ 可知，它们也是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对非 a 根，再由定理 3 的证明可知，它们还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为中点的所有各不相同的成对非 a 根。

定理 4 设 $\deg\ f(z) \ge 2$，$a \in R$，L_* 为正整数，$x=a$ 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集 $\underline{B_a^*}$，成对严格对称的根全集 B_a^*，成对普通对称的根全集 $\overline{B_a^*}$ 的元素个数分别为 $2\underline{K^*}$，$2K^*$，$\overline{K^*}$，若 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$，则

$$2\underline{K^*} = 2K^* = \overline{K^*} = 2L_*，\quad \underline{B_a^*} = B_a^* = \overline{B_a^*}。$$

于是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根，也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根，还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对(普通)对称的全部根。

证明 由题意根据定理 2，则 $\underline{B_a^*} \subset B_a^* \subset \overline{B_a^*}$，$2\underline{K^*} \le 2K^* \le \overline{K^*}$。

不妨假设 $z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根($y_j \in C$ 且 $y_j \ne 0$)，其中 $z_{j1} = a + iy_j$，$z_{j2} = a - iy_j$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，记 $l_j = \min(l_{j1}, l_{j2})$，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根($l \ge 0$)，由定理 3，则

1) $l \ge 2$ 时，有 $\underline{K^*} = 1 + s$，其中

l 为偶数时， $2K^* = l + 2\sum_{j=1}^{s} l_j$ ， $\overline{K^*} = l + \sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1} + l_{j2}\right)$；

l 为奇数时， $2K^* = \left(l-1\right) + 2\sum_{j=1}^{s} l_j$ ， $\overline{K^*} = \left(l-1\right) + \sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1} + l_{j2}\right)$。

2) $l = 0$ 或 1 时，有 $\underline{K^*} = s$ ， $K^* = \sum_{j=1}^{s} l_j$ ， $\overline{K^*} = \sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1} + l_{j2}\right)$。

3)由于 $x = a$ 是 $M\left(x\right) = 0$ 的 L_* 重根，则 $L_* = \frac{l\left(l-1\right)}{2} + \sum_{j=1}^{s} l_{j1} l_{j2}$ ，且 $\overline{K^*} \le 2L_*$ 。

若 $\left(f\left(z\right), f'\left(z\right)\right) = 1$ ，则 $l = 0$ 或 1 ， $l_{j1} = l_{j2} = 1$ ， $l_j = \min\left(l_{j1}, l_{j2}\right) = 1$ ，于是 $\underline{K^*} = s$ ， $K^* = \sum_{j=1}^{s} l_j = s$ ， $\overline{K^*} = \sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1} + l_{j2}\right) = 2s$ ， $L_* = 0 + \sum_{j=1}^{s} l_{j1} l_{j2} = s$ ，因此 $2\underline{K^*} = 2K^* = \overline{K^*} = 2L_* = 2s$ ，又 $\underline{B_a^*} \subset B_a^* \subset \overline{B_a^*}$ ，故 $\underline{B_a^*} = B_a^* = \overline{B_a^*}$ 。再由§4，§6，§7 性质 5 即得。】

定理 5 设 $\deg f\left(z\right) \ge 2$ ， $\left(f\left(z\right), f'\left(z\right)\right) = 1$ ， $a \in R$ ， L_* 为正整数， $x = a$ 是 $M\left(x\right) = 0$ 的 L_* 重根， $y_j \in C$ ，若 y_j^2 $\left(j = 1,2,\cdots,K^*\right)$是方程 $\left(4\right)^{*a}$ 的所有复根(或所有各不相同的复根)，则 $K^* = L_*$ ，而 $z_{j1} = a + iy_j$ ， $z_{j2} = a - iy_j$ $\left(j = 1,2,\cdots,K^*\right)$既是 $f\left(z\right) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根，也是 $f\left(z\right) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根，还是 $f\left(z\right) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对(普通)对称的全部根。

证明 由题设不妨设 $f\left(z\right) = 0$ 在 z 平面上关于点 a 成对单层对称的根全集 $\underline{B_a^*}$ ，成对严格对称的根全集 B_a^* ，成对普通对称的根全集 $\overline{B_a^*}$ 的元素个数分别为 $2\underline{K^*}$ ， $2K^*$ ， $\overline{K^*}$ ，根据定理 4 和§4 (或§6)定理 2 即得。】

推论 1 设 $\deg f\left(z\right) \ge 2$ ， $\left(f\left(z\right), f'\left(z\right)\right) = 1$ ， $a \in R$ ， $M\left(a\right) = 0$ ， $y_j \in C$ ，则 y_j^2 $\left(j = 1,2,\cdots,K^*\right)$ 是 $\left(4\right)^{*a}$ 的所有复根的充要条件是： y_j^2 $\left(j = 1,2,\cdots,K^*\right)$是 $\left(4\right)^{*a}$ 的所有各不相同的复根。

证明 由题设不妨设 $x = a$ 是 $M\left(x\right) = 0$ 的 L_* 重根，则 L_* 为正整数，根据定理 5，必要性和充分性可分别再由§6 和§4 定理 2 即得。】

推论 2 设 $\deg f\left(z\right) \ge 2$ ， $\left(f\left(z\right), f'\left(z\right)\right) = 1$ ， $a \in R$ ， $M\left(a\right) = 0$ ，则 $\left(4\right)^{*a}$ 的所有复根各不相等。

证明 由推论 1 即得。】

第六章
方程间的多项式关系式以及实根号运算

§1 方程间的多项式关系式

设 $f(z)$ 为次数 $n\geq 2$ 的实系数多项式，这一节探讨 $f(x)$ 与结式 $Q(x)$，$M(x)$ 三者之间的具体关系式。我们知道：$res(f_0, f_1, y)=Q(x)$，$res(f_0^*, f_1^*, y^2)=M(x)$，如果将方程组 $(2)^*$ 视为关于 x，y 的二元方程组，并将 $f_0^*(x,y^2)$，$f_1^*(x,y^2)$ 关于 y 的结式，记为 $res(f_0^*, f_1^*, y)=M_1(x)$，那么 $M_1(x)$ 与 $M(x)$ 之间，$M_1(x)$ 与 $Q(x)$ 之间又有怎样的关系式？

我们先做如下具体分析：

1. 当 $n=2$ 时，$M(x)=\begin{vmatrix}\dfrac{f^{'}(x)}{1!}\end{vmatrix}=f^{'}(x)$

$$M_1(x)=\begin{vmatrix}\dfrac{f^{'}(x)}{1!} & 0\\ 0 & \dfrac{f^{'}(x)}{1!}\end{vmatrix}=M(x)M(x)=M^2(x)$$

$$Q(x)=\begin{vmatrix}\dfrac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x)\\ \dfrac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0\\ 0 & \dfrac{f^{'}(x)}{1!} & 0\end{vmatrix}=-f(x)M_1(x)$$

于是有 $Q(x)=-f(x)M^2(x)$。

2. 当 $n=3$ 时，$M(x)=\begin{vmatrix}\dfrac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\dfrac{f^{'}(x)}{1!}\\ \dfrac{f^{(2)}(x)}{2!} & -f(x)\end{vmatrix}$

$$M_1(x)=\begin{vmatrix}\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0\\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!}\\ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x) & 0\\ 0 & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x)\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!}\\ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & -f(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & -f(x)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0\\ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & -f(x) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!}\\ 0 & 0 & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & -f(x)\end{vmatrix}=M(x)M(x)=M^2(x)$$

$$Q(x)=\begin{vmatrix}\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0\\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0\\ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x) & 0 & 0\\ 0 & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x) & 0\\ 0 & 0 & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x)\end{vmatrix}$$

$$=-f(x)\begin{vmatrix}\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0\\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!}\\ \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x) & 0\\ 0 & \frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & -f(x)\end{vmatrix}=-f(x)M_1(x)$$

故 $Q(x)=-f(x)M^2(x)$。

3. 当 $n=4$ 时，$M(x)=\begin{vmatrix}\frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x)\\ \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0\\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!}\end{vmatrix}$

$$M_1(x)=\begin{vmatrix} \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) & 0 \\ 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) \\ \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & 0 & f(x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) \\ \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f'(x)}{1!} \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{2}(x)}{2!} & f(x) \\ \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 \\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f'(x)}{1!} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{f^{'}(x)}{1!} \end{vmatrix}$$

$$=M(x)M(x)=M^2(x)$$

$$Q(x)=\begin{vmatrix} \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) \\ \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & -\frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= f(x)M_1(x)$$

故 $Q(x)= f(x)M^2(x)$。

4. 当 $n=5$ 时， $M(x)=\begin{vmatrix} \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 \\ 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \frac{f^{'}(x)}{1!} \\ \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) & 0 \\ 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) \end{vmatrix}$

$$M_1(x)=\begin{vmatrix} \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & 0 & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & 0 & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & 0 & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & 0 & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & 0 & \frac{f^{'}(x)}{1!} \\ \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & 0 & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & 0 & f(x) \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \frac{f^{'}(x)}{1!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(5)}(x)}{5!} & -\frac{f^{(3)}(x)}{3!} & \frac{f^{'}(x)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{f^{(4)}(x)}{4!} & -\frac{f^{(2)}(x)}{2!} & f(x) \end{vmatrix}=M^2(x)$$

显然$Q(x)=f(x)M_1(x)$，故有$Q(x)=f(x)M^2(x)$。

通过分析归纳整理，可得出如下结论：

1. $M_1(x)=M^2(x)$。

2. $2n-1$级行列式$Q(x)$的第$2n-1$列的非零元素只有一个，它为$f(x)$或$-f(x)$，若用i和j分别代表该非零元素所在的行和列，则$j=2n-1$，而$i=n-1$或$i=2n-1$，而且

1) 当$n=4k$或$n=4k+1$时(其中$k\geq 1$)，第$2n-1$列的非零元素为$f(x)$，于是$Q(x)=(-1)^{i+j}f(x)M_1(x)$，其中$n=4k$时，$i=n-1$，$i+j=3n-2=12k-2$为偶数；$n=4k+1$时，$i=2n-1$，$i+j=4n-2$为偶数。故$Q(x)=f(x)M_1(x)$。

2) 当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时(其中 $k\geq 0$)，第 $2n-1$ 列的非零元素为 $-f(x)$，于是 $Q(x)=-(-1)^{i+j}f(x)M_1(x)$，其中 $n=4k+2$ 时，$i=n-1$，$i+j=3n-2=12k+4$ 为偶数；$n=4k+3$ 时，$i=2n-1$，$i+j=4n-2$ 为偶数。故 $Q(x)=-f(x)M_1(x)$。

3. 方程组(2)中 $f(x)$ 所带正负号即为 $Q(x)$ 第 $2n-1$ 列的非零元素 $f(x)$ 所带正负号。

总之，$Q(x)=\pm f(x)M^2(x)$，其正负号与方程组(2)中 $f(x)$ 所带正负号相同。

写成定理，则有

定理 1 设 $f(z)$ 的次数 $n\geq 2$，k 为非负整数，则

1) 当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时(其中 $k\geq 1$)，有 $Q(x)=f(x)M^2(x)$；

2) 当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时(其中 $k\geq 0$)，有 $Q(x)=-f(x)M^2(x)$。

总之，$Q(x)=\pm f(x)M^2(x)$，其正负号与方程组(2)中 $f(x)$ 所带正负号相同，当 $f(x)$ 带正号时，$Q(x)=f(x)M^2(x)$；当 $f(x)$ 带负号时，$Q(x)=-f(x)M^2(x)$。

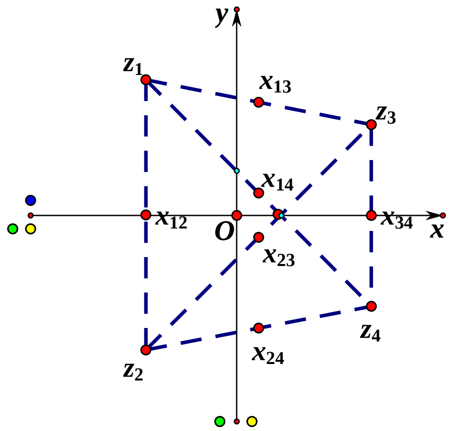
推论 1 设 $\deg f(z)\geq 2$，则 $Q(x)=\pm f(x)M^2(x)$，即

$$Q(x)=f(x)M^2(x) \text{或者} Q(x)=-f(x)M^2(x)。$$

证明 由定理 1 即得】

若将 $Q(x)=\pm f(x)M^2(x)$ 改写成 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，我们就可以在同一个 z 平面上讨论方程 $f(z)=0$，$Q(z)=0$，$M(z)=0$ 这三者根的相互关系。。

例 设四次实系数代数方程 $f(z)=0$ 没有重根，即 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$，不妨设 z_1，z_2，z_3，z_4 是 $f(z)=0$ 的所有复根，其中 $z_2=\overline{z_1}$，$z_4=\overline{z_3}$，x_{jh} 是 z_j 和 z_h 的中点 $(j<h)$。如图所示：



则 $f(z_j)=0$， $j=1,2,3,4$； $M(x_{jh})=0$， $1\le j<h, h=2,3,4$。

根据定理 1 推论 1，则 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，于是

$Q(z_j)=0$， $j=1,2,3,4$； $Q(x_{jh})=0$， $1\le j<h, h=2,3,4$

显然， $z=z_j\ (j=1,2,3,4)$ 既是 $f(z)=0$ 的单根，也是 $Q(z)=0$ 的单根； $f(x_{jh})\ne 0$，而 $z=x_{jh}$ 既是 $M(z)=0$ 的单根，又是 $Q(z)=0$ 的 2 重根。以点 x_{12} 为例：

记 $x_{12}=a$，则 $a\in R$， $f(a)\ne 0$， $z=a$ 不是 $f(z)=0$ 的根， 0 不是 $(4)^a$ 的根，同样 0 不是 $(4)^{*a}$ 的根；而 $z=a$ 既是 $M(z)=0$ 的 $L_*=1$ 重根，又是 $Q(z)=0$ 的 $L=2$ 重根，于是

1. $(4)^a$ 的次数 $K=L=2$，不妨设 y_{12}， $-y_{12}$ 是 $(4)^a$ 的所有复根，其中 $y_{12}\ne 0$，则 $z_1=a+iy_{12}$， $z_2=a-iy_{12}$ 既是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的全部根，也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的根，还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a (普通)对称的全部根。

2. $(4)^{*a}$ 关于 y^2 的次数 $K^*=L_*=1$，不妨设 y_{12}^2 是 $(4)^{*a}$ 的所有复根，其中 $y_{12}^2\ne 0$，则 $z_1=a+iy_{12}$， $z_2=a-iy_{12}$ 既是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对严格对称的全部根，也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 对称的全部各不相同的成对根，还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 成对(普通)对称的全部根。

设 $f(z)$ 的次数 ≥ 2，则称 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$ 为方程间的多项式关系式，因为它反映了原方程 $f(z)=0$ 与两个结式方程 $Q(z)=0$， $M(z)=0$ 的关系。由总根号性质，显然有

$$\sqrt{Q(\ )}=\sqrt{f(\ )}\cup\left(\overset{2}{\cup}\sqrt{M(\ )}\right)。$$

推论 2 设 $\deg f(z)\ge 2$， $x_0\in C$，若 $z=x_0$ 既是 $f(z)=0$ 的 l 重根，又是 $M(z)=0$ 的 L_* 重实根，则 $z=x_0$ 是 $Q(z)=0$ 的 $L=l+2L_*$ 重根。

证明 根据推论 1 则 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，于是命题成立。】

这一结论与第四章定理 17 推论 2 不谋而合。

定理 2 设 $\deg f(z)\ge 2$， $a\in R$， $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a (成对)严格对称的非 a 根的对数为 k，其中 $z=a$ 既是 $f(z)=0$ 的 l 重根，又是 $M(z)=0$ 的 L_* 重根，则 $k\le L_*$，其中当 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$ 时， $k=L_*$。

证明 由题意根据定理 1 推论 2，则 $z=a$ 是 $Q(z)=0$ 的 $L=l+2L_*$ 重根；不妨设 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 a 严格对称的根的个数为 K，则 $K=l+2k$。

由第三章§4 定理 2 推论，则 $(4)^a$ 的次数为 K，由第三章§2 定理 3，则 $K\le L$，于是 $l+2k\le l+2L_*$，故 $k\le L_*$，其中 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$ 时，$K=L$，于是 $k=L_*$。】

§2 方程间多项式关系式的实根号运算

本节讨论$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$的实根号运算，$f(z)$，$Q(z)$，$M(z)$均为实系数多项式，其中$f(z)$的次数≥ 2，$M(z)$的次数≥ 1。不妨设$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个实系数最大公因式，$x\in R$，以$d(z),d^{'}(z)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点x的变号数分别记为V_x^d和U_x^d，其中$d(z)$是非零常数时，规定$U_x^d=V_x^d=0$。

若$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，则用$V_{(\alpha,\beta)}$表示由$f(z)=0$在(α,β)内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为$V_\alpha-V_\beta$；用$U_{(\alpha,\beta)}$表示由$f(z)=0$在(α,β)内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为$U_\alpha-U_\beta$。若$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则用$V_{(\alpha,\beta)}^Q$表示由$Q(z)=0$在(α,β)内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为$V_\alpha^Q-V_\beta^Q$；用$U_{(\alpha,\beta)}^Q$表示由$Q(z)=0$在(α,β)内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为$U_\alpha^Q-U_\beta^Q$。若$\alpha<\beta$，$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$，则用$V_{(\alpha,\beta)}^M$表示由$M(z)=0$在(α,β)内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为$V_\alpha^M-V_\beta^M$；用$U_{(\alpha,\beta)}^M$表示由$M(z)=0$在(α,β)内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为$U_\alpha^M-U_\beta^M$。若$\alpha<\beta$，$d(\alpha)\neq 0$，$d(\beta)\neq 0$，则用$V_{(\alpha,\beta)}^d$表示由$d(z)=0$在(α,β)内的所有各不相同的根组成的集合，其元素个数为$V_\alpha^d-V_\beta^d$；用$U_{(\alpha,\beta)}^d$表示由$d(z)=0$在(α,β)内的所有根(含重根)组成的集合，其元素个数为$U_\alpha^d-U_\beta^d$。

$V_{(\alpha,\beta)},V_{(\alpha,\beta)}^Q,V_{(\alpha,\beta)}^M,V_{(\alpha,\beta)}^d$都是不允许有重元的 Cantor 集合；$U_{(\alpha,\beta)},U_{(\alpha,\beta)}^Q$，$U_{(\alpha,\beta)}^M$，$U_{(\alpha,\beta)}^d$都是允许有重元的有限集合，并且元的重数必须与根的重数相等。

下面的定理及其推论根据第一章§4 定理 3 至定理 7 及其推论即得。

定理 1 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个最大公因式，若$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$；$d(\alpha)\neq 0$，$d(\beta)\neq 0$。于是

1) $\boldsymbol{V}^{Q}_{(\alpha,\beta)}=\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}\cup\boldsymbol{V}^{M}_{(\alpha,\beta)}$，$\boldsymbol{V}_{(\alpha,\beta)}\cap\boldsymbol{V}^{M}_{(\alpha,\beta)}=\boldsymbol{V}^{d}_{(\alpha,\beta)}$，

$$V_\alpha^Q-V_\beta^Q=\left(V_\alpha-V_\beta\right)+\left(V_\alpha^M-V_\beta^M\right)-\left(V_\alpha^d-V_\beta^d\right)；$$

2) $\boldsymbol{U}^{Q}_{(\alpha,\beta)}=\boldsymbol{U}_{(\alpha,\beta)}\cup\boldsymbol{U}^{M}_{(\alpha,\beta)}\cup\boldsymbol{U}^{M}_{(\alpha,\beta)}$，$U_\alpha^Q-U_\beta^Q=\left(U_\alpha-U_\beta\right)+2\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$。

推论 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，若$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则有

1) $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\le\left(V_\alpha-V_\beta\right)+\left(V_\alpha^M-V_\beta^M\right)$；2) $U_\alpha^Q-U_\beta^Q=\left(U_\alpha-U_\beta\right)+2\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$。

定理 2 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个最大公因式，若$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则有

1) $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\ge V_\alpha-V_\beta\ge V_\alpha^d-V_\beta^d\ge 0$；2) $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\ge V_\alpha^M-V_\beta^M\ge V_\alpha^d-V_\beta^d\ge 0$；

3) $U_\alpha^Q-U_\beta^Q\ge U_\alpha-U_\beta\ge U_\alpha^d-U_\beta^d\ge 0$；4) $U_\alpha^Q-U_\beta^Q\ge 2\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)\ge 2\left(U_\alpha^d-U_\beta^d\right)\ge 0$。

推论 1 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，若$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则有

1) $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\ge V_\alpha-V_\beta\ge 0$；2) $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\ge V_\alpha^M-V_\beta^M\ge 0$；

3) $U_\alpha^Q-U_\beta^Q\ge U_\alpha-U_\beta\ge 0$；4) $U_\alpha^Q-U_\beta^Q\ge 2\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)\ge 0$。

推论 2 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$；$1\ge V_\alpha-V_\beta\ge 0$，$1\ge V_\alpha^M-V_\beta^M\ge 0$，其中

1) $V_\alpha-V_\beta=1$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$；

2) $V_\alpha^M-V_\beta^M=1$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{M(\ )}$；

3) $V_\alpha-V_\beta=V_\alpha^M-V_\beta^M=1$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{M(\ )}$。

推论 3 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则$\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$；$1\ge V_\alpha-V_\beta\ge 0$，$1\ge V_\alpha^M-V_\beta^M\ge 0$，于是

1) $V_\alpha-V_\beta=1$的充要条件是$f(x_0)=0$；2) $V_\alpha^M-V_\beta^M=1$的充要条件是$M(x_0)=0$。

例 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则

1) $V_\alpha-V_\beta=0$的充要条件是$f(x_0)\neq 0$；2) $V_\alpha^M-V_\beta^M=0$的充要条件是$M(x_0)\neq 0$。

定理 3 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个最大公因式，若$\alpha<\beta$，

$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则 1. $V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 0$ 的充要条件是：$V_\alpha - V_\beta = V_\alpha^M - V_\beta^M = V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$；2. 当 $V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1$ 时，$1 \geq V_\alpha^d - V_\beta^d \geq 0$，其中

1) $V_\alpha^d - V_\beta^d = 1$ 的充要条件是：$V_\alpha - V_\beta = 1$，$V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$；

2) $V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$ 的充要条件是：$V_\alpha - V_\beta$ 和 $V_\alpha^M - V_\beta^M$ 一个为 1，另一个为 0。

推论 1 设 $Q(z) = \pm f(z)M^2(z)$，$\alpha < \beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则 $V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 0$ 的充要条件是：$V_\alpha - V_\beta = V_\alpha^M - V_\beta^M = 0$。

推论 2 设 $Q(z) = \pm f(z)M^2(z)$，若 $\alpha < \beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，$V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1$，则 $1 \geq V_\alpha - V_\beta \geq 0$，$1 \geq V_\alpha^M - V_\beta^M \geq 0$，而且 $V_\alpha - V_\beta = 1$ 或 $V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$。

推论 3 设 $Q(z) = \pm f(z)M^2(z)$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$z = x_0$ 分别是 $Q(z)=0$ 的 L 重根，$f(z)=0$ 的 l 重根，$M(z)=0$ 的 L_* 重根，则 $1 \geq V_\alpha - V_\beta \geq 0$，$1 \geq V_\alpha^M - V_\beta^M \geq 0$，而且 $V_\alpha - V_\beta = 1$ 或 $V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$，于是

1) $V_\alpha - V_\beta = V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$ 时，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$ 且 $L = l + 2L_*$；

2) 当 $V_\alpha - V_\beta = 1$，$V_\alpha^M - V_\beta^M = 0$ 时，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，且 $L_* = 0$，$L = l = 1$；

3) 当 $V_\alpha - V_\beta = 0$，$V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$ 时，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，且 $l = 0$，$L = 2L_*$；

定理 4 设 $Q(z) = \pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$ 是 $f(z), M(z)$ 的一个最大公因式，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$z = x_0$ 分别是 $Q(z)=0$ 的 L 重根，$f(z)=0$ 的 l 重根，$M(z)=0$ 的 L_* 重根，$d(z)=0$ 的 l_d 重根，则 $l_d = \min(l, L_*)$，于是

1. 当 $V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$ 时，$V_\alpha - V_\beta$ 和 $V_\alpha^M - V_\beta^M$ 一个为 1，另一个为 0，其中

1) 当 $V_\alpha - V_\beta = 1$，$V_\alpha^M - V_\beta^M = 0$ 时，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，且 $L_* = 0$，$L = l = 1$；

2) 当 $V_\alpha - V_\beta = 0$，$V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$ 时，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，且 $l = 0$，$L = 2L_*$。

2. 当 $V_\alpha^d - V_\beta^d = 1$ 时，$V_\alpha - V_\beta = 1$，$V_\alpha^M - V_\beta^M = 1$，有

$$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )} = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}，且 L = l + 2L_*；$$

将定理 1，定理 2 和定理 3 中的条件"若 $\alpha < \beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$"换成"若

$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$”，则命题依然成立，原因是由$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$可以推出$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$。

定理5 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个最大公因式，$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$，则

1. 当$V_\alpha-V_\beta=V_\alpha^M-V_\beta^M=V_\alpha^d-V_\beta^d=1$时，$V_\alpha^Q-V_\beta^Q=1$，若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，则

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}。$$

2. 当$V_\alpha-V_\beta$和$V_\alpha^M-V_\beta^M$一个为1，另一个为0时，$V_\alpha^d-V_\beta^d=0$，$V_\alpha^Q-V_\beta^Q=1$，其中 1) 若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，则$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$；

   2) 若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，则$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$。

例 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个最大公因式，若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，则$\alpha<x_0<\beta$，$d(x_0)=0$，$f(x_0)=0$且$M(x_0)=0$，$Q(x_0)=0$。

用中点变号数分割法对$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$继续计算可得$x_0={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{d(\ )}$，其中

$$x_0\in(\alpha_N,\beta_N)\subset(\alpha_{N-1},\beta_{N-1})\subset\cdots\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta),\quad \beta_N-\alpha_N=\frac{1}{2^N}(\beta-\alpha)。$$

于是由多项式函数连续性，在实轴上存在充分小的区间(α_N,β_N)，使得$d(x)=0$，$f(x)=0$，$M(x)=0$在该小区间内仅有根x_0，满足$f(\alpha_N)\neq 0$，$f(\beta_N)\neq 0$；$M(\alpha_N)\neq 0$，$M(\beta_N)\neq 0$，且$V_{\alpha_N}-V_{\beta_N}=V_{\alpha_N}^M-V_{\beta_N}^M=V_{\alpha_N}^d-V_{\beta_N}^d=1$。根据定理5就有$V_{\alpha_N}^Q-V_{\beta_N}^Q=1$，而且

$$x_0={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{d(\ )}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{M(\ )}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{Q(\ )}。$$

推论1 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是$f(z),M(z)$的一个最大公因式，若

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}，则 x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}，\quad x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}。$$

推论2 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，则$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$。

推论3 设$Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$\alpha<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$，于是

1) 若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，$V_\alpha^M-V_\beta^M=0$，则$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$；

2) 若$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，$V_\alpha-V_\beta=0$，则$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$。

§3 方程互素点与非互素点的进一步讨论

定理 1 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$a\in R$，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点的充要条件是：$f(a)=0$ 或 $M(a)=0$。

证明 由题意根据§1 定理 1 推论 1，则 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，故 $Q(a)=0$ 的充要条件是：$f(a)=0$ 或 $M(a)=0$。再由第三章§2 定理 2 推论 2 即得。】

定理 2 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$a\in R$，$f(a)\neq 0$，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点的充要条件是：$(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*(y^2)$ 关于 y^2 的次数 $K^*\geq 1$。

证明 由题意根据定理 1，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点的充要条件是：$M(a)=0$。再由第五章§2 定理 2 推论即得。】

定理 3 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$a\in R$，$M(a)\neq 0$，l 为非负整数，若 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=0$ 或 1，其中 1) $l=0$ 时，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有根；2) $l=1$ 时，$f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上只有一个单实根 $z=a$。

证明 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，假如 $l\geq 2$，则 $z_1=a$，$z_2=a$ 是 $f(z)=0$ 的一对实根，由第五章§2 定理 6 推论 1 和定理 2，则 0 是 $(4)^{*a}$ 的根，$M(a)=0$，矛盾。故 $l=0$ 或 1，于是 1) $l=0$ 时，$f(a)\neq 0$ 且 $M(a)\neq 0$，则 a 是 $f(z)=0$ 的互素点，再由第三章§2 定理 7 即得。2) $l=1$ 时，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的单实根。假如 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上有非 a 根，设它为 $z_1=a+iy_0$，其中 $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一对共轭根，由第五章§2 定理 6 推论 2 和定理 2，则 y_0^2 是 $(4)^{*a}$ 的正实根，$M(a)=0$，矛盾。所以，$f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上只有一个单实根 $z=a$。】

推论 1 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$a\in R$，$M(a)\neq 0$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有根或者只有一个单实根 $z=a$。

证明 由定理 3 即得。】

推论 2 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$a\in R$，$M(a)\neq 0$，$f(a)=0$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上只有一个单实根 $z=a$。

证明 由定理 3 即得。】

推论 3 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$a\in R$，若 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的单实根，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上只有一个单实根 $z=a$。

证明 根据§1 定理 1 推论 1，则 $Q(x)=\pm f(x)M^2(x)$。若 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的单实根，则 $M(a)\neq 0$， $f(a)=0$，再由推论 2 即得。】

第七章
方程同实部复根统一解法原理

§1 复根的实部点与非实部点

定义 设$a \in R$，$Q(a)=0$，则a是实系数代数方程$f(z)=0$的非互素点，施图姆序列$(3)^a$内$f_m(y)$的次数$K \geq 1$，当$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上有根时，称a是$f(z)=0$复根的一个实部点；当$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根时，称a是$f(z)=0$复根的一个非实部点。

若$a \in R$，$Q(a)=0$，则a是$f(z)=0$复根的实部点或者非实部点，二者必居其一。

定理 1 设$a \in R$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上至少有一个根。

证明 必要性显然，证充分性。若$f(z)=0$在直线$x=a$上至少有一个根，根据第三章§2 定理 6 推论 6 和定理 2，则$(4)^a$至少有一个实根，设它为y_0，则$Q(a)=0$，故a是$f(z)=0$复根的实部点。】

例 设$a \in R$，$f(a)=0$，则$z_0=a$就是$f(z)=0$在直线$x=a$上的根，由定理 1，则a是$f(z)=0$复根的实部点。

推论 1 设$a \in R$，若a是$f(z)=0$复根的非实部点，则$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根。

证明 由定理 1 即得。】

推论 2 设$a \in R$，$f(a)\neq 0$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上至少有一对共轭根。

证明 由题意则a不是$f(z)=0$的根，再根据定理 1 和$f(z)=0$根的性质即得。】

定理 2 设$a \in R$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$(4)^a$至少有一个实根。

证明 根据定理 1 和第三章§2 定理 6 推论 6 即得。】

推论 1 设$a \in R$，$Q(a)=0$，则a是$f(z)=0$复根的非实部点的充要条件是：$(4)^a$没有实根。

证明 由定理 2 即得。】

推论 2 设 $a \in R$， $f(a) \neq 0$，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是：$(4)^a$ 至少有一对非 0 实根。

证明 由题意根据第三章§2 定理 5，则 0 不是 $(4)^a$ 的根。再由定理 2 和 $(4)^a$ 根的性质即得。】

$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根均为以 a 为实部的同实部(复)根。由 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为实部的若干个同实部根组成的集合就称为 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为实部的一个同实部根集合。

显然，$f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)就是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合就称为 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为实部的同实部根全集。

定理 3 设 $a \in R$， $f(a) \neq 0$，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是：$(4)^{*a}$ 关于 y^2 至少有一个正实根。

证明 根据定理 1 推论 2 和第五章§2 定理 6 推论 2 即得。】

推论 设 $a \in R$，$f(a) \neq 0$，$M(a)=0$，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点的充要条件是：$(4)^{*a}$ 关于 y^2 没有正实根。

证明 由题设则 $Q(a)=0$，再由定理 3 即得。】

设 $a \in R$，$Q(a)=0$，若 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，则 $(4)^a$ 至少有一个实根。假设 y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $(4)^a$ 的所有实根(含重根)，根据第三章§3 定理 12 则 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)，其解法具有统一性，方法详见§2。令

$$B'_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in R, j=1,2,\cdots,K'\}$$

则集合 B'_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a 为实部的同实部根全集。

显然，$f(z)=0$ 在 z 平面上的一个以 a 为实部的同实部根全集与 $f(z)=0$ 复根的一个实部点 a 对应，于是又被称为是 $f(z)=0$ 复根的实部点 a 的同实部根全集。

若 $f(z)=0$ 的所有复根有 J 个各不相同的实部点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上就有 J 个各不相同的实部点的同实部根全集，其任意两个不相同实部点的同实部根全集的交集必为空集。

§2 同实部复根的统一解法

解法一： 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，则 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\ge 1$，写成规范形式

$$f_m(y)=y^l[a_{m0}y^{2k}-a_{m1}y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1}y^2+(-1)^k a_{mk}] \qquad (4)^a$$

其次数 $K=l+2k\ge 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\ne 0$，$a_{mk}\ne 0$，且 $a_{m0},a_{m1},\cdots,a_{mk}$ 均为实数。

作点 a 的以 $f_m(y),f_m^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 y $(y\in R)$ 的变号数分别记为 $V_y^{f_m}$ 和 $U_y^{f_m}$。于是 1. $V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=0$ 时，$(4)^a$ 没有实根，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有根。

2. $V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=k_1\ge 1$ 时，$(4)^a$ 共有 k_1 个各不相同的实根，a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点。这时，可在 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $(4)^a$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$，$[\varepsilon_2,\eta_2]$，$\cdots$，$[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\le\varepsilon_2<\eta_2\le\cdots\le\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}$，且 $f_m(\varepsilon_j)\ne 0$，$f_m(\eta_j)\ne 0$，$V_{\varepsilon_j}^{f_m}-V_{\eta_j}^{f_m}=1$，$j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $(4)^a$ 的 k_1 个各不相同的实根就可表示为：

$$y_j=\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{\left(a_{m0},0,-a_{m1},\cdots,(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1},0,(-1)^{k-1}a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

其中 y_j 是 $(4)^a$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}$ 重根。$(4)^a$ 的实根个数为

$$K'=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j$$

于是 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上的 k_1 个各不相同的根就可表示为：

$$z_j=a+i\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{\left(a_{m0},0,-a_{m1},\cdots,(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1},0,(-1)^{k}a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

由第三章§2 定理 9 推论 3，则 z_j 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}$ 重根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的个数为

$$K'=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j\ 。$$

说明：若 l 和 k 均为正整数，根据第一章§4 定理 4 推论 4，则当 $\varepsilon_{j_0}<0<\eta_{j_0}$ 时，

$$^{\lfloor\varepsilon_{j_0},\eta_{j_0}\rfloor}\sqrt{\left(a_{m0},0,-a_{m1},\cdots,(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1},0,(-1)^k a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)}={}^{\lfloor\varepsilon_{j_0},\beta_{j_0}\rfloor}\sqrt{(1,0)}=0\ ;$$

当$\eta_{j_0}<0$或$\varepsilon_{j_0}>0$时，

$$^{\lfloor\varepsilon_{j_0},\eta_{j_0}\rfloor}\sqrt{\left(a_{m0},0,-a_{m1},\cdots,(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1},0,(-1)^k a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)}$$

$$={}^{\lfloor\varepsilon_{j_0},\eta_{j_0}\rfloor}\sqrt{\left(a_{m0},0,-a_{m1},\cdots,(-1)^{k-1}a_{m\ \ k-1},0,(-1)^k a_{mk}\right)}\text{。}$$

这一解法的优点是便于作理论上的阐述，缺点是不能直观表达$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上共轭根以及$z=a$是$f(z)=0$的l重根。要克服这两个缺点，可用解法二。

解法二：设$a\in R$，$Q(a)=0$，则$(3)^a$内$f_m(y)$的次数$K\geq 1$，写成标准式

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^a$$

其次数$K=l+2k\geq 1$，其中l和k均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数，$k=0$时，$\lambda_k=\lambda_0=1$。根据第三章§3 定理 3 则有$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，其中$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^K f_m(y)=i^{l+2k}f_m(y)$，于是

$$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l[(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k]$$

0是$(4)^a$的l重根，$z_0=a$是$F_m(z-a)=0$的l重根，由第三章§2 定理 5 或§3 定理 6，则$z_0=a$是$f(z)=0$的l重根。若$l\geq 1$，则a是$f(z)=0$复根的实部点。若k为正整数，令

$$P\left((z-a)^2\right)=(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k$$

于是$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$。再令$s=(z-a)^2=-y^2$，则

$$P(s)=s^k+\lambda_1 s^{k-1}+\cdots+\lambda_{k-1}s+\lambda_k\text{。}$$

实系数k次多项式$P(s)$为点a的$P(s)$，并且$P(-\infty)\neq 0$，$P(0)=\lambda_k\neq 0$，$P(+\infty)\neq 0$。

作点a的以$P(s),P'(s)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点s $(s\in R)$的变号数分别记为V_s^P和U_s^P。于是 1. $V_{-\infty}^P-V_0^P=0$时，$P(s)=0$没有负实根，而

$$s=(z-a)^2=-y^2\text{，}\quad F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$$

于是$P\left((z-a)^2\right)=0$以及$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上没有成对的共轭根，$(4)^a$没有成对非0实根，$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上没有成对的共轭根，只有一个l重实根

$z=a$（若 $l=0$，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上没有根）。

2. $V_{-\infty}^{P}-V_{0}^{P}=k_1\geq 1$ 时，$P(s)=0$ 共有 k_1 个各不相同的负实根，于是 $P\left((z-a)^2\right)=0$ 以及 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上有 k_1 对各不相同的共轭根，$(4)^a$ 有 k_1 对各不相同的非 0 实根，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上有 k_1 对各不相同的共轭根。这时，可在 $(-\infty,0]$ 内找到 $P(s)=0$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$，$[\varepsilon_2,\eta_2]$，$\cdots$，$[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\leq\varepsilon_2<\eta_2\leq\cdots\leq\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}\leq 0$，且 $P(\varepsilon_j)\neq 0$，$P(\eta_j)\neq 0$，$V_{\varepsilon_j}^{P}-V_{\eta_j}^{P}=1$，$j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $P(s)=0$ 的这 k_1 个各不相同的负实根就可表示为

$$s_j={}^{[\varepsilon_j,\eta_j]}\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}\text{，}\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

其中 s_j 是 $P(s)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{P}-U_{\eta_j}^{P}$ 重负实根。$P(s)=0$ 的负实根个数为。

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^{P}-U_{0}^{P}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{P}-U_{\eta_j}^{P}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j\text{。}$$

由 $-y_j^2=s_j<0$，可得 $y_j=\sqrt{-s_j}$，$-y_j=-\sqrt{-s_j}$（$j=1,2,\cdots,k_1$）是 $(4)^a$ 的 k_1 对各不相同的非 0 实根。于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 k_1 对各不相同的共轭根就可表示为

$$\begin{cases} z_{j1}=a+i\sqrt{-{}^{[\varepsilon_j,\eta_j]}\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \\ z_{j2}=a-i\sqrt{-{}^{[\varepsilon_j,\eta_j]}\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \end{cases}\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

由第五章§5 定理 10 推论 2，则 z_{j1}，z_{j2} 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一对 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{P}-U_{\eta_j}^{P}$ 重共轭根，故 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上共有

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^{P}-U_{0}^{P}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{P}-U_{\eta_j}^{P}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j$$

对共轭根，$z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的个数为 $K'=l+2k^{(1)}$。

解法二还能求 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上以 a 为中点的成对非 a 实根，介绍如下：

3. $V_{0}^{P}-V_{+\infty}^{P}=0$ 时，则 $P(s)=0$ 没有正实根，而

$$s=(z-a)^2=-y^2\text{，}\quad F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P\left((z-a)^2\right)$$

于是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面实轴上没有以 a 为中点的成对非 a 实根，$(4)^a$ 没有成对的纯虚

数根，从而 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上也没有以 a 为中点的成对非 a 实根。

4. $V_0^P-V_{+\infty}^P=k_2\geq 1$ 时，则 $P(s)=0$ 共有 k_2 个各不相同的正实根，于是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面实轴上有以 a 为中点的 k_2 对各不相同的成对非 a 实根，$(4)^a$ 有 k_2 对各不相同的成对纯虚数根，$f(z)=0$ 在 z 平面实轴上有以 a 为中点的 k_2 对各不相同的成对非 a 实根。这时可在 $[0,+\infty)$ 内继续找到 $P(s)=0$ 实根的 k_2 个隔离区间 $[\varepsilon_{k_1+1},\eta_{k_1+1}]$，$[\varepsilon_{k_1+2},\eta_{k_1+2}]$，$\cdots$，$[\varepsilon_{k_1+k_2},\eta_{k_1+k_2}]$，其中 $0\leq\varepsilon_{k_1+1}<\eta_{k_1+1}\leq\varepsilon_{k_1+2}<\eta_{k_1+2}\leq\cdots\leq\varepsilon_{k_1+k_2}<\eta_{k_1+k_2}$，且 $P(\varepsilon_j)\neq 0$，$P(\eta_j)\neq 0$，$V_{\varepsilon_j}^P-V_{\eta_j}^P=1$，$j=k_1+1,k_1+2,\cdots,k_1+k_2$。于是 $P(s)=0$ 的这 k_2 个各不相同的正实根就可表示为

$$s_j=\sqrt[[\varepsilon_j,\eta_j]]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}\text{，}\quad j=k_1+1,k_1+2,\cdots,k_1+k_2$$

其中 s_j 是 $P(s)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重的正实根。$P(s)=0$ 的正实根个数为

$$k^{(2)}=U_0^P-U_{+\infty}^P=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}l_j\text{。}$$

$z-a=\pm\sqrt{s}$，故 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面实轴上以 a 为中点的 k_2 对各不相同的成对非 a 实根为

$$\begin{cases}z_{j1}=a+\sqrt{\sqrt[[\varepsilon_j,\eta_j]]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}}\\ z_{j2}=a-\sqrt{\sqrt[[\varepsilon_j,\eta_j]]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}}\end{cases}\quad j=k_1+1,k_1+2,\cdots,k_1+k_2$$

由第五章§5 定理 10 推论 1，则 z_{j1}，z_{j2} 是 $F_m(z-a)=0$ 在实轴上的一对 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重实根。于是 $F_m(z-a)=0$ 在实轴上以 a 为中点的非 a 实根(含重根)对数为

$$k^{(2)}=U_0^P-U_{+\infty}^P=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}l_j$$

而这些实根显然也都是 $f(z)=0$ 的实根。

下面的解法三，与解法二大致相同，但在细节上有较多区别，请予以关注。

解法三：设 $f(z)$ 的次数 ≥ 2，$a\in R$，$M(a)=0$，由第六章§3 定理 1，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点，由第五章§2 定理 2 推论，$(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 关于 y^2 的次数 $K^*\geq 1$，写成标准式

$$f_{m^*}^*\left(y^2\right)=a_{m^*0}y^{l^*}[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k]\qquad(4)^{*a}$$

$K^*=\dfrac{l^*}{2}+k\geq 1$，其中$k$为非负整数，$l^*$为$\geq 0$的偶数，但$k$和$l^*$不能同时为零，$a_{m^*0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且$a_{m^*0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数，$k=0$时，$\lambda_k=\lambda_0=1$。由第五章§3 定理 3 则 $f(z)=g^*(z)F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)$，其中$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=F_{m^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f_{m^*}^*\left(y^2\right)=i^{l^*+2k}f_{m^*}^*\left(y^2\right)$，于是

$$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}[(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k]$$

0 是$(4)^{*a}$(关于y^2)的$\dfrac{l^*}{2}$重根，$z=a$是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$的$l^*$重根，由第五章§2 或§3 定理 9 推论 1，则$z_0=a$是$f(z)=0$的l^*重或者l^*+1重根，其中$g^*(a)=0$时，$z_0=a$是$f(z)=0$的l^*+1重根，故a是$f(z)=0$复根的实部点；$g^*(a)\neq 0$时，$z_0=a$是$f(z)=0$的l^*重根，于是若l^*为≥ 2的偶数，则a是$f(z)=0$复根的实部点。若k为正整数，令

$$P\left((z-a)^2\right)=(z-a)^{2k}+\lambda_1(z-a)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-a)^2+\lambda_k$$

于是$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$。再令$s=(z-a)^2=-y^2$，则

$$P(s)=s^k+\lambda_1 s^{k-1}+\cdots+\lambda_{k-1}s+\lambda_k$$

实系数k次多项式$P(s)$为点a的$P(s)$，并且$P(-\infty)\neq 0$，$P(0)=\lambda_k\neq 0$，$P(+\infty)\neq 0$。

作点a的以$P(s),P'(s)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点s $(s\in R)$的变号数分别记为V_s^P和U_s^P。于是 1. $V_{-\infty}^P-V_0^P=0$时，$P(s)=0$没有负实根，而

$$s=(z-a)^2=-y^2，\quad F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$$

于是$P\left((z-a)^2\right)=0$以及$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上没有成对的共轭根，$(4)^{*a}$关于$y^2$的没有正实根，从而$f(z)=0$在$z$平面直线$x=a$上没有成对的共轭根。于是若$g^*(a)=0$，则$f(z)=0$在直线$x=a$上只有一个$l^*+1$重实根$z_0=a$；若$g^*(a)\neq 0$，则$f(z)=0$在直线$x=a$上只有一个$l^*$重实根$z_0=a$(其中$l^*=0$，则$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根)。

2. $V_{-\infty}^P-V_0^P=k_1\geq 1$时，$P(s)=0$共有$k_1$个各不相同的负实根，于是$P\left((z-a)^2\right)=0$以及$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$在$z$平面直线$x=a$上有$k_1$对各不相同的共轭根，$(4)^{*a}$关于$y^2$有$k_1$个各不相同的正实根，$f(z)=0$在$z$平面直线$x=a$上有$k_1$对各不相同的共轭根，$a$是

$f(z)=0$ 复根的实部点。这时，可在 $(-\infty,0]$ 内找到 $P(s)=0$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$, $[\varepsilon_2,\eta_2]$,$\cdots$, $[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\le\varepsilon_2<\eta_2\le\cdots\le\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}\le 0$，且 $P(\varepsilon_j)\ne 0$，$P(\eta_j)\ne 0$，$V_{\varepsilon_j}^P-V_{\eta_j}^P=1$，$j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $P(s)=0$ 这 k_1 个各不相同的负实根就可表示为

$$s_j={}^{[\varepsilon_j,\eta_j]}\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}\,,\quad j=1,2,\cdots,k_1\,。$$

其中 s_j 是 $P(s)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重负实根。$P(s)=0$ 的负实根个数为

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^P-U_0^P=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j$$

由 $-y_j^2=s_j<0$，可得 $y_j^2=-s_j$ $(j=1,2,\cdots,k_1)$ 是 $(4)^{*a}$ 的 k_1 个各不相同的正实根，从而可求得 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 k_1 对各不相同的共轭根。

$$\begin{cases} z_{j1}=a+i\sqrt{-{}^{[\varepsilon_j,\eta_j]}\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \\ z_{j2}=a-i\sqrt{-{}^{[\varepsilon_j,\eta_j]}\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \end{cases} j=1,2,\cdots,k_1$$

由第五章§5 定理 10 推论 2，则 z_{j1},z_{j2} 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一对 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重共轭根，故 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上共有

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^P-U_0^P=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j$$

对共轭根。若 $g^*(a)=0$，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上共有 $K'=(l^*+1)+2k^{(1)}$ 个根；若 $g^*(a)\ne 0$，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上共有 $K'=l^*+2k^{(1)}$ 个根。

解法三也可用来求 $f(z)=0$ 在实轴上以 a 为中点的成对非 a 实根，介绍如下：

3. $V_0^P-V_{+\infty}^P=0$ 时，则 $P(s)=0$ 没有正实根，而

$$s=(z-a)^2=-y^2\,,\quad F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=a_{m^*0}(z-a)^{l^*}P\left((z-a)^2\right)$$

$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面实轴上没有以 a 为中点的成对非 a 实根，$(4)^{*a}$ 关于 y^2 没有负实根，从而 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上也没有以 a 为中点的成对非 a 实根。

4. $V_0^P-V_{+\infty}^P=k_2\ge 1$ 时，则 $P(s)=0$ 共有 k_2 个各不相同的正实根，$F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面实轴上有以 a 为中点的 k_2 对各不相同的成对非 a 实根，$(4)^{*a}$ 关于 y^2 有 k_2 个各不

相同的负实根，$f(z)=0$ 在 z 平面实轴上有以 a 为中的 k_2 对各不相同的成对非 a 实根。这时可在 $[0,+\infty)$ 内继续找到 $P(s)=0$ 实根的 k_2 个隔离区间 $[\varepsilon_{k_1+1},\eta_{k_1+1}]$，$[\varepsilon_{k_1+2},\eta_{k_1+2}]$，$\cdots$，$[\varepsilon_{k_1+k_2},\eta_{k_1+k_2}]$，其中 $0\le\varepsilon_{k_1+1}<\eta_{k_1+1}\le\varepsilon_{k_1+2}<\eta_{k_1+2}\le\cdots\le\varepsilon_{k_1+k_2}<\eta_{k_1+k_2}$，且 $P(\varepsilon_j)\neq 0$，$P(\eta_j)\neq 0$，$V_{\varepsilon_j}^P-V_{\eta_j}^P=1$，$j=k_1+1,k_1+2,\cdots,k_1+k_2$。于是 $P(s)=0$ 这 k_2 个各不相同的正实根就可表示为

$$s_j=\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}\,,\quad j=k_1+1,k_1+2,\cdots,k_1+k_2$$

其中 s_j 是 $P(s)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重的正实根。$P(s)=0$ 的正实根个数为

$$k^{(2)}=U_0^P-U_{+\infty}^P=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}l_j\ 。$$

$z-a=\pm\sqrt{s}$，故 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在 z 平面实轴上以 a 为中点的 k_2 对各不相同的成对非 a 实根为 $\begin{cases} z_{j1}=a+\sqrt{\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \\ z_{j2}=a-\sqrt{\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \end{cases}\quad j=k_1+1,k_1+2,\cdots,k_1+k_2$。

由第五章§5 定理 10 推论 1，则 z_{j1}，z_{j2} 是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在实轴上的一对 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重实根。于是 $F_{m^*}^*\left((z-a)^2\right)=0$ 在实轴上以 a 为中点的非 a 实根(含重根)对数为

$$k^{(2)}=U_0^P-U_{+\infty}^P=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=k_1+1}^{k_1+k_2}l_j$$

而这些实根显然也都是 $f(z)=0$ 的实根。

总之，除了路径和视角不同，解读方式不同，解法二与解法三的相同点较多，本质上是统一的，但不可偏废，只有对两者同步探索才能形成完整系统的统一解法理论。

§3 同实部复根问题的进一步讨论

设 $x_j\in R$，则 x_j 是 $f(z)=0$ 的非互素点的充要条件是：$Q(x_j)=0$。如果 $x_j=\sqrt[[\alpha_j,\beta_j]]{Q(\ )}$ $(j=1,2,\cdots,H)$ 是 $Q(x)=0$ 的所有各不相同的实根，那么 $z=x_j$ $(j=1,2,\cdots,H)$ 是 $f(z)=0$ 的所有非互素点，于是理论上可以说，作点 x_j 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y),\cdots, f_m(y)\} \tag*{$(3)^{x_j}$}$$

则 $f_m(y)$ 的次数 ≥ 1，方程 $(4)^{x_j}$ 有实根时，x_j 是 $f(z)=0$ 复根的实部点；方程 $(4)^{x_j}$ 没有实根时，x_j 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点。由 $x_j=\sqrt[[\alpha_j,\beta_j]]{Q(\ )}$，则 α_j，β_j 均为有限实数，且

$$\alpha_j<x_j<\beta_j，\ Q(\alpha_j)\neq 0，\ Q(x_j)=0，\ Q(\beta_j)\neq 0，\ V_{\alpha_j}^{Q}-V_{\beta_j}^{Q}=1，\ j=1,2,\cdots,H。$$

根据第三章§2 定理 2 推论 3 和定理 7，则 α_j，β_j $(j=1,2,\cdots,H)$ 都是 $f(z)=0$ 的互素点，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=\alpha_j$ 上和直线 $x=\beta_j$ 上都没有根。

定理 1 设 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，若 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面带形区域 $\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$ 内一定有根，而且所有这些根都在直线 $x=x_0$ 上。

证明 若 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，则 $(4)^{x_0}$ 至少有一个实根，设它为 y_0，由第三章§2 定理 6 推论 6，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的根，于是 $\operatorname{Re} z_0=x_0$ 且 $f(z_0)=0$。由于 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 α，β 均为有限实数，且

$$\alpha<x_0<\beta，\ Q(\alpha)\neq 0，\ Q(x_0)=0，\ Q(\beta)\neq 0，\ V_{\alpha}^{Q}-V_{\beta}^{Q}=1。$$

故 $\alpha<\operatorname{Re} z_0<\beta$，$f(z_0)=0$，即 $z_0=x_0+iy_0$ 就是 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$ 内的根，于是 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$ 内一定有根。下面证明 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$ 内的所有根(含重根)都在直线 $x=x_0$ 上。

用反证法。假如 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$ 内有一个根 $z_1=x_1+iy_1$ ($x_1\in R$，$y_1\in R$)不在直线 $x=x_0$ 上，那么 $\alpha<\operatorname{Re} z_1=x_1<\beta$ 且 $x_1\neq x_0$，$f(z_1)=0$，$z_1=x_1+iy_1$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_1$ 上的根，由第三章§2 定理 6 推论 6 和定理 2，则 y_1 是 $(4)^{x_1}$ 的实根，$Q(x_1)=0$，于是 $Q(x)=0$ 在 (α,β) 内至少有两个不相同的根 x_0 和 x_1，与 $V_{\alpha}^{Q}-V_{\beta}^{Q}=1$ 矛盾。故命题成立。】

定理 2 设 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点的充要条件是：$f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内没有根。

证明 充分性由定理 1 即得，再证必要性。若 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上没有根。由于 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 α，β 均为有限实数，且

$$\alpha < x_0 < \beta，\ Q(\alpha) \neq 0，\ Q(x_0) = 0，\ Q(\beta) \neq 0，\ V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1。$$

用反证法。假设 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内至少有一个根设为 $z_1 = x_1 + iy_1$（$x_1 \in R$，$y_1 \in R$），那么它一定不在直线 $x = x_0$ 上，于是 $\alpha < \operatorname{Re} z_1 = x_1 < \beta$ 且 $x_1 \neq x_0$，$f(z_1) = 0$，$z_1 = x_1 + iy_1$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x = x_1$ 上的根，由第三章§2 定理 6 推论 6 和定理 2，则 y_1 是 $(4)^{x_1}$ 的实根，$Q(x_1) = 0$。于是 $Q(x) = 0$ 在 (α, β) 内至少有两个不相同的根 x_0 和 x_1，与 $V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1$ 矛盾。所以 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内没有根。】

推论 设 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是：

$$f(z)=0 \text{ 在 } \alpha < \operatorname{Re} z < \beta \text{ 内至少有一个根。}$$

证明 由定理 2 即得。】

定理 3 设 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是：$f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内一定有根，而且所有这些根都在直线 $x = x_0$ 上。

证明 由定理 1 和定理 2 推论即得。】

推论 设 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是：$f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内一定有根，而且它们是 $f(z)=0$ 在 z 平面以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合即为实部点 x_0 的同实部根全集。

综上所述，设 $x_0 = \sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 的非互素点。为了判断 x_0 是复根的实部点还是非实部点，必须弄清 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内究竟有根还是无根：若无根，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点；若有根，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，而且所有这些根都在直线 $x = x_0$ 上。下一章将研究 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内有没有根以及有几个根的问题，从而对复根的实部点和非实部点以及实部点的同实部根全集问题作进一步的阐述。

确定 $f(z)=0$ 复根的所有实部点的方法：就是先求出 $Q(x)=0$ 的所有各不相同的实

根 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{Q(\ )}$ $(j=1,2,\cdots,H)$，则 $z=x_j$ $(j=1,2,\cdots,H)$ 是 $f(z)=0$ 的所有非互素点，然后对它们逐个鉴别，不妨设 x_{j_0} 是其中任意一个，若 $f(z)=0$ 在 $\alpha_{j_0}<\mathrm{Re}\,z<\beta_{j_0}$ 内无根，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，舍去；若 $f(z)=0$ 在 $\alpha_{j_0}<\mathrm{Re}\,z<\beta_{j_0}$ 内有根，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，而且所有这些根都在直线 $x=x_{j_0}$ 上。

这个方法很重要，它也是判定 $f(z)=0$ 复根已完成隔离的方法，为下一章的同实部根全集根号的设立和复根隔离基本思想的形成创造了条件。

接下来，为 $f(z)=0$ 复根的统一近似解法寻找理论上的依据。

假设 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}=a$，即通过某种方法求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 的精确值为 a，则 $a\in R$，$Q(a)=0$，点 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点，作点 a 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_m(y)\} \tag{3^a}$$

$f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \tag{4^a}$$

其次数 $K=l+2k\geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。假如 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，那么求出 $(4)^a$ 的所有实根(含重根)，就可得到 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)。

但事实上，根据实根号计算方法，只有通过无限次的计算，才能确保求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 的精确值 a，仅靠有限多次的计算只能求得其充分好的近似值 r，即

$$x_0=a\approx r\text{，其中 }\alpha<r<\beta$$

我们面临的新课题是：在只能求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 充分好的近似值 r 的情况下，如何求 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的每对共轭根的虚部的近似值？

下面的定理 4 至定理 6 既为下一章讨论同实部根全集的分类判定与统一解法的关系打下基础，也为统一近似解法提供了重要的理论依据。

定理 4 设 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$l$ 为非负整数，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l\geq 1$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ 且 $l=U_\alpha-U_\beta$；$l=0$ 时，$l=U_\alpha-U_\beta=0$。总之，有 $l=U_\alpha-U_\beta$。

证明 假如 $\deg\ f(z)=1$，则 $Q(z)=f(z)$，于是 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。由第一章§3 定理 6，则 $l=U_\alpha-U_\beta$ $(=1)$，命题成立。

假如 $\deg\ f(z)\geq 2$，则 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，由题意根据第六章§2 定理 2 推论 3，则 $\alpha<x_0<\beta$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$，$1\geq V_\alpha-V_\beta\geq 0$，其中 $V_\alpha-V_\beta=1$ 的充要条件是 $f(x_0)=0$。故 $l\geq 1$ 时，$f(x_0)=0$，$V_\alpha-V_\beta=1$，由第一章§3 定理 6，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ 且 $l=U_\alpha-U_\beta$。$l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$，$V_\alpha-V_\beta=0$，$U_\alpha-U_\beta=0$，故 $l=U_\alpha-U_\beta=0$。

总之，有 $l=U_\alpha-U_\beta$。】

推论 1 设 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$l$ 为非负整数，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=U_\alpha-U_\beta$，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l\geq 1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

证明 由定理 4 即得】

推论 2 设 $(f(z),f^{'}(z))=1$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$l$ 为非负整数，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l=U_\alpha-U_\beta=0$ 或 1，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l=1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

证明 由题设则 $l=0$ 或 1，再由推论 1 即得。】

例题 设 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q=1$，$l$ 为非负整数，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为 $f_m(y)=a_{m0}y$，其中 $a_{m0}\neq 0$，a_{m0} 为实数，$l=U_\alpha-U_\beta=1$，$f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

证明 由题设则 $\alpha<x_0<\beta$，$Q(x_0)=0$，$x=x_0$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，由第三章§2 定理 2 推论 1 和定理 3，则 $(4)^{x_0}$ 的次数 $K\geq 1$，$K\leq L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q=1$，于是 $K=1$，$f_m(y)$ 的标准式为 $f_m(y)=a_{m0}y$，其中 $a_{m0}\neq 0$，a_{m0} 为实数，0 是 $(4)^{x_0}$ 的单根，由第三章§2 定理 5，则 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的单根，$l=1$，再由定理 4 推论 1 即得。】

定理 5 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \tag{4}^{x_0}$$

其次数 $K=l+2k\geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，则

1) $l=U_\alpha-U_\beta$，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l\geq 1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

2) $K\leq L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$k\leq\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$，其中 $(f(z),f^{'}(z))=1$

时，$K=L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$。

证明 1) 由题设则 0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重根，由第三章§2 定理 5，则 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，再由定理 4 推论 1 即得。

2) 由题设则 $\alpha<x_0<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(x_0)=0$，$Q(\beta)\neq 0$，$x=x_0$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$(4)^{x_0}$ 的次数为 K，由第三章§2 定理 3，则 $K\leq L$，其中 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，$K=L$。由第六章§1 定理 1 推论 1 和§2 定理 1 推论，则 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$ 且

$$U_\alpha^Q-U_\beta^Q=\left(U_\alpha-U_\beta\right)+2\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)。$$

又 $L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$l=U_\alpha-U_\beta$，$K=l+2k$，于是 $K\leq L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，而

$$k=\frac{1}{2}(K-l)\leq\frac{1}{2}(L-l)=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$$

其中 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，$K=L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，而

$$k=\frac{1}{2}(K-l)=\frac{1}{2}(L-l)=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)。】$$

推论 1 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$\left(f(z),f'(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数 $K=l+2k\geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，则 $K=L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$，$l=U_\alpha-U_\beta=0$ 或 1，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l=1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。

证明 由题设可知 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，再由定理 4 推论 2 和定理 5 即得。】

设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$\left(f(z),f'(z)\right)=1$，若无法求得 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$ 的精确值 a，可设 $(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为 $(4)^{x_0}$，根据推论 1，由

$$K=L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q,\quad l=U_\alpha-U_\beta,\quad k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$$

就可求得 $f_m(y)$ 的次数 $K=l+2k$ 中 K，l，k 的具体数值，这就为 $f(z)=0$ 的近似解法创造了有利条件。

推论 2 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$ 为奇数，$l=U_\alpha-U_\beta=1$，则 $f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k]$$

其中 $k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-1\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)\geq 0$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。

证明 在推论 1 中令 $l=U_\alpha-U_\beta=1$ 即得。】

推论 3 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$ 为偶数，$l=U_\alpha-U_\beta=0$，则 $f(x_0)\neq 0$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k]$$

其中 $k=\frac{1}{2}\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)\geq 1$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。

证明 在推论 1 中令 $l=U_\alpha-U_\beta=0$ 即得。】

定理 6 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{M(\ )}$，$L_*=U_\alpha^M-U_\beta^M$，$l$ 为非负整数，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，$(3)^{*x_0}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 的标准式为

$$f_{m^*}^*\left(y^2\right)=a_{m^*0}y^{l^*}[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^{*x_0}$$

其关于 y^2 的次数 $K^*=\frac{l^*}{2}+k\geq 1$，其中 k 为非负整数，l^* 为 ≥ 0 的偶数，但 k 和 l^* 不能同时为零，$a_{m^*0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 $a_{m^*0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，则

1) $l=U_\alpha-U_\beta$，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l\geq 1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。

2) $K^*\leq L_*=U_\alpha^M-U_\beta^M$，当 l 为 ≥ 0 的偶数时，$l^*=l$，$k\leq\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)-\frac{1}{2}\left(U_\alpha-U_\beta\right)$；当 l 为奇数时，$l^*=l-1$，$k\leq\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)-\frac{1}{2}\left(U_\alpha-U_\beta-1\right)$，其中 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$ 时，$l^*=0$，$k=K^*=L_*=U_\alpha^M-U_\beta^M$。

证明 1) 由定理 4 推论 1 即得。2) 由题设则 $\alpha<x_0<\beta$，$M(x_0)=0$，$x=x_0$ 是 $M(x)=0$ 的 L_* 重根，0 是 $(4)^{*x_0}$ (关于 y^2)的 $\frac{l^*}{2}$ 重根，$(4)^{*x_0}$ 关于 y^2 的次数为 K^*，由第五

章§2 定理 3，则 $K^* \le L_*$，其中 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$ 时，$K^* = L_*$。于是 $K^* \le L_* = U_\alpha^M - U_\beta^M$，又 $z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由 1) $l = U_\alpha - U_\beta$，根据第五章§2 定理 9，则当 l 为 ≥ 0 的偶数时，0 是 $(4)^{*x_0}$ 的 $\frac{l}{2}$ 重根，$l^* = l$，故 $k = K^* - \frac{l^*}{2} \le L_* - \frac{l}{2} = \left(U_\alpha^M - U_\beta^M\right) - \frac{1}{2}\left(U_\alpha - U_\beta\right)$；当 l 为奇数时，0 是 $(4)^{*x_0}$ 的 $\frac{l-1}{2}$ 重根，$l^* = l-1$，故 $k = K^* - \frac{l^*}{2} \le L_* - \frac{l-1}{2} = \left(U_\alpha^M - U_\beta^M\right) - \frac{1}{2}\left(U_\alpha - U_\beta - 1\right)$。其中 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$ 时，$K^* = L_*$，$l = 0$ 或 1，于是 $l^* = 0$，则 $k = K^* = L_* = U_\alpha^M - U_\beta^M$。】

若 $\deg\ f(z) \ge 2$，则有 $Q(z) = \pm f(z) M^2(z)$，于是在实际应用上述定理时，根据第六章§2 相关知识可以更灵活处理 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ 三者之间的关系。

推论 设 $\deg\ f(z) \ge 2$，$\left(f(z), f'(z)\right)=1$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，$L_* = U_\alpha^M - U_\beta^M$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $(3)^{*x_0}$ 内 $f_{m^*}^*\left(y^2\right)$ 的标准式为

$$f_{m^*}^*\left(y^2\right) = a_{m^*0}[y^{2k} - \lambda_1 y^{2k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2 + (-1)^k \lambda_k] \qquad (4)^{*x_0}$$

其中 $k = L_* = U_\alpha^M - U_\beta^M \ \ge 1$，$a_{m^*0} \ne 0$，$\lambda_k \ne 0$，且 $a_{m^*0}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 均为实数，$l = U_\alpha - U_\beta$，$l = 0$ 或 1，其中 $l = 0$ 时，$f(x_0) \ne 0$；$l = 1$ 时，$f(x_0) = 0$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

证明 由题设则 $l = 0$ 或 1，再由定理 6 即得。】

定理 6 推论为 $f(z)=0$ 的另一种近似解法创造了有利条件。不难发现，当 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$ 时，定理 5 和定理 6 (包括推论)中的 k 均满足 $k = U_\alpha^M - U_\beta^M$。

第八章
方程复根隔离的基本思想与统一解法

§1 卢斯判别法与卢斯表格

设多项式 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，其中 $n\geq 1$， $a_0>0$， $a_j\in R$， $j=0,1,2,\cdots,n$。为便于阐述，本章 $f(z)$ 均为此式，且首项系数 $a_0>0$。若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的所有根，由总根号定义，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

在前几章基础上，本章用方程分根号和同实部根全集根号解决 $f(z)=0$ 求复根问题。令 $a\in R$， $z=a+iy$，则由第三章可知

$$f(a+iy)=F_0(iy)+F_1(iy)=i^n f_0(y)+i^{n-1}f_1(y)=i^n[f_0(y)-if_1(y)] \qquad (1)^a$$

其中点 a 的 $f_0(y),f_1(y)$ 分别为

$$\begin{cases} f_0(y)=f_0(a,y)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}y^n-\dfrac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots \\ f_1(y)=f_1(a,y)=\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots \end{cases}$$

$f_0(y)$ 的首项系数 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$， $f_0(y),f_1(y)$ 为奇偶函数。

由 $(1)^a$ 可以得到实系数多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

要设立分根号，必须先解决复根的隔离问题，为此作点 a 的以 $f_0(y),f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_m(y)\} \qquad (3)^a$$

$(3)^a$ 内均为实系数多项式，$f_m(y)$ 是 $f_j(y),f_{j+1}(y)$ 的最大公因式($j=0,1,2,\cdots,(m-1)$)；$(3)^a$ 内的函数交替为奇偶函数， $f_m(y)$ 为偶或奇函数。记

$$a_{00}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!},\quad a_{01}=\frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!},\quad a_{02}=\frac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!},\quad \cdots$$

$$a_{10}=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},\quad a_{11}=\frac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!},\quad a_{12}=\frac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!},\quad \cdots$$

其中 $a_{00}=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$ ，从而将 $(3)^a$ 写成

$$\begin{aligned}
&f_0(y)=a_{00}y^n-a_{01}y^{n-2}+a_{02}y^{n-4}-\cdots\\
&f_1(y)=a_{10}y^{n-1}-a_{11}y^{n-3}+a_{12}y^{n-5}-\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_m(y)=a_{m0}y^K-a_{m1}y^{K-2}+a_{m2}y^{K-4}-\cdots
\end{aligned}$$

最后的 K 次多项式 $f_m(y)$ 是 $f_0(y), f_1(y)$ 的最大公因式。

为了判断 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上有没有根以及有几个根，引进的卢斯判别法就要用 $a=0$ 时的施图姆序列 $(3)^0$ 。卢斯判别法的证明，需要用到公式

$$r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$$

作者研究发现该公式及其证明方法[6]也适用于复系数代数方程。

n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上有 n 个根，可将它们表示为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ (其中可能会有重根)，于是 $f(z)=a_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ （$a_0>0$）

设在虚轴上没有 $f(z)=0$ 的根，则

$$f(iy)\neq 0,\quad iy-z_j\neq 0,\quad -\infty<y<+\infty,\quad j=1,2,\cdots,n\ 。$$

由于复数乘积的辐角等于各因子辐角的和，故 $\arg f(iy)=\sum\limits_{j=1}^{n}\arg\left(iy-z_j\right)$ 。

当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时，把 y 的角度函数 $\varphi(y)$ 的增量记作 $\Delta\varphi$，则

$$\Delta\varphi=\varphi(-\infty)-\varphi(+\infty)\quad,\quad \Delta\arg f(iy)=\sum_{j=1}^{n}\Delta\arg\left(iy-z_j\right)\ 。$$

假如根 z_j 在虚轴的右半平面上，则矢量 $iy-z_j$ 是从 z_j 到虚轴上动点 iy 的矢量，当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ ，它的辐角从 $\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 $\dfrac{3}{2}\pi$ ，于是 $\Delta\arg\left(iy-z_j\right)=\pi$ 。

假如 z_j 在虚轴的左半平面上，则 $\Delta\arg\left(iy-z_j\right)=-\pi$ 。

设在虚轴的右半平面上有 r 个根，在虚轴的左半平面上有 l 个根， $l+r=n$ ，于是有

$$\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\Delta\arg\left(iy-z_j\right)=r-l=r-(n-r)=2r-n$$

在虚轴的右半平面上的根的个数为： $r=\frac{1}{2}[n+\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)]$

为求 r ，记 $\delta f(z)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)$ ， $f(iy)=i^n[f_0(y)-if_1(y)]=i^n\omega(y)$ ，其中

$$f_0(y)=f_0(0,y)=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}y^n-\frac{f^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{f^{(n-4)}(0)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots$$
$$=a_0y^n-a_2y^{n-2}+a_4y^{n-4}-\cdots$$
$$f_1(y)=f_1(0,y)=\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}y^{n-1}-\frac{f^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{f^{(n-5)}(0)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots$$
$$=a_1y^{n-1}-a_3y^{n-3}+a_5y^{n-5}-\cdots$$

且 $a_0>0$ ，该 $f_0(y),f_1(y)$ 即为点 0 的 $f_0(y),f_1(y)$，而 $\omega(y)=f_0(y)-if_1(y)$ 。

由于 $\arg f(iy)=\arg(i^n)+\arg\omega(y)$， i^n 为常数， $\Delta i^n=0$ ，故

$$\delta f(z)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg\omega(y)$$

当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时，研究 $\varphi(y)=\arg\omega(y)$ 的增量可改为研究 $\cot\varphi(y)=-\frac{f_0(y)}{f_1(y)}$ 的正负变化情况。设 $\cot\varphi$ 在虚轴上从正变到负共有 α 次，从负变到正共有 β 次，则

$$\delta f(z)=\alpha-\beta$$

当 $\cot\varphi$ 从正变到负时， $\{f_0(y),f_1(y)\}$ 从异号变为同号损失一次变号；当 $\cot\varphi$ 从负变到正时， $\{f_0(y),f_1(y)\}$ 增加一次变号。作点 0 的以 $f_0(y),f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_m(y)\} \qquad (3)^0$$

令 $V_y=V\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_m(y)\}$，则当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时，施图姆序列 $(3)^0$ 损失的变号数是由 $f_0(y)$ 的实零点引起的，中间函数的实零点对于变号数的改变无影响，由于已设 $f(iy)\neq0$ ，所以 $f_m(y)$ 没有实零点，于是有

$$V_{+\infty}-\alpha+\beta=V_{-\infty}\text{。故}V_{+\infty}-V_{-\infty}=\alpha-\beta=\delta f(z)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)$$

将其代入 $r=\frac{1}{2}[n+\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)]$，则有 $r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$ 。

由该公式可得实系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 的**卢斯判别法**[6]

卢斯判别法之一： n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根的充要

条件是：在施图姆序列$(3)^0$内$m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数。

证明 如果在$(3)^0$内$m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，那么首先，$f_m(y)=f_n(y)$是非零常数，$(f_0(y),f_1(y))=1$，因此0是$f(z)=0$的互素点，由第三章§2定理2推论3和定理7，则$Q(0)\neq 0$，$f(z)=0$在直线$x=0$(即虚轴)上没有根；其次，由于$n+1$个首项系数都是正数，则$V_{-\infty}=n$，$V_{+\infty}=0$，由$r=\dfrac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$可得$r=0$。所以$f(z)=0$在虚轴及其右半平面上没有根。

反过来，如果n次方程$f(z)=0$在虚轴及其右半平面上没有根，那么$r=\dfrac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$中$r=0$，可得$V_{-\infty}-V_{+\infty}=n$。而$0\leq V_y\leq n$，因此必有$V_{-\infty}=n$，$V_{+\infty}=0$。于是在$(3)^0$内必须满足$m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数。】

卢斯判别法之二：n次方程$f(z)=0$在施图姆序列$(3)^0$内$m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，则$f(z)=0$在z平面的虚轴上没有根，在其右半平面上的根的个数等于$n+1$个首项系数组成的序列的变号数。

证明 由题设则$f_m(y)=f_n(y)$是非零常数，0是$f(z)=0$的互素点，$Q(0)\neq 0$，$f(z)=0$在虚轴上没有根；不妨设在$(3)^0$内$n+1$个多项式首项系数组成的序列的变号数为V，则$V_{+\infty}=V$，$V_{-\infty}=n-V$，$V_{+\infty}-V_{-\infty}=2V-n$，于是由$r=\dfrac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$可得$r=V$。】

卢斯判别法之三：设K为正整数，则n次方程$f(z)=0$在z平面的虚轴上有K个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：在施图姆序列$(3)^0$内$m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，最后的K次方程$(4)^0$有K个实根，这K个实根就是$f(z)=0$在虚轴上的K个根的虚部。

证明 假如$Q(0)=0$，则0是$f(z)=0$的非互素点，$(3)^0$内$f_m(y)$的次数$K\geq 1$。$f_m(y)$是$f_j(y),f_{j+1}(y)$的最大公因式（$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$），且$f_{m+1}(y)\equiv 0$，于是可设$f_j(y)=g_j(y)f_m(y)$，$j=0,1,2,\cdots,(m+1)$。

根据预章定理 2 推论 2 则$\begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases}$有解。而

$$\begin{cases} f_0(y)=g_0(y)f_m(y) \\ f_1(y)=g_1(y)f_m(y) \end{cases}（即\begin{cases} f_0(0,y)=g_0(0,y)f_m(0,y) \\ f_1(0,y)=g_1(0,y)f_m(0,y) \end{cases}）$$

根据预章定理 5，则$\begin{cases} g_0(y)=0 \\ g_1(y)=0 \end{cases}$无解，$(g_0(y),g_1(y))=1$，于是

$$f(z)=f(iy)=i^n\left[f_0(y)-if_1(y)\right]=i^n[g_0(y)-ig_1(y)]f_m(y)$$

令 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，$g(z)=g(iy)=i^{n-K}\left[g_0(y)-ig_1(y)\right]$，则有 $f(iy)=g(iy)F_m(iy)$，于是

$$f(z)=g(z)F_m(z)$$

其中 $g(z)$ 为点 0 的 $g(z)$，$F_m(z)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$，$F_m(z)$ 为实系数 K 次多项式，$g(z)$ 为实系数 $n-K$ 次多项式。由于 $f_j(y)=q_j(y)f_{j+1}(y)-f_{j+2}(y)$，即 $f_{j+2}(y)=-rem(f_j(y),f_{j+1}(y))$，$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$，$f_{m+1}(y)\equiv 0$。又 $f_j(y)=g_j(y)f_m(y)$，$j=0,1,2,\cdots,(m+1)$，故

$$g_j(y)f_m(y)=q_j(y)g_{j+1}(y)f_m(y)-g_{j+2}(y)f_m(y)$$

又 $f_m(y)\not\equiv 0$，于是 $g_j(y)=q_j(y)g_{j+1}(y)-g_{j+2}(y)$，即 $g_{j+2}(y)=-rem(g_j(y),g_{j+1}(y))$，$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$，$g_m(y)=1$，$g_{m+1}(y)\equiv 0$。因此

$$\{g_0(y),g_1(y),g_2(y),\cdots,g_m(y)\} \qquad (3)^0$$

即为方程 $g(z)=0$ 在点 0 的以 $g_0(y),g_1(y)$ 为基的施图姆序列，其中 $g_m(y)=1$。

证充分性。如果 n 次方程 $f(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，最后的 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上的 K 个根的虚部，其中 K 为正整数，那么 $Q(0)=0$，于是由

$$f_j(y)=g_j(y)f_m(y),\quad j=0,1,2,\cdots,(m+1)。$$

可知，$n-K$ 次方程 $g(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，根据卢斯判别法之一，则 $g(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根。而 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，K 次方程 $F_m(z)=0$ 在 z 平面虚轴上有 K 个根，由 $f(z)=g(z)F_m(z)$ 可知，$f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根。

再证必要性。如果 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根，其中 K 为正整数，那么 0 是 $f(z)=0$ 复根的最大实部点，$Q(0)=0$，$f(z)=0$ 在 z

平面上关于点 0 严格对称的根的个数为 K，由第三章§4 定理 2 推论，则 $(4)^0$ 的次数为 K。由第三章§3 定理 12，则 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上的 K 个根的虚部。而 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，故 K 次方程 $F_m(z)=0$ 在 z 平面虚轴上有 K 个根，由 $f(z)=g(z)F_m(z)$ 可知，$n-K$ 次方程 $g(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根，根据卢斯判别法之一则 $g(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数。由

$$f_j(y)=g_j(y)f_m(y),\quad j=0,1,2,\cdots,(m+1)$$

(其中 $f_0(y)$ 的首项系数 $a_0>0$)可知 $f(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，于是命题成立。】

根据除法规则，除去施图姆序列 $(3)^a$ 的零系数及交替正负号，可以得到实系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 在点 a 的**卢斯表格**[6]：

$$\begin{array}{ccc|ccccc}
f_0 & y^n & & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\
f_1 & y^{n-1} & & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\
f_2 & y^{n-2} & & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
f_{n-2} & y^2 & & a_{n-2\ 0} & a_{n-2\ 1} & & & \\
f_{n-1} & y^1 & & a_{n-1\ 0} & & & & \\
f_n & y^0 & & a_{n\ 0} & & & &
\end{array}$$

其中 $a_{js}=\dfrac{-1}{a_{j-1\ 0}}\begin{vmatrix} a_{j-2\ 0} & a_{j-2\ s+1} \\ a_{j-1\ 0} & a_{j-1\ s+1} \end{vmatrix}$

特别当 $a=0$ 时，该表格为 $f(z)=0$ 在点 0 的卢斯表格。

只要将卢斯判别法的序列表述方式改为表格表述方式，就可得到实系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 的**卢斯表格判别法**。

卢斯表格判别法之一：n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根的充要条件是：在点 0 的卢斯表格最左列的 $n+1$ 个系数均为正数。

卢斯表格判别法之二：n 次方程 $f(z)=0$ 在点 0 的卢斯表格最左列的 $n+1$ 个系数都不等于零，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上没有根，在其右半平面上的根的个数等于最左列 $n+1$ 个系数的变号数。

卢斯表格判别法之三：设 K 为正整数，则 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K

个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：在点0的卢斯表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-K$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系数所代表的 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上 K 个根的虚部。

§2 复平面的水平平移变换

设 $a\in R$，则 $s=z-a$ 是复平面的平移量为 a 的水平平移变换。在该变换下 $\operatorname{Re}s=\operatorname{Re}z-a$，$\operatorname{Im}s=\operatorname{Im}z$，$z$ 平面的直线 $x=a$ 即为 s 平面的虚轴 $x=0$，于是 $a>0$ 时，s 平面可看作是 z 平面在该变换的作用下向右水平平移了 a 单位所得到的新平面；$a<0$ 时，s 平面可看作是 z 平面在该变换的作用下向左水平平移 $|a|$ 单位所得到的新平面。

为了能够运用卢斯表格判别法，判断 $f(z)=0$ 在 z 平面与虚轴平行的直线及其右半平面上有没有根以及有几个根，我们需要作复平面的水平平移变换。

实系数 n 次多项式 $f(z)$ 在 z 平面实轴上点 a 的泰勒展开式为

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(a)}{1!}(z-a)+f(a)$$

其中 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$，令 $t(s)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}s^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(a)}{1!}s+f(a)$，则 $t(s)$ 也为实系数 n 次多项式，其首项系数 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$。于是在水平平移变换 $s=z-a$ 下，有

$$t(s)=t(z-a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(a)}{1!}(z-a)+f(a)=f(z)$$

即 $t(s)=t(z-a)=f(z)$。$t(s)$ 在点 0 的泰勒展开式可写成

$$t(s)=\frac{t^{(n)}(0)}{n!}s^n+\frac{t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\frac{t^{'}(0)}{1!}s+t(0)$$

其中 $t^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)=n!a_0>0$，$t^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(a)$ ，…，$t^{'}(0)=f^{'}(a)$，$t(0)=f(a)$。令 $s=iy$，

记 $$\begin{cases} t_0(y)=t_0(0,y)=\frac{t^{(n)}(0)}{n!}y^n-\frac{t^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{t^{(n-4)}(0)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots \\ t_1(y)=t_1(0,y)=\frac{t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}y^{n-1}-\frac{t^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{t^{(n-5)}(0)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots \end{cases}$$

则相应有

$$t(iy)=i^n\left[t_0(0,y)-it_1(0,y)\right]=i^n\left[t_0(y)-it_1(y)\right] \qquad (1)^0$$

该 $t_0(y),t_1(y)$ 即为点 0 的 $t_0(y),t_1(y)$，作点 0 的以 $t_0(y),t_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{t_0(y),t_1(y),t_2(y),\cdots,t_m(y)\} \qquad (3)^0$$

由于$t^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)$，$t^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(a)$,…, $t'(0)=f'(a)$，$t(0)=f(a)$，可记

$$a_{00}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{t^{(n)}(0)}{n!},\quad a_{01}=\frac{f^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}=\frac{t^{(n-2)}(0)}{(n-2)!},\quad a_{02}=\frac{f^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}=\frac{t^{(n-4)}(0)}{(n-4)!},\cdots$$

$$a_{10}=\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}=\frac{t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!},\quad a_{11}=\frac{f^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}=\frac{t^{(n-3)}(0)}{(n-3)!},\quad a_{12}=\frac{f^{(n-5)}(a)}{(n-5)!}=\frac{t^{(n-5)}(0)}{(n-5)!},\cdots$$

于是有

$$f_0(y)=a_{00}y^n-a_{01}y^{n-2}+a_{02}y^{n-4}-\cdots;\quad t_0(y)=a_{00}y^n-a_{01}y^{n-2}+a_{02}y^{n-4}-\cdots;$$
$$f_1(y)=a_{10}y^{n-1}-a_{11}y^{n-3}+a_{12}y^{n-5}-\cdots;\quad t_1(y)=a_{10}y^{n-1}-a_{11}y^{n-3}+a_{12}y^{n-5}-\cdots;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_m(y)=a_{m0}y^K-a_{m1}y^{K-2}+a_{m2}y^{K-4}-\cdots;\quad t_m(y)=a_{m0}y^K-a_{m1}y^{K-2}+a_{m2}y^{K-4}-\cdots。$$

可以看出：$f(z)=0$的施图姆序列$(3)^a$和$t(s)=0$的施图姆序列$(3)^0$实际上是同一个序列，即$t_j(y)=f_j(y)$，$j=0,1,2,\cdots,m$。于是有

性质 设$a\in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$f(z)=0$的施图姆序列$(3)^a$和$t(s)=0$的施图姆序列$(3)^0$是同一个序列，于是$f(z)=0$在点a的卢斯表格就是$t(s)=0$在点0的卢斯表格。

定理 1 设$a\in R$，利用卢斯表格可以对n次方程$f(z)=0$的根的位置做出如下判断：

1) $f(z)=0$在点a的卢斯表格最左列的$n+1$个系数均为正数的充要条件是：$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$及其右半平面上没有根。

2) $f(z)=0$在点a的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，则$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上没有根，在其右半平面上根的个数等于最左列$n+1$个系数的变号数。

证明 不妨设$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$t(s)=0$也是n次方程，由性质，$f(z)=0$在点a的卢斯表格就是$t(s)=0$在点0的卢斯表格，于是 1) $f(z)=0$在点a的卢斯表格最左列的$n+1$个系数均为正数的充要条件是：$t(s)=0$在点0的卢斯表格最左列的$n+1$个系数均为正数。

根据预章定理 6 推论 9，$t(s)=0$在s平面的虚轴及其右半平面上没有根的充要条件是：$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$及其右半平面上没有根。再由卢斯表格判别法之一即得。

2) $f(z)=0$在点a的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零就是$t(s)=0$在点0的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，由卢斯表格判别法之二，则$t(s)=0$在s

平面的虚轴上没有根，在其右半平面上根的个数等于($t(s)=0$ 在点 0 的卢斯表格)最左列 $n+1$ 个系数的变号数。根据预章定理 6 推论 6 和 7，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上没有根，在其右半平面上根的个数等于($f(z)=0$ 在点 a 的卢斯表格)最左列 $n+1$ 个系数的变号数。】

推论 设 $a\in R$，W_a 为非负整数，若 n 次方程 $f(z)=0$ 在点 a 的卢斯表格最左列的 $n+1$ 个系数都不等于零，且变号数为 W_a，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上没有根，在其右半平面上的根的个数为 W_a。

证明 由定理 1 即得。】

定理 2 设 $a\in R$，K 为正整数，则 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上有 K 个根,在其右半平面上没有根的充要条件是:在点 a 的卢斯表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-K$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系数所代表的 K 次方程 $(4)^a$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上 K 个根的虚部。

证明 不妨设 $t(s)=t(z-a)=f(z)$，则 $t(s)=0$ 也是 n 次方程，由性质，$f(z)=0$ 在点 a 的卢斯表格就是 $t(s)=0$ 在点 0 的卢斯表格，于是 $f(z)=0$ 在点 a 的卢斯表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-K$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系数所代表的 K 次方程 $(4)^a$ 有 K 个实根,这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上 K 个根的虚部的充要条件是：$t(s)=0$ 在点 0 的卢斯表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-K$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系数所代表的 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $t(s)=0$ 在 s 平面虚轴上 K 个根的虚部。

根据预章定理 6 推论 10，$t(s)=0$ 在 s 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：$f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上有 K 个根,在其右半平面上没有根。

再由卢斯表格判别法之三即得。】

定理 3[5] 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0>0$)，若 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根，则 $f(z)$ 的所有系数均为正数，即 $a_j>0$，$j=0,1,2,\cdots,n$。

证明 由于 $f(z)=0$ 的次数为 n，则它共有 n 个复根。若 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根，则它的 n 个根均在虚轴的左半平面上，不妨设其中共有 s 个实

根： $z_j=-p_j\ (j=1,2,\cdots,s)$，以及 k 对共轭复根 $z_{j1}=-\alpha_j+i\varepsilon_j$，$z_{j2}=-\alpha_j-i\varepsilon_j$（$j=1,2,\cdots,k$），其中 $n=s+2k$，且 $p_j>0\ (j=1,2,\cdots,s)$，$\alpha_j>0$，$\varepsilon_j>0\ (j=1,2,\cdots k)$，根据因式分解定理有

$$f(z)=a_0(z+p_1)(z+p_2)\cdots(z+p_s)[(z+\alpha_1)^2+\varepsilon_1^2][(z+\alpha_2)^2+\varepsilon_2^2]\cdots[(z+\alpha_k)^2+\varepsilon_k^2]$$

将各因式相乘展开后，$f(z)$的所有系数均为正数，即 $a_j>0$，$j=0,1,2,\cdots,n$。】

推论 1 若 $f(z)$有负系数或零系数，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上或虚轴的右半平面上有根。

证明 由定理 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，若 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 及其右半平面上没有根，则 $f(z)$ 在点 a 的泰勒展开式 $f(z)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+\cdots+\dfrac{f^{'}(a)}{1!}(z-a)+f(a)$ 的所有系数即 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!},\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},\cdots,\dfrac{f^{'}(a)}{1!},f(a)$ 均为正数。

证明 令 $t(s)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}s^n+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\dfrac{f^{'}(a)}{1!}s+f(a)$ 及 $s=z-a$，则

$t(s)=t(z-a)=f(z)$，$t(s)$ 也为实系数 n 次多项式，其首项系数 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$。

若 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 及其右半平面上没有根，根据预章定理 6 推论 9，则 $t(s)=0$ 在 s 平面的虚轴及其右半平面上没有根，由定理 3，则 $t(s)$ 的所有系数均为正数，即 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!},\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},\cdots,\dfrac{f^{'}(a)}{1!},f(a)$ 均为正数。】

推论 3 设 $a\in R$，若 $f(z)$在点 a 的泰勒展开式有负系数或零系数，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上或直线 $x=a$ 的右半平面上有根。

证明 由推论 2 即得。】

§3 分根号与同实部根全集根号

定理 1 设$\alpha<\beta$，若n次方程$f(z)=0$在点α和点β的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，且变号数分别为W_α和W_β，则$f(z)=0$在z平面直线$x=\alpha$上和直线$x=\beta$上都没有根，在带形区域$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-W_\beta$个根。

证明 根据§2 定理 1 推论，则$f(z)=0$在直线$x=\alpha$上和直线$x=\beta$上都没有根，在直线$x=\alpha$和直线$x=\beta$右半平面上根的个数分别为W_α和W_β，于是$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-W_\beta$个根。】

$f(z)=0$在复平面上的所有根(含重根)组成的集合用总根号表示，而其在与虚轴平行的一个带形区域内的所有根(含重根)所组成的集合可用一个**分根号**表示。

定义 1 设$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$($a_0>0$)，$\alpha<\beta$，$f(z)=0$在点$\alpha$和点$\beta$的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，且变号数分别为$W_\alpha$和$W_\beta$，则将$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内的$W_\alpha-W_\beta=q$个根所组成的集合记作

$$\overset{(\alpha,\ \beta)}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ \ (\text{简写成}\overset{(\alpha,\ \beta)}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{f(\ )})。$$

其中$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$在$\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$左上方记为$(\alpha,\ \beta)$；$W_\alpha-W_\beta$记在左下方。于是

1) $q=0$时，$\overset{(\alpha,\ \beta)}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\phi$。

2) $q\geq 1$时，若这q个根为$z_1,z_2,\cdots,z_q$，则$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\overset{(\alpha,\ \beta)}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

这时$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$称为根$z_1,z_2,\cdots,z_q$的存在区域。假如$W_\alpha=n$，$W_\beta=0$，则有

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{(\alpha\ ,\ \beta)}{\underset{n\ -\ 0}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

我们的新课题是：设$a\in R$，若n次方程$f(z)=0$在点a的卢斯表格最左列的$n+1$个系数中有零系数，该如何计算它在直线$x=a$上及其右半平面上的根的个数。为此，可将最左列的$n+1$个系数中有零系数分为以下两种情况：

(A)最左列有零系数，但在零系数所在的行中其它系数不全为零；

(B)卢斯表格的某一行系数均为零。

然后对这两种情况分别进行讨论。

1. 出现情况(A)时，《自动控制原理》教材通常用一个无穷小的正数ε来代替这

个零，从而使点a的卢斯表格可以继续运算下去(否则下一行会出现∞)。由此得到的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，其变号数W_a即为$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上的根的个数，而求在直线$x=a$上根的个数则需要作点a的以$f_0(y), f_1(y)$为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_m(y)\} \qquad (3)^a$$

设$f_m(y)$的次数为K，于是

1) 若$K=0$，则a是$f(z)=0$的互素点，$Q(a)\neq 0$，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根。

2) 若$K\geq 1$，则a是$f(z)=0$的非互素点，$Q(a)=0$，点a的以$f_m(y), f_m'(y)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点y $(y\in R)$的变号数分别记为$V_y^{f_m}$和$U_y^{f_m}$，于是$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=0$时，$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=0$，$(4)^a$没有实根，$a$是$f(z)=0$复根的非实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根；$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=k_1\geq 1$时，设$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=k_a$，则$(4)^a$有$k_1$个各不相同的实根，包含重根则有$k_a$个实根，$a$是$f(z)=0$复根的实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上有$k_1$个各不相同的根，包含重根则有$k_a$个根。

2. 出现情况(B)时，从该行开始往下的每一行系数均为零，利用点a的卢斯表格不仅可以判断$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上根的个数，还可计算其在直线$x=a$上根的个数，方法如下：

设卢斯表格从第$m+2$行开始往下的每一行系数均为零，则第$m+1$行系数所代表的多项式$f_m(y)$是$f_0(y), f_1(y)$的一个最大公因式，其次数$K\geq 1$，a是$f(z)=0$的非互素点，$Q(a)=0$。在《自动控制原理》教材中，将$f_m(y)$作为辅助多项式，先求$f_m(y)$对y的导数$f_m'(y)$，并用$f_m'(y)$的系数替换第$m+2$行的零系数，再继续计算卢斯表格。若又出现某行系数均为零的情况，则照此办理。这样得到的点a的卢斯表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，其最左列系数的变号数W_a即为$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上的根的个数。

这样做事实上是在构建点a的以$f_m(y), f_m'(y)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型：点a的卢斯表格从第$m+1$行开始往下的每一行系数都相应代表标准型或扩展型序列中的一个多项式，于是与1. 2)相同，$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=0$时，$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=0$，$a$是$f(z)=0$复根的非实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根；$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=k_1\geq 1$时，设$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=k_a$，

则a是$f(z)=0$复根的实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上有k_1个各不相同的根，包含重根则共有k_a个根。

假如出现情况(B)按上述方法处理又出现情况(A)，则用无穷小正数ε来代替这个零，使表格可继续运算下去。由此得到的卢斯表格，其最左列系数的变号数W_a即为$f(z)=0$在直线$x=a$的右半平面上根的个数。然后作点a的以$f_m(y), f_m'(y)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型，计算$f(z)=0$在直线$x=a$上根的个数。

对实轴上的任意点a，上述讨论解决了$f(z)=0$在点a的卢斯表格最左列系数中有零系数情况下如何继续计算表格的问题。在以后的表述中不再提起最左列系数原来是否有零系数，而只说最左列系数的变号数为W_a，相信不会引起混淆。

由点a的卢斯表格和$(3)^a$内的$f_m(y)$可分别求得与$f(z)=0$复根有关的两个数：一个是W_a，另一个是k_a。W_a反映的是$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上的根的个数，当且仅当$W_a=0$时，$f(z)=0$在直线$x=a$的右半平面上没有根。k_a表示$f(z)=0$在直线$x=a$上根的个数(含重根)，当且仅当$k_a=0$时，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根，其中$Q(a)=0$时，a是$f(z)=0$的非互素点，$f_m(y)$的次数$K\geq 1$，则$k_a=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$；$Q(a)\neq 0$时，$a$是$f(z)=0$的互素点，$f_m(y)$的次数$K=0$，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根，即$k_a=0$。

于是找到了判定$f(z)=0$在z平面与虚轴平行的任意一条直线上及其右半平面上有没有根以及有几个根的方法，写成命题则有

引理　设$a\in R$，则$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上根的个数为k_a，在其右半平面上根的个数为W_a。

定理 2　设$\alpha<\beta$，则$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$内共有$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)$个根。

证明　根据引理，则$f(z)=0$在直线$x=\alpha$的右半平面上根的个数为W_a，在直线$x=\beta$上及其右半平面上根的个数合计为$W_\beta+k_\beta$，于是在$\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$内共有$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)$个根。】

定理 2 给出了判定$f(z)=0$在z平面与虚轴平行的任意一个带形区域内有没有根以及有几个根的方法，于是有

定义 2　设$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0>0$)，则将$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re} z<\beta$内的$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)=q$个根组成的集合记作

$$\mathop{{}^{(\alpha\ ,\qquad \beta)}_{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\quad (\text{简写成}\mathop{{}^{(\alpha\ ,\qquad \beta)}_{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}}\sqrt{f(\ )})$$

其中 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 在 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 左上方记为 $(\alpha,\ \beta)$； $W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)$ 记在左下方。于是

1) $q=0$ 时， $\mathop{{}^{(\alpha\ ,\qquad \beta)}_{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (=\mathop{{}^{(\alpha\ ,\qquad \beta)}_{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}}\sqrt{f(\ )})=\phi$

2) $q\geq 1$ 时，若这 q 个根为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ ，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\mathop{{}^{(\alpha\ ,\qquad \beta)}_{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (=\mathop{{}^{(\alpha\ ,\qquad \beta)}_{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}}\sqrt{f(\ )})$$

这时 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 为根 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 的存在区域，若 $k_\beta=0$ ，则 $W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)$ 中的 k_β 可以不写，即 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\mathop{{}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (=\mathop{{}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}\sqrt{f(\ )})$

定理 3 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\ (a_0>0)$，若 $\alpha<\beta$ ，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则 $k_\alpha=0$ ， $k_\beta=0$ ， $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内共有 $W_\alpha-W_\beta$ 个根。若 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$ ，则 $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\geq 1$，$f(z)=0$ 复根在区间 (α,β) 内至少有一个实部点，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ ，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\mathop{{}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (=\mathop{{}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}\sqrt{f(\ )})$$

证明 由题设则 α 和 β 都是 $f(z)=0$ 的互素点，故 $k_\alpha=0$，$k_\beta=0$，由定理 2，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内共有 $W_\alpha-W_\beta$ 个根。若 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$， 则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内至少有一个根，设为 $z_1=x_1+iy_1$，其中 $x_1\in R$， $y_1\in R$ 且 $\alpha<\operatorname{Re}z_1=x_1<\beta$， 于是 $z_1=x_1+iy_1$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_1$ 上的根，由第三章§2 定理 6 推论 6 和定理 2，则 y_1 是 $(4)^{x_1}$ 的实根， $Q(x_1)=0$， 又 $\alpha<x_1<\beta$， 故 $V_\alpha^Q-V_\beta^Q\geq 1$， x_1 是 $f(z)=0$ 复根在 (α,β) 内的一个实部点。再由定义 2 即得。】

推论 设 $\alpha<\beta$， $Q(\alpha)\neq 0$， $Q(\beta)\neq 0$，若 $V_\alpha^Q-V_\beta^Q=0$， 则 $W_\alpha-W_\beta=0$ 。

证明 由定理 3 即得。】

由推论，若 $Q(x)=0$ 在 (α,β) 内没有根，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内没有根。

定理 4 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\ (a_0>0)$， $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$， $W_\alpha-W_\beta=q$，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内共有 q 个根，于是 $q=0$ 时， x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，

且

$$ {}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}\,)=\phi\ 。$$

$q\geq 1$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根都在直线 $x=x_0$ 上，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}\,)$，其中 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合 ${}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 即为实部点 x_0 的同实部根全集。

证明 由题设则 $\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，再由定理 3，第七章§3 定理 2 和 3 及其推论即得。】

下面给出同实部根**全集根号**定义

定义 3 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0>0$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，$q\geq 1$，则将 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内直线 $x=x_0$ 上的 q 个根组成的集合记作

$$ {}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\quad (\text{简写成}\ {}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}\,)$$

它是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集，其中 $|(\alpha,\ \beta)|$ 表示带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的 q 个根的隔离区域，竖在 $(\alpha,\ \beta)$ 外边的“| |”表示实部点 x_0 的同实部根已经与其它实部点的同实部根隔离的意思，于是也称 $|(\alpha,\ \beta)|$ 是实部点 x_0 的同实部根的隔离区域，记在 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 左上方；$W_\alpha-W_\beta$ 记在左下方。若这 q 个根为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\ (={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}\,)$

推论 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0>0$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内共有 q 个根，于是 $q\geq 1$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根都在直线 $x=x_0$ 上，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

$$(\text{简写成}\ \{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}\,)$$

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成

的集合 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{\substack{\\ W_\alpha - W_\beta}}(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)$ 即为实部点 x_0 的同实部根全集。

证明 由定理 4 和定义 3 即得。】

全集根号还有另一定义

定义 4 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，点 x_0 的以 $f_m(y), f_m^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点 y $(y\in R)$ 的变号数分别记为 $V_{,y}^{f_m}$ 和 $U_y^{f_m}$，$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$。若 $k_{x_0}\geq 1$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，将 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的 k_{x_0} 个根组成的集合记作

$$\sideset{^{x_0}_{k_{x_0}}}{}{\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}}\quad (\text{简写成}\ \sideset{^{x_0}_{k_{x_0}}}{}{\sqrt{f(\ )}})$$

它是实部点 x_0 的同实部根全集，直线 $x=x_0$ 称为根的存在线，在 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 左上方记为 x_0；k_{x_0} 为根的个数，记在 $\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 左下方。若这 k_{x_0} 个根为 $z_1,z_2,\cdots,z_{k_{x_0}}$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_{k_{x_0}}\}=\sideset{^{x_0}_{k_{x_0}}}{}{\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}}\ (=\sideset{^{x_0}_{k_{x_0}}}{}{\sqrt{f(\ )}})$$

定义 4 中，$\alpha<x_0<\beta$，$Q(x_0)=0$，若 $f(x_0)=0$，则 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根，否则 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的 $\dfrac{k_{x_0}}{2}$ 对共轭根的实部。若 $(f(z), f^{'}(z))=1$，根据第三章§7 定理 5 推论 2，则 $(4)^{x_0}$ 的所有复根各不相等，即 $(4)^{x_0}$ 没有重根，$(f_m(y), f_m^{'}(y))=1$，故点 x_0 的以 $f_m(y), f_m^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的扩展型=标准型，在点 y $(y\in R)$ 的变号数有 $U_y^{f_m}=V_y^{f_m}$。

定理 5 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$ 个根，则

1) $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q$；

2) $q\geq 1$ 时，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则有 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sideset{^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}}{}{\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}}=\sideset{^{x_0}_{q}}{}{\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}}$。

$$(\text{简写成}\left\{z_1,z_2,\cdots,z_q\right\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )})$$

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集，它既可用 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 表示，也可用 ${}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 表示。

证明 1) 由题意根据定理 4，则 $q=0$ 时， x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，于是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上没有根， $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=0$，故 $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q=0$。$q\geq 1$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\mathrm{Re}\,z<\beta$ 内的 q 个根都在直线 $x=x_0$ 上，。故 $W_\alpha-W_\beta=q=k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$。总之，$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q$。

2) $q\geq 1$ 时，由 1) 则 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，由定义 4，则 $\left\{z_1,z_2,\cdots,z_{k_{x_0}}\right\}=\left\{z_1,z_2,\cdots,z_q\right\}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

再由定理4推论，就有 $\left\{z_1,z_2,\cdots,z_q\right\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 于是命题成立。】

综上所述，设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，$q\geq 1$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点， $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则 $\left\{z_1,z_2,\cdots,z_q\right\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

$$(\text{简写成}\left\{z_1,z_2,\cdots,z_q\right\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )})$$

根据第三章§3 定理 12，则 $(4)^{x_0}$ 共有 q 个实根，这 q 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的 q 个根的虚部。

定理 6 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0>0$），$b$ 为有限实数，结式 $Q(x)=A_0x^{n^2}+A_1x^{n^2-1}+\cdots+A_{n^2-1}x+A_{n^2}$， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，令 $s=z-b$，

$$t(s)=\frac{f^{(n)}(b)}{n!}s^n+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(b)}{1!}s+f(b)$$

$t(s)=0$ 在点 $\alpha-b$ 和点 $\beta-b$ 的卢斯表格最左列系数的变号数分别记为 $W_{\alpha-b}^t$ 和 $W_{\beta-b}^t$，则

1) $W_\alpha-W_\beta=W_{\alpha-b}^t-W_{\beta-b}^t$；

2) $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 的充要条件是：$\{z_1-b,z_2-b,\cdots,z_q-b\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}=$

$$\sqrt[|(\alpha-b,\ \beta-b)|]{}_{W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}={}^{x_0-b}_{q}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}$$

证明 由题设则 $t(s)=t(z-b)=f(z)$。又 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，根据第一章§3 定理 1，则 $x_0-b=s_0={}^{[\alpha-b,\beta-b]}\sqrt{\left(\frac{Q^{(n^2)}(b)}{n^2!},\frac{Q^{(n^2-1)}(b)}{(n^2-1)!},\cdots,\frac{Q'(b)}{1!},Q(b)\right)}$

1) 根据预 章定理 6 推论 3，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\mathrm{Re}\,z<\beta$ 内根的个数等于 $t(s)=0$ 在 $\alpha-b<\mathrm{Re}\,s<\beta-b$ 内根的个数。根据定理 4，即 $W_\alpha-W_\beta=W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}$。

2) 证必要性。若 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，由定理 4 推论，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\mathrm{Re}\,z<\beta$ 内的 q 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 都在直线 $x=x_0$ 上，由 1)，则 $W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}=q\geq 1$，由定理 4 推论及预章定理 6 推论 3，则 $s_0=x_0-b$ 是 $t(s)=0$ 复根的实部点，$t(s)=0$ 在 $\alpha-b<\mathrm{Re}\,s<\beta-b$ 内的 q 个根 $s_1=z_1-b$，$s_2=z_2-b$，$\cdots$，$s_q=z_q-b$ 都在直线 $x=x_0-b$ 上，根据定理 5，$t(s)=0$ 在 s 平面直线 $x=x_0-b$ 上共有 $k_{x_0-b}=q$ 个根，而且

$\{z_1-b,z_2-b,\cdots,z_q-b\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}=$

$$\sqrt[|(\alpha-b,\ \beta-b)|]{}_{W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}={}^{x_0-b}_{q}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}$$

再证充分性。若 $\{z_1-b,z_2-b,\cdots,z_q-b\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}=$

$$\sqrt[|(\alpha-b,\ \beta-b)|]{}_{W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}={}^{x_0-b}_{q}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}$$

则 $W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}=q\geq 1$，由定理 4 推论，则 $s_0=x_0-b$ 是 $t(s)=0$ 复根的实部点，$t(s)=0$ 在 $\alpha-b<\mathrm{Re}\,s<\beta-b$ 内的 q 个根 $s_1=z_1-b$，$s_2=z_2-b$，$\cdots$，$s_q=z_q-b$ 都在直线 $x=x_0-b$ 上。由 1)，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，由定理 4 推论及预 章定理 6 推论 3，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实

部点， $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 都在直线 $x=x_0$ 上，根据定理 5，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，而且

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\text{。】}$$

§4 复根隔离的基本思想和系列根号的同步计算

设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0>0$)，在 z 平面的实轴上任意取一点 a，结式 $Q(x)=A_0x^{n^2}+A_1x^{n^2-1}+\cdots+A_{n^2-1}x+A_{n^2}$，若 a 是 $Q(x)=0$ 的实根，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点，否则 a 是 $f(z)=0$ 的互素点。假设 $Q(x)=0$ 各不相同的实根个数为 H，那么 $f(z)=0$ 的非互素点个数也为 H ($H\le n^2$)，在实轴上除了这 H 个非互素点外，其余都是 $f(z)=0$ 的互素点。于是在实轴上任取一点 a，则 a 恰好是 $f(z)=0$ 的非互素点的可能性极低(几乎为零)，而 a 是 $f(z)=0$ 的互素点的可能性却极高(几乎是百分之百)。

在 z 平面上，我们称实轴上的区间 (α,β) 是与带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 相对应的区间，而带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 是与区间 (α,β) 相对应的区域。

复根隔离的**基本思想**：首先，找到 n 次方程 $f(z)=0$ 的 n 个复根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的存在区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$，其中 α,β 均为有限实数，$Q(\alpha)\ne0$，$Q(\beta)\ne0$，$W_\alpha=n$，$W_\beta=0$，于是有

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{(\alpha\quad,\quad\beta)}{\underset{n\quad-\quad0}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其次，对带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 进行分割及判断，假设在区间 (α,β) 内取到的分割点都是 $f(z)=0$ 的互素点，计算其相应的卢斯表格，就可将 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 分割成若干个带形的子区域，在每个子区域内 $f(z)=0$ 根的个数可以简单计算。若在某个子区域内 $f(z)=0$ 根的个数为零，则把该子区域舍去，剩下的每个子区域内都含有 $f(z)=0$ 若干个根，组成的集合可用分根号表示。然后在剩下区域相对应的区间内，判断 $Q(x)=0$ 各不相同的实根个数。

1. 若为 1，则 $Q(x)=0$ 在该区间内只有一个实根，它是 $f(z)=0$ 复根的实部点，该区域内 $f(z)=0$ 的复根都在通过该实部点并且与虚轴平行的直线上，它们具有相同的实部，于是该区域为 $f(z)=0$ 复根的该实部点的同实部根的隔离区域；

2. 若大于 1，则对该区域继续进行这种分割判断工作，直到每个子区域(都含有 $f(z)=0$ 若干个根)相对应的区间内，$Q(x)=0$ 各不相同的实根个数都为 1 为止，其各区域都是 $f(z)=0$ 复根各实部点的同实部根的隔离区域。

利用卢斯表格和 $Q(x)=0$ 以及施图姆定理，对 $f(z)=0$ 的 n 个复根的存在区域所进行的这种分割判断工作，其实际效果是将 $f(z)=0$ 的所有复根按实部大小进行分割、分

类，并不断地将实部相等的复根归为一类的过程，而且只要经过有限多次的分割判断就能找到 $f(z)=0$ 复根所有实部点的同实部根的隔离区域 $\left|(\alpha_j,\ \beta_j)\right|$，$j=1,2,\cdots,J$，其中 $J\le H$ 且 $J\le n$，$\alpha_1<\beta_1\le\alpha_2<\beta_2\le\cdots\le\alpha_J<\beta_J$，使得

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\substack{(\alpha\ ,\ \beta)\\ n\ -\ 0}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\bigcup_{j=1}^{J}\sqrt[\substack{\left|(\alpha_j,\ \beta_j)\right|\\ W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $Q(\alpha_j)\neq 0$，$Q(\beta_j)\neq 0$，$V_{\alpha_j}^{Q}-V_{\beta_j}^{Q}=1$，$W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}=q_j\ge 1$，$j=1,2,\cdots,J$。于是 $f(z)=0$ 复根的所有实部点为

$$x_j=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\ (=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{Q(\ )}),\quad j=1,2,\cdots,J$$

其中 x_j 是 $Q(x)=0$ 的 $L_j=U_{\alpha_j}^{Q}-U_{\beta_j}^{Q}$ 重根。$f(z)=0$ 复根的非实部点的个数为 $H-J$。

在实部点 x_j 的同实部根全集 $\sqrt[\substack{\left|(\alpha_j,\ \beta_j)\right|\\ W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$ 中，$f(z)=0$ 复根(含重根)的个数 $q_j=W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}$，$j=1,2,\cdots,J$。这 q_j 根都在 z 平面直线 $x=x_j$ 上，由§3 定理 5，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_j$ 上共有 $k_{x_j}=q_j$ 个根，且 $\sqrt[\substack{\left|(\alpha_j,\ \beta_j)\right|\\ W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\substack{x_j\\ q_j}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。由第三章§3 定理 12，则 $(4)^{x_j}$ 共有 q_j 个实根，这 q_j 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_j$ 上 q_j 个根的虚部，且 $\sum_{j=1}^{J}q_j=\sum_{j=1}^{J}\left(W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}\right)=n$。

设 $(4)^{x_j}$ 的次数为 K_j，则 $K_j\le L_j$，其中 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，$K_j=L_j$，$j=1,2,\cdots,J$。

如果继续对隔离区域 $\left|(\alpha_j,\ \beta_j)\right|$ 用中点分割法进行不断地分割及判断，就能得到 x_j 充分好的近似值($j=1,2,\cdots,J$)。

上述为隔离的基本思想，但要找到 $f(z)=0$ 复根所有实部点的同实部根的隔离区域，还有便捷方法：

1. 先求出 $Q(x)=0$ 的所有各不相同的实根

$$x_j=\sqrt[{\lfloor\alpha_j,\beta_j\rfloor}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\ (=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{Q(\ )}),\quad j=1,2,\cdots,H$$

2. 对 x_j $(j=1,2,\cdots,H)$ 进行鉴别，不妨设 x_{j_0} 是其中任意一个，于是

1) 若 $W_{\alpha_{j_0}}-W_{\beta_{j_0}}=0$，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，舍去；

2) 若 $W_{\alpha_{j_0}}-W_{\beta_{j_0}}=q_{j_0}\ge 1$，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$\alpha_{j_0}<\operatorname{Re}z<\beta_{j_0}$ 是 $f(z)=0$

在 z 平面直线 $x=x_{j_0}$ 上的 q_{j_0} 个根的隔离区域，即该区域为复根实部点 x_{j_0} 的同实部根的隔离区域。

3. 将 2. 中找到的 $f(z)=0$ 复根所有实部点的同实部根的隔离区域重新排序记为 $\left|\left(\alpha_j,\ \beta_j\right)\right|$，$j=1,2,\cdots,J$，其中 $J\le H$ 且 $J\le n$，$\alpha_1<\beta_1\le\alpha_2<\beta_2\le\cdots\le\alpha_J<\beta_J$，$Q(\alpha_j)\ne0$，$Q(\beta_j)\ne0$，$V_{\alpha_j}^Q-V_{\beta_j}^Q=1$，$W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}=q_j\ge1$，$j=1,2,\cdots,J$。于是 $f(z)=0$ 复根所有实部点为

$$x_j=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\ (=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{Q(\ )}),\quad j=1,2,\cdots,J$$

其中 x_j 是 $Q(x)=0$ 的 $L_j=U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q$ 重根。n 次方程 $f(z)=0$ 的 n 个复根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的所组成的集合 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\bigcup_{j=1}^{J}\sqrt[{\substack{|(\alpha_j,\ \beta_j)|\\ W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$

分析最大实部根问题

性质 设 $x_J=\sqrt[{[\alpha_J,\beta_J]}]{Q(\ )}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 复根的最大实部点，$W_{\alpha_J}-W_{\beta_J}=q_J\ge1$，则 $W_{\beta_J}=0$，$W_{\alpha_J}=q_J$，而且 $f(z)$ 在点 β_J 的泰勒展开式的所有系数 $\frac{f^{(n)}(\beta_J)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(\beta_J)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(\beta_J)}{1!}$, $f(\beta_J)$ 均为正数。

证明 由题设则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=\beta_J$ 及其右半平面上没有根，根据§2 定理 1，则 $f(z)=0$ 在点 β_J 的卢斯表格最左列的 $n+1$ 个系数均为正数，$W_{\beta_J}=0$，于是 $W_{\alpha_J}=q_J$；再由§2 定理 3 推论 2 即知命题成立。】

若 $x_J=\sqrt[{[\alpha_J,\beta_J]}]{Q(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根的最大实部点($W_{\alpha_J}-W_{\beta_J}=q_J\ge1$)，由性质，则 $W_{\beta_J}=0$，$W_{\alpha_J}=q_J$，于是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_J$ 上有 $k_{x_J}=q_J=W_{\alpha_J}$ 个根，在其右半平面上没有根(求在直线 $x=x_J$ 上的这 W_{α_J} 个根的问题，就是数学史上的最大实部根问题)，故 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于点 x_J 严格对称的根的个数为 W_{α_J}，由第三章§4 定理 2 推论和§3 定理 12 则 $(4)^{x_J}$ 的次数为 W_{α_J}，$(4)^{x_J}$ 有 W_{α_J} 个实根，这 W_{α_J} 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_J$ 上的 W_{α_J} 个根的虚部。

另一方面，根据§2 定理 2，则 $f(z)=0$ 在点 x_J 的卢斯表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-W_{\alpha_J}$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系

数所代表的W_{α_J}次方程$(4)^{x_J}$有W_{α_J}个实根，这W_{α_J}个实根就是$f(z)=0$在直线$x=x_J$上W_{α_J}个根的虚部。

下面研究系列根号的**同步计算**

定理 1 设$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$a_0>0$），$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，于是

1. 若$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$\sqrt[{\substack{|(\alpha,\ \beta)| \\ W_\alpha-W_\beta}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[{\substack{\frac{\alpha+\beta}{2} \\ q}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$或$V^Q_\beta$，其中

1) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

$$\sqrt[{\substack{|(\alpha,\ \beta)| \\ W_\alpha-W_\beta}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[{\substack{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)| \\ W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

$$\sqrt[{\substack{|(\alpha,\ \beta)| \\ W_\alpha-W_\beta}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[{\substack{|(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2})| \\ W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

证明 由$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则$\alpha,\beta$均为有限实数，且$\alpha<x_0<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(x_0)=0$，$Q(\beta)\neq 0$，$V^Q_\alpha-V^Q_\beta=1$。根据第一章§2 定理 1，有

1. 若$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$。

$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，由§3 定理 5，则$f(z)=0$在直线$x=\frac{\alpha+\beta}{2}$上共有$k_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=q$个根，且

$$\sqrt[{\substack{|(\alpha,\ \beta)| \\ W_\alpha-W_\beta}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[{\substack{\frac{\alpha+\beta}{2} \\ q}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$或$V^Q_\beta$，其中

1) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$时，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

而 $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，$V_{\alpha}^{Q}-V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=0$，由§3 定理 3 推论，则 $W_{\alpha}-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=0$，

$W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_{\beta}=W_{\alpha}-W_{\beta}=q\geq 1$，故 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{W_{\alpha}-W_{\beta}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|]{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_{\beta}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$。

2) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=V_{\beta}^{Q}$ 时，与 1)同理可证。】

若 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$W_{\alpha}-W_{\beta}=q\geq 1$，由定理 1 就可用中点变号数分割法同步计算 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$ 和 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{W_{\alpha}-W_{\beta}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，方法如下：

1. 用中点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 把闭区间 $[\alpha,\beta]$ 分成两半

1) 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{W_{\alpha}-W_{\beta}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\frac{\alpha+\beta}{2}]{q}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则计算以 $Q(x),Q'(x)$ 为基的施图姆序列标准型在点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的变号数 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}$。$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=V_{\alpha}^{Q}$ 时，记 $\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\beta_1=\beta$；$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=V_{\beta}^{Q}$ 时，记 $\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，由定理 1，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\alpha_1,\beta_1]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，

$$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{W_{\alpha}-W_{\beta}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[|(\alpha_1,\ \beta_1)|]{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$，$\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

2. 以 $[\alpha_1,\beta_1]$ 作为 x_0 的新的隔离区间，重复上述做法

1) 若 $Q(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})=0$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha_1,\beta_1]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$，

$$\sqrt[|(\alpha_1,\ \beta_1)|]{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]{q}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2) 若 $Q(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})\neq 0$，则有

$$x_0=\sqrt[[\alpha_1,\beta_1]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\alpha_2,\beta_2]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\sqrt[|(\alpha_1,\ \beta_1)|]{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[|(\alpha_2,\ \beta_2)|]{W_{\alpha_2}-W_{\beta_2}}{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $x_0 \in (\alpha_2,\beta_2) \subset (\alpha_1,\beta_1)$， $\beta_2-\alpha_2=\dfrac{1}{2^2}(\beta-\alpha)$。

3. 如此重复 N 次，可得

$$x_0={}^{[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$$

$$={}^{|(\alpha_{N-1},\ \beta_{N-1})|}_{W_{\alpha_{N-1}}-W_{\beta_{N-1}}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{|(\alpha_N,\ \beta_N)|}_{W_{\alpha_N}-W_{\beta_N}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $x_0 \in (\alpha_N,\beta_N) \subset (\alpha_{N-1},\beta_{N-1}) \subset \cdots \subset (\alpha_1,\beta_1) \subset (\alpha,\beta)$，$\beta_N-\alpha_N=\dfrac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。若以 α_N 或 β_N 作为 x_0 的近似值，则误差小于 $\dfrac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。

若继续这种构造区间的步骤，将得到闭区间序列，后一个闭区间包含在前一个闭区间中，它是一递缩的闭区间套 ：$[\alpha,\beta]\supset[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2]\supset\cdots\supset[\alpha_N,\beta_N]\supset\cdots\cdots$

由于 $\lim\limits_{N\to\infty}(\beta_N-\alpha_N)=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\beta-\alpha}{2^N}=0$，所以两变量 α_N 和 β_N 趋向于共同的极限，设为 a，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha_N=\lim\limits_{N\to\infty}\beta_N=a$ 且 $\alpha<a<\beta$， 于是 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=a$

$$={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{a}_{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

引理 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($a_0>0$)， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，且 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$， 则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点， $W_\alpha-W_\beta=q\ge1$， 且有

1. $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=0$ 的充要条件是 $Q(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=0$。

2. 若 $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\ne0$， 则 $Q(\dfrac{\alpha+\beta}{2})\ne0$， $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 或 V_β， 其中

   1) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 时， $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$； 2) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$ 时， $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$ 。

证明 由题设则 $\alpha<x_0<\beta$， $f(x_0)=0$， $z=x_0$ 就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的根，由第七章§1 定理 1 和§3 定理 2 推论，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内至少有一个根，于是 $W_\alpha-W_\beta=q\ge1$。

当 $n=1$ 时， $Q(z)=f(z)$；当 $n\ge2$ 时，有 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$， 于是

1. 若 $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $Q(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=0$；反过来，若 $Q(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=0$，根据第一章§2 定理 1，则 $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， 于是 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$， $f(\dfrac{\alpha+\beta}{2})=0$ 。

2. 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，由 1. 则 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，再由第一章§2 定理 1，则 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 或 V_β；$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 或 V^Q_β，其中

1) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 时，$x_0={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，$x_0\in(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)$。假如 $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$，则 $x_0={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$x_0\in(\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2})$，矛盾。故 $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$。

2) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$ 时，与 1)同理可证。】

定理 2 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\,(a_0>0)$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，且 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，于是

1. 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 或 V_β，其中

1) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \ \beta)|}{\underset{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\alpha,\ \ \frac{\alpha+\beta}{2})|}{\underset{W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

证明 根据引理和定理 1 及第一章§2 定理 1 即得。】

定理 3 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\,(a_0>0)$，$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，且 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，以 $f(z),f^{'}(z)$为基的施图姆序列标准型的最后多项式没有实根，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，于是

1. 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\sqrt[\substack{|(\alpha,\ \beta)|\\ W_\alpha-W_\beta}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\substack{\frac{\alpha+\beta}{2}\\ q}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 1) $f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$ 时，有

$$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)},$$

$$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\sqrt[\substack{|(\alpha,\ \beta)|\\ W_\alpha-W_\beta}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\substack{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|\\ W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) $f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$ 时，有 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，

$$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\sqrt[\substack{|(\alpha,\ \beta)|\\ W_\alpha-W_\beta}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\substack{|(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2})|\\ W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

证明 根据定理 2 及第一章§2 定理 3 即得。】

当$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$时，以 $f(z),f^{'}(z)$为基的施图姆序列标准型的最后多项式是非零常数，它当然没有实根。如果标准型的最后多项式没有实根，由定理 3 就可用普通二分法来同步计算 $f(z)=0$ 的单实根 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，以及 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$ 和 $\sqrt[\substack{|(\alpha,\ \beta)|\\ W_\alpha-W_\beta}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，方法如下：

1. 用中点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 把闭区间 $[\alpha,\beta]$分成两半

1) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2) 若 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$ 时，记 $\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\beta_1=\beta$；$f(\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$ 时，记 $\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$。由定理 3，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\alpha_1,\ \beta_1)|}{\underset{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$，$\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

2. 以 $[\alpha_1,\beta_1]$ 作为新的隔离区间，重复上述做法

1) 若 $f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2},$$

$$\overset{|(\alpha_1,\ \beta_1)|}{\underset{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2) 若 $f(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})\neq 0$，则有 $x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\alpha_2,\beta_2]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，

$$x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_2,\beta_2]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha_1,\ \beta_1)|}{\underset{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\alpha_2,\ \beta_2)|}{\underset{W_{\alpha_2}-W_{\beta_2}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_2,\beta_2)\subset(\alpha_1,\beta_1)$，$\beta_2-\alpha_2=\frac{1}{2^2}(\beta-\alpha)$。

3. 如此重复 N 次，可得 $x_0={}^{[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，

$$x_0={}^{[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha_{N-1},\ \beta_{N-1})|}{\underset{W_{\alpha_{N-1}}-W_{\beta_{N-1}}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\alpha_N,\ \beta_N)|}{\underset{W_{\alpha_N}-W_{\beta_N}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_N,\beta_N)\subset(\alpha_{N-1},\beta_{N-1})\subset\cdots\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$，$\beta_N-\alpha_N=\dfrac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。若以 α_N 或 β_N 作为 x_0 的近似值，则误差小于 $\dfrac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。

若继续这种构造区间的步骤，将得到闭区间序列，后一个闭区间包含在前一个闭区间中，它是一递缩的闭区间套：$[\alpha,\beta]\supset[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2]\supset\cdots\supset[\alpha_N,\beta_N]\supset\cdots\cdots$

由于 $\lim\limits_{N\to\infty}(\beta_N-\alpha_N)=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{\beta-\alpha}{2^N}=0$，所以两变量 α_N 和 β_N 趋向于共同的极限，设为 a，则 $a\in(\alpha,\beta)$，于是

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=a$$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=a$$

$$\genfrac{}{}{0pt}{}{|(\alpha,\ \beta)|}{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{q}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}\text{。}$$

引理 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$n\geq 2$，$a_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，且 $f(x_0)\neq 0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，于是

1. $M(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$ 的充要条件是 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$。

2. 若 $M(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，$V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$ 或 V^M_β，其中

   1) $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$ 时，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$；2) $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\beta$ 时，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$。

证明 由题设 $n\geq 2$，则有 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，于是

1. 必要性显然，证充分性。若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，根据第一章§2 定理 1，则 $x_0=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，又 $f(x_0)\neq 0$，则 $M(x_0)=M(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$。

2. 若 $M(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，由 1.则 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，再由第一章§2 定理 1，则 $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$ 或 V^M_β，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 或 V^Q_β，并且与定理 2 引理同理可证 1) $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$ 时，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$；2) $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\beta$ 时，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$。】

定理 4 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$n\geq 2$，$a_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，且 $f(x_0)\neq 0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$，于是

1. 若 $M(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若 $M(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$ 或 V^M_β，其中

1) $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \ \beta)|}{\underset{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) $V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\beta$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\overset{|(\alpha,\ \ \frac{\alpha+\beta}{2})|}{\underset{W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

证明 根据引理和定理 1 及第一章§2 定理 1 即得。】

引理 设 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，$d(z)$是 $f(z),M(z)$的一个最大公因式，若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$，且$V_\alpha-V_\beta=V^M_\alpha-V^M_\beta=1$，于是

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}。$$

其中$\alpha<x_0<\beta$，$d(x_0)=0$，$f(x_0)=0$，$M(x_0)=0$，$Q(x_0)=0$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，$M(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$；

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，$M(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$；$V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 或 V^d_β，其中

1) $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 时，$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\alpha$，$V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\alpha$，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$；

2) $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\beta$ 时，$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V_\beta$，$V^M_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^M_\beta$，$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$。

证明 若 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$，显然 $\alpha<\beta$，$V^d_\alpha-V^d_\beta=1$，于是 $V_\alpha-V_\beta=V^M_\alpha-V^M_\beta=V^d_\alpha-V^d_\beta=1$，根据第六章§2 定理 5，则 $V^Q_\alpha-V^Q_\beta=1$，且有

$$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{M(\ )}=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}。$$

其中 $\alpha<x_0<\beta$，$d(x_0)=0$，$f(x_0)=0$，$M(x_0)=0$，$Q(x_0)=0$，$z=x_0$ 就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的根，由第七章§1 定理 1 和§3 定理 2 推论，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内至少有一个根，故 $W_\alpha-W_\beta=q\geq1$，于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，根据第一章§2 定理 1，则 $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$，于是结论成立。

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq0$，则 $x_0\neq\frac{\alpha+\beta}{2}$，于是 $f(\frac{\alpha+\beta}{2}),M(\frac{\alpha+\beta}{2}),Q(\frac{\alpha+\beta}{2})$ 全不等于零，否则，不妨设 $f(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，根据第一章§2 定理 1，则 $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$，矛盾。再由第一章§2 定理 1，则 $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 或 V^d_β，并且与定理 2 引理同理可证 1)和 2)成立。

定理 5 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$（$n\geq2$，$a_0>0$），$d(z)$ 是 $f(z),M(z)$ 的一个最大公因式，$d(z)=d_0z^{n_1}+d_1z^{n_1-1}+\cdots+d_{n_1-1}z+d_{n_1}$，若 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，$f(\alpha)\neq0$，$f(\beta)\neq0$；$M(\alpha)\neq0$，$M(\beta)\neq0$，且 $V_\alpha-V_\beta=V^M_\alpha-V^M_\beta=1$，则

$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

且 $W_\alpha-W_\beta=q\geq1$，于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\frac{\alpha+\beta}{2}，$$

$$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}=\frac{\alpha+\beta}{2}，$$

$$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}，$$

$$\sqrt[\substack{|(\alpha,\ \beta)|\\ W_\alpha-W_\beta}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\sqrt[\substack{\frac{\alpha+\beta}{2}\\ q}]{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq0$，则 $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 或 V^d_β，其中

1) $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 时， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}，$$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}，$$

$$\,^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\,^{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|}_{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\beta$ 时， $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}，$$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}，$$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}，$$

$$\,^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\,^{|(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2})|}_{W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

证明 由 $n\ge 2$，则 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，根据引理和定理 1 及第一章§2 定理 1 即得。】

定理 6 设 $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$ ($n\ge 2$， $a_0>0$)， $d(z)$是 $f(z),M(z)$的一个最大公因式， $d(z)=d_0z^{n_1}+d_1z^{n_1-1}+\cdots+d_{n_1-1}z+d_{n_1}$， 以 $d(z),d'(z)$为基的施图姆序列标准型的最后多项式没有实根，若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$， $f(\alpha)\ne 0$， $f(\beta)\ne 0$；$M(\alpha)\ne 0$， $M(\beta)\ne 0$，且 $V_\alpha-V_\beta=V^M_\alpha-V^M_\beta=1$，则

$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

且 $W_\alpha-W_\beta=q\ge 1$，于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}=\frac{\alpha+\beta}{2}，$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})} = \frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} = \overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2}) \neq 0$，则 1) $d(\alpha)d(\frac{\alpha+\beta}{2}) > 0$ 时，有

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})} \overset{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}{=} \sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})},$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} \overset{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}{=} \sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)},$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})} \overset{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}{=} \sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})} \overset{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}{=} \sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} = \overset{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|}{\underset{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}。$$

2) $d(\alpha)d(\frac{\alpha+\beta}{2}) < 0$ 时，有

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})} \overset{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}{=} \sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})},$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} \overset{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}{=} \sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)},$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})} \overset{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}{=} \sqrt{(B_0,B_1,\cdots,B_{\frac{n(n-1)}{2}-1},B_{\frac{n(n-1)}{2}})}$$

$$x_0 \overset{[\alpha,\beta]}{=} \sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})} \overset{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}{=} \sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)} = \overset{|(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2})|}{\underset{W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{}}\sqrt{(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n)}$$

证明 根据定理 5 及第一章§2 定理 3 即得。】

§5 同实部根全集的分类判定与统一解法的关系

定义 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$W_\alpha - W_\beta = q \geq 1$，则 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根实部点 x_0 的同实部根全集，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上共有 $k_{x_0} = q$ 个根，且 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )} = {}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}$，于是1. 当直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根全是 $f(z)=0$ 的实根时，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 q 重实根，则称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全实根类型的同实部根全集。

2. 当直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根不全是 $f(z)=0$ 的实根时，则称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有虚根类型的同实部根全集，其中 1) $f(x_0)=0$ 时，称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集；2) $f(x_0) \neq 0$ 时，称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全虚根类型的同实部根全集。

定理 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$W_\alpha - W_\beta = q \geq 1$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集，则

1. ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全实根类型的同实部根全集的充要条件是：

$$l = U_\alpha - U_\beta = W_\alpha - W_\beta = q\text{。}$$

2. ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有虚根类型的同实部根全集的充要条件是：

$$l = U_\alpha - U_\beta < W_\alpha - W_\beta = q\text{。}$$

其中 1) ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集的充要条件是：

$$1 \leq l = U_\alpha - U_\beta < W_\alpha - W_\beta = q\text{；}$$

2) ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全虚根类型的同实部根全集的充要条件是：$l = U_\alpha - U_\beta = 0$。

证明 由题意，则 $f(z)=0$ 在直线 $x = x_0$ 上共有 q 个根；根据第七章§3 定理 4，则 $l = U_\alpha - U_\beta$，于是 1. 直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根全是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$l = U_\alpha - U_\beta = W_\alpha - W_\beta = q$。2. 直线 $x = x_0$ 上的 q 个根不全是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$l = U_\alpha - U_\beta < W_\alpha - W_\beta = q$。其中 1) $f(x_0)=0$ 的充要条件是：$l \geq 1$；2) $f(x_0) \neq 0$ 的充要条件是：$l = 0$。再由定义即得。】

推论 设$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，$l$为非负整数，$z=x_0$是$f(z)=0$的$l$重根，$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$是$f(z)=0$复根实部点$x_0$的同实部根全集，则$l=U_\alpha-U_\beta$，$l=0$或$1$，其中 1. q为奇数时，$f(z)=0$在z平面直线$x=x_0$上必有实根$z=x_0$，$l=1$，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，于是 1) 若$q=1$，则$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$；2) 若$q$为$\geq 3$的奇数，则$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$为有实根虚根类型的同实部根全集，这个实根就是$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。

2. q为偶数时，$f(z)=0$在z平面直线$x=x_0$上没有实根，$l=0$，$f(x_0)\neq 0$，$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$为全虚根类型的同实部根全集。

证明 由题意，则$f(z)=0$在直线$x=x_0$上的q个根均为单根；由第七章§3 定理 4 推论 2，则$l=U_\alpha-U_\beta$，$l=0$或1，其中$l=0$时，$f(x_0)\neq 0$；$l=1$时，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。再由定理和$f(z)=0$根的性质即得。】

例 1 设$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q=1$，$l$为非负整数，$z=x_0$是$f(z)=0$的$l$重根，由第七章§3 例题，则$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为$f_m(y)=a_{m0}y$，其中$a_{m0}\neq 0$，$a_{m0}$为实数，$l=U_\alpha-U_\beta=1$，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。

显然，$(4)^{x_0}$只有一个单实根0，$f(z)=0$在z平面直线$x=x_0$上只有一个单实根$z=x_0$，于是$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=1$，不妨设$W_\alpha-W_\beta=q$，根据§3 定理 5，则

$$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q=1$$

$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$是$f(z)=0$复根实部点$x_0$的同实部根全集，且$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}=\sqrt[{x_0}]{f(\ )}_1$。

根据定理，则$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素，就是$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，无须再求解。

下面讨论同实部根全集的分类判定与统一解法的关系(为节省篇幅，作者将两种解法结合在一起参与讨论。)

设$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，则$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$是$f(z)=0$复根实部点$x_0$的同实部

根全集，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，且 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数 $K=l+2k\geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，则 0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重根，于是 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由第七章§3 定理 4 推论 1，则 $l=U_\alpha-U_\beta$，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l\geq 1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$。

(若 $\deg\ f(z)\geq 2$，且 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$，则 $(3)^{*x_0}$ 内 $f^*_{m^*}(y^2)$ 的标准式为

$$f^*_{m^*}(y^2)=a_{m^*0}y^{l^*}[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^{*x_0}$$

其关于 y^2 的次数 $K^*=\dfrac{l^*}{2}+k\geq 1$，其中 k 为非负整数，l^* 为 ≥ 0 的偶数，但 k 和 l^* 不能同时为零，$a_{m^*0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 $a_{m^*0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，于是 0 是 $(4)^{*x_0}$ 关于 y^2 的 $\dfrac{l^*}{2}$ 重根，而 $\alpha<x_0<\beta$，$M(x_0)=0$，由第五章§2 定理 9，l 为 ≥ 0 的偶数时，$l^*=l$；l 为奇数时，$l^*=l-1$。)

由 $\alpha<x_0<\beta$，$Q(x_0)=0$，根据第三章§3 定理 3，则 $f(z)=g(z)F_m(z-x_0)$，其中 $F_m(z-x_0)=F_m(iy)=i^K f_m(y)=i^{l+2k}f_m(y)$，于是

$$F_m(z-x_0)=a_{m0}(z-x_0)^l[(z-x_0)^{2k}+\lambda_1(z-x_0)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-x_0)^2+\lambda_k]$$

(由 $\alpha<x_0<\beta$，$M(x_0)=0$，根据第五章§3 定理 3，则 $f(z)=g^*(z)F^*_{m^*}\left((z-x_0)^2\right)$，其中 $F^*_{m^*}\left((z-x_0)^2\right)=F^*_{m^*}\left((iy)^2\right)=i^{2K^*}f^*_{m^*}(y^2)=i^{l^*+2k}f^*_{m^*}(y^2)$，于是

$$F^*_{m^*}\left((z-x_0)^2\right)=a_{m^*0}(z-x_0)^{l^*}[(z-x_0)^{2k}+\lambda_1(z-x_0)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-x_0)^2+\lambda_k])$$

若 k 为正整数，令 $P\left((z-x_0)^2\right)=(z-x_0)^{2k}+\lambda_1(z-x_0)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-x_0)^2+\lambda_k$，则

$$F_m(z-x_0)=a_{m0}(z-x_0)^l P\left((z-x_0)^2\right)\left(F^*_{m^*}\left((z-x_0)^2\right)=a_{m^*0}(z-x_0)^{l^*}P\left((z-x_0)^2\right)\right)$$

再令 $s=(z-x_0)^2=-y^2$，则

$$P(s)=s^k+\lambda_1 s^{k-1}+\cdots+\lambda_{k-1}s+\lambda_k$$

实系数 k 次多项式 $P(s)$ 为点 x_0 的 $P(s)$，且 $P(-\infty)\neq 0$，$P(0)=\lambda_k\neq 0$，$P(+\infty)\neq 0$。

点 x_0 的以 $P(s)$, $P'(s)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点 s $(s\in R)$ 的变号数

分别记为V_s^P和U_s^P，则$P(s)=0$共有$U_{-\infty}^P-U_0^P$个负实根，$P\left((z-x_0)^2\right)=0$以及$F_m(z-x_0)=0$(或$F_{m^*}^*\left((z-x_0)^2\right)=0$)在$z$平面直线$x=x_0$上共有$U_{-\infty}^P-U_0^P$对共轭根，$(4)^{x_0}$共有$U_{-\infty}^P-U_0^P$对非0实根($(4)^{*x_0}$关于$y^2$共有$U_{-\infty}^P-U_0^P$个正实根)，$f(z)=0$在$z$平面直线$x=x_0$上共有$U_{-\infty}^P-U_0^P$对共轭根。$z=x_0$是$f(z)=0$的$l$重根，于是$f(z)=0$在$z$平面直线$x=x_0$上共有$l+2(U_{-\infty}^P-U_0^P)$个根。由§3 定理 5，则有$l+2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q$，${}_{W_\alpha-W_\beta}^{|(\alpha,\ \beta)|}\sqrt{f(\ )}={}_{q}^{x_0}\sqrt{f(\ )}$。又$l=U_\alpha-U_\beta$，于是$2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=\left(W_\alpha-W_\beta\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)=q-l$，根据定理，则

1. $l=U_\alpha-U_\beta=W_\alpha-W_\beta=q$时，${}_{W_\alpha-W_\beta}^{|(\alpha,\ \beta)|}\sqrt{f(\ )}$为全实根类型的同实部根全集，且

$$2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=\left(W_\alpha-W_\beta\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)=q-l=0,\quad l=q\ge 1。$$

$P(s)=0$没有负实根，$f(z)=0$在直线$x=x_0$上没有共轭根，$z=x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$是$f(z)=0$的$q$重实根，于是这$q$个$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$就是同实部根全集${}_{W_\alpha-W_\beta}^{|(\alpha,\ \beta)|}\sqrt{f(\ )}$的全部元素。

2. $1\le l=U_\alpha-U_\beta<W_\alpha-W_\beta=q$时，${}_{W_\alpha-W_\beta}^{|(\alpha,\ \beta)|}\sqrt{f(\ )}$为有实根虚根类型的同实部根全集。且

$$2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=\left(W_\alpha-W_\beta\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)=q-l>0。$$

$q-l$为偶数，$P(s)=0$共有$\dfrac{q-l}{2}$个负实根，于是$P\left((z-x_0)^2\right)=0$以及$F_m(z-x_0)=0$(或$F_{m^*}^*\left((z-x_0)^2\right)=0$)在直线$x=x_0$上共有$\dfrac{q-l}{2}$对共轭根，$(4)^{x_0}$共有$\dfrac{q-l}{2}$对非0实根($(4)^{*x_0}$关于$y^2$共有$\dfrac{q-l}{2}$个正实根)，$f(z)=0$在直线$x=x_0$上共有$\dfrac{q-l}{2}$对共轭根，$z=x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$是$f(z)=0$的$l$重实根，于是$f(z)=0$在直线$x=x_0$上的这$q$个根就是同实部根全集${}_{W_\alpha-W_\beta}^{|(\alpha,\ \beta)|}\sqrt{f(\ )}$的全部元素。

3. $l=U_\alpha-U_\beta=0$时，${}_{W_\alpha-W_\beta}^{|(\alpha,\ \beta)|}\sqrt{f(\ )}$为全虚根类型的同实部根全集，且

$$2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=W_\alpha-W_\beta=q$$

q为偶数，$P(s)=0$共有$\dfrac{q}{2}$个负实根，$P\left((z-x_0)^2\right)=0$以及$F_m(z-x_0)=0$(或$F_{m^*}^*\left((z-x_0)^2\right)=0$)

在直线 $x=x_0$ 上共有 $\frac{q}{2}$ 对共轭根，$(4)^{x_0}$ 共有 $\frac{q}{2}$ 对非 0 实根($(4)^{*x_0}$ 关于 y^2 共有 $\frac{q}{2}$ 个正实根)，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $\frac{q}{2}$ 对共轭根，$z=x_0$ 不是 $f(z)=0$ 的根，于是这 $\frac{q}{2}$ 对共轭复根就是同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的全部元素。

从以上讨论可以看出：1) 全实根类型的同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的 q 个元素就是 q 个 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，无须再求解；2) 对有实根虚根类型的同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$，若能求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ 的精确值 a，则 $a\in R$，$Q(a)=0$，就可以用第七章的统一解法求出 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，它们就是 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的所有元素；3) 对全虚根类型的同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$，若能求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 或 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$ 的精确值 a，也可以用第七章的统一解法求出 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，它们就是 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的所有元素。

例 2 设 $\deg\ f(z)\geq 2$，则有 $Q(z)=\pm f(z)M^2(z)$，不妨设 $d(z)$ 是 $f(z),M(z)$ 的一个最大公因式，若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，$f(\alpha)\neq 0$，$f(\beta)\neq 0$；$M(\alpha)\neq 0$，$M(\beta)\neq 0$，且 $V_\alpha-V_\beta=V_\alpha^M-V_\beta^M=1$，根据§4 定理 5 引理，则

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$$

其中 $\alpha<x_0<\beta$，$d(x_0)=0$，$f(x_0)=0$，$M(x_0)=0$，$Q(x_0)=0$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，故 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根实部点 x_0 的同实部根全集，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根，$l=U_\alpha-U_\beta\geq 1$，于是

1) $l=U_\alpha-U_\beta=W_\alpha-W_\beta=q$ 时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全实根类型的同实部根全集，这时这 q 个 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ (或写成 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$)就是同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的全部元素。

2) $1\leq l=U_\alpha-U_\beta<W_\alpha-W_\beta=q$ 时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是有实根虚根类型的同实部根全集。如果能求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$ 的精确值 a，则 $a\in R$，$Q(a)=0$，也同样可以用第七章的统一

解法求出 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根。

要通过实根号运算或者计算求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$(包括 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 精确值 a 是有难度的，但也不是绝无可能。假如 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 所有复根中重数最大的根，那么通过以 $f(z), f^{'}(z)$ 为基的施图姆序列扩展型内部的实根号运算，是可以求得其精确值 a 的。对 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{M(\ )}$(包括 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 也同样如此。

如此不便就有必要探求 $(f(z), f^{'}(z))=1$ 条件下，$f(z)=0$ 的统一近似解法。

§6 方程复根统一近似解法

近似解法一

设 $\deg f(z)\geq 2$，$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，则 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$ 是 $f(z)=0$ 复根实部点 x_0 的同实部根全集，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，且 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}={}_q^{x_0}\sqrt{f(\ )}$。在无法求得 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$ 的精确值 a 的情况下可设 $(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数 $K=l+2k\geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，则 0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重根，$z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由第七章§3 定理 5 推论 1，则有 $K=L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$l=U_\alpha-U_\beta$，$k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)$，其中 $l=0$ 或 1，$l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l=1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。于是可求得 $f_m(y)$ 的次数 $K=l+2k$ 中 K，l，k 的具体数值，这就为 $f(z)=0$ 的近似解法创造了有利条件。根据§5 定理推论，则

1. q 为奇数时，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上必有实根 $z=x_0$，$l=1$，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，于是

1) 若 $q=1$，则 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$ 为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$，无须再求解。

2) 若 q 为 ≥ 3 的奇数，则 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集，这个实根就是 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\ )}$。由第七章§3 定理 5 推论 2，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k]$$

其中 $k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-1\right]=\left(U_\alpha^M-U_\beta^M\right)\geq 0$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 $a_{m0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。

我们说 $k\neq 0$，否则假如 $k=0$，则 $L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q=1$，$f_m(y)=a_{m0}y$，$(4)^{x_0}$ 只有 1 个实

根，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 只有 1 个根，矛盾。于是 k 为正整数。

若无法求得 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{f(\,)}$ 的精确值 a，而通过根号计算求得其充分好的近似值 r，即

$$x_0=a\approx r\text{，其中 }\alpha<r<\beta\text{，}f(r)\approx 0\text{，但 }f(r)\neq 0\text{，}Q(r)\neq 0\text{。}$$

r 是 $f(z)=0$ 的互素点，作点 r 的以 $f_0(y),f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_{m_r}(y)\} \qquad (3)^r$$

其最后多项式 $f_{m_r}(y)$ 是非零常数。我们称 $z_0\approx r$ 是 $f(z)=0$ 的一个近似的单实根。

由多项式函数的连续性，可取 $(3)^r$ 内次数为 $K=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$ 的 $f_{m_0}(y)=f_{m_0}(r,y)$（$m_0<m_r$），作为 $(3)^a$ 内 $f_m(y)=f_m(a,y)$ 的近似函数，并依据

$$l=U_\alpha-U_\beta=1\text{，}\quad k=\frac{1}{2}\left[\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-1\right]$$

对 $f_{m_0}(y)$ 中有关系数作适当的修改，并改称为点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$。假设点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 的标准式为

$$f_{m_0}(y)=a_{m_0 0}y[y^{2k}-\lambda_1y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \qquad (4)^r$$

其中 k 为正整数，$a_{m_0 0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 $a_{m_0 0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。令

$$F_{m_0}(z-r)=F_{m_0}(iy)=i^{1+2k}f_{m_0}(y)\text{，则}$$

$$F_{m_0}(z-r)=a_{m_0 0}(z-r)[(z-r)^{2k}+\lambda_1(z-r)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-r)^2+\lambda_k]\text{，令}$$

$$P\left((z-r)^2\right)=(z-r)^{2k}+\lambda_1(z-r)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-r)^2+\lambda_k$$

于是 $F_{m_0}(z-r)=a_{m_0 0}(z-r)P\left((z-r)^2\right)$。再令 $s=(z-r)^2=-y^2$，则

$$P(s)=s^k+\lambda_1s^{k-1}+\cdots+\lambda_{k-1}s+\lambda_k$$

实系数 k 次多项式 $P(s)$ 称为点 r 近似的 $P(s)$，且 $P(-\infty)\neq 0$，$P(0)=\lambda_k\neq 0$，$P(+\infty)\neq 0$。

作点 r 的以近似 $P(s),P'(s)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 s（$s\in R$）的变号数分别记为 V_s^P 和 U_s^P。

必须说明：由于 $(f(z),f'(z))=1$，若 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的精确值，$Q(a)=0$，则点 a 的 $P(s)$ 没有重根，$(P(s),P'(s))=1$，作点 a 以 $P(s),P'(s)$ 为基的施图姆序列只有标准型，没有扩展型，按约定：点 a 以 $P(s),P'(s)$ 为基的施图姆序列的扩展型 = 标准型，

在点 s $(s\in R)$ 的变号数有 $U_s^P=V_s^P$ 。

事实上，$Q(a)=0$，假如点 a 的 $P(s)$ 有 2 重以上根，不妨设 s_0 是 $P(s)=0$ 的 l_0 重根，且 $l_0\ge 2$，$P(0)\ne 0$，则 $s_0\ne 0$，根据第五章§5 定理 10 推论 1，则 $z_1=a+i\sqrt{-s_0}$，$z_2=a-i\sqrt{-s_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l_0 重根。假设 $z_1=a+i\sqrt{-s_0}$ 和 $z_2=a-i\sqrt{-s_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由第三章§3 定理 10 推论 1 则 $l_0=\min(l_1,l_2)$，$l_1\ge l_0\ge 2$，$l_2\ge l_0\ge 2$，与 $(f(z),f'(z))=1$ 矛盾。所以，点 a 的 $P(s)$ 没有重根。

但是，r 作为实部点 x_0 的近似值，作点 r 以近似的 $P(s),P'(s)$ 为基的施图姆序列却可能既有标准型又有扩展型。点 r 近似的 $P(s)$ 必须满足的**条件**是：

$$2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=(W_\alpha-W_\beta)-(U_\alpha-U_\beta)=q-1\,(\text{为}\ge 2\text{的偶数})$$

若不满足该条件，必须对点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 有关系数再作适当修改，直到满足该条件为止。

根据该条件，则 $U_{-\infty}^P-U_0^P\ge 1$。设 $V_{-\infty}^P-V_0^P=k_1$，则 $k_1\ge 1$。否则，假设 $V_{-\infty}^P-V_0^P=0$，则 $U_{-\infty}^P-U_0^P=0$，矛盾。$V_{-\infty}^P-V_0^P=k_1\ge 1$，$P(s)=0$ 共有 k_1 个各不相同的负实根，$s=(z-r)^2=-y^2$，$F_{m_0}(z-r)=a_{m_0 0}(z-r)P((z-r)^2)$，则 $F_{m_0}(z-r)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上有 k_1 对的各不相同的共轭根，$(4)^r$ 有 k_1 对各不相同的非 0 实根，从而 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上有 k_1 对各不相同的近似共轭根。

我们可在 $(-\infty,0]$ 内找到 $P(s)=0$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$, $[\varepsilon_2,\eta_2]$,…, $[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\le\varepsilon_2<\eta_2\le\cdots\le\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}\le 0$，且 $P(\varepsilon_j)\ne 0$，$P(\eta_j)\ne 0$，$V_{\varepsilon_j}^P-V_{\eta_j}^P=1$，$j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $P(s)=0$ 的这 k_1 个各不相同的负实根就可表示为

$$s_j=\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}\text{，}\quad j=1,2,\cdots,k_1\text{。}$$

其中 s_j 是 $P(s)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重负实根。$P(s)=0$ 的负实根个数为

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^P-U_0^P=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j\text{。}$$

由 $-y_j^2=s_j<0$，可得 $y_j=\sqrt{-s_j}$，$-y_j=-\sqrt{-s_j}$ $(j=1,2,\cdots,k_1)$ 是 $(4)^r$ 的 k_1 对各不相同的非 0 实根。于是 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=r$ 上有 k_1 对各不相同的近似共轭根

$$\begin{cases} z_{j1} \approx r + i\sqrt{-\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \\ z_{j2} \approx r - i\sqrt{-\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \end{cases} \quad j=1,2,\cdots,k_1$$

由第五章§5 定理 10 推论 2，则 z_{j1}, z_{j2} 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=r$ 上的一对 $l_j = U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P$ 重近似共轭根，故 $f(z)=0$ 在直线 $x=r$ 上共有

$$k^{(1)} = U_{-\infty}^P - U_0^P = \sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P\right) = \sum_{j=1}^{k_1} l_j$$

对近似共轭根。$z_0 \approx r$ 是 $f(z)=0$ 近似的单实根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上的近似根的个数为 $1+2\sum_{j=1}^{k_1} l_j = 1+2\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P\right) = 1+2(U_{-\infty}^P - U_0^P) = W_\alpha - W_\beta = q$。

值得注意：由于 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$，如果出现某对近似共轭复根 $z_{j_0 1}, z_{j_0 2}$ 的重数

$$l_{j_0} = U_{\varepsilon_{j_0}}^P - U_{\eta_{j_0}}^P \geq 2$$

并不说明 $f(z)=0$ 有 2 重以上根，仅表明它有 l_{j_0} 对共轭复根的近似表达式相同，而且若用另一个比 r 更好的 r_1 作为 x_0 的近似值，作点 r_1 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列，用同样方法所求出的这 l_{j_0} 对近似共轭复根就会有不同的近似表达式。

2. q 为偶数时，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上没有实根，$l=0$，$f(x_0)\neq 0$，$\sqrt[{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}]{f(\ )}$ 为全虚根类型的同实部根全集。由第七章§3 定理 5 推论 3，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y) = a_{m0}[y^{2k} - \lambda_1 y^{2k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2 + (-1)^k \lambda_k]$$

其中 $k = \frac{1}{2}\left(U_\alpha^Q - U_\beta^Q\right) = \left(U_\alpha^M - U_\beta^M\right) \geq 1$，$a_{m0} \neq 0$，$\lambda_k \neq 0$，且 $a_{m0}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 均为实数。

若无法求得 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$ 的精确值 a，而通过根号计算求得其充分好的近似值 r，即 $x_0 = a \approx r$，其中 $\alpha < r < \beta$，$Q(r) \approx 0$，但 $f(r) \neq 0$，$Q(r) \neq 0$。

r 是 $f(z)=0$ 的互素点，作点 r 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\left\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_{m_r}(y)\right\} \tag{3^r}$$

其最后多项式 $f_{m_r}(y)$ 是非零常数。我们称 r 是 $f(z)=0$ 复根的一个近似的实部点。

由多项式函数的连续性，可取 $(3)^r$ 内次数为 $K = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$ 的 $f_{m_0}(y) = f_{m_0}(r, y)$

($m_0 < m_r$)，作为 $(3)^a$ 内 $f_m(y) = f_m(a,y)$ 的近似函数，并依据

$$l = U_\alpha - U_\beta = 0，\quad k = \frac{1}{2}\left(U_\alpha^Q - U_\beta^Q\right)$$

对 $f_{m_0}(y)$ 中有关系数作适当的修改，并改称为点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$。假设点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 的标准式为

$$f_{m_0}(y) = a_{m_0 0}[y^{2k} - \lambda_1 y^{2k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\lambda_{k-1} y^2 + (-1)^k \lambda_k] \qquad (4)^r$$

其中 k 为正整数， $a_{m_0 0} \neq 0$ ， $\lambda_k \neq 0$ ，且 $a_{m_0 0}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 均为实数。令

$$F_{m_0}(z-r) = F_{m_0}(iy) = i^{2k} f_{m_0}(y)，则$$

$$F_{m_0}(z-r) = a_{m_0 0}[(z-r)^{2k} + \lambda_1 (z-r)^{2k-2} + \cdots + \lambda_{k-1}(z-r)^2 + \lambda_k]，令$$

$$P\left((z-r)^2\right) = (z-r)^{2k} + \lambda_1 (z-r)^{2k-2} + \cdots + \lambda_{k-1}(z-r)^2 + \lambda_k$$

于是 $F_{m_0}(z-r) = a_{m_0 0} P\left((z-r)^2\right)$。再令 $s = (z-r)^2 = -y^2$ ，则

$$P(s) = s^k + \lambda_1 s^{k-1} + \cdots + \lambda_{k-1} s + \lambda_k$$

实系数 k 次多项式 $P(s)$ 称为点 r 近似的 $P(s)$，且 $P(-\infty) \neq 0$，$P(0) = \lambda_k \neq 0$，$P(+\infty) \neq 0$。

余下部分与 1. 2)相同的不再赘述，所不同的是

1) 点 r 近似的 $P(s)$ 必须满足的**条件**是 $2(U_{-\infty}^P - U_0^P) = W_\alpha - W_\beta = q$ 。若不满足该条件，必须对点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 有关系数再作适当修改，直到满足该条件为止。

2) $f(z) = 0$ 在 z 平面的直线 $x = r$ 上的近似根的个数为

$$2\sum_{j=1}^{k_1} l_j = 2\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P\right) = 2(U_{-\infty}^P - U_0^P) = W_\alpha - W_\beta = q$$

近似解法二

设 $\deg\ f(z) \geq 2$，$\left(f(z), f'(z)\right) = 1$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{M(\ )}$，$L_* = U_\alpha^M - U_\beta^M$ ，l 非负整数， $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 l 重根，若 $W_\alpha - W_\beta = q \geq 1$，则 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z) = 0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集， $f(z) = 0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上共有 $k_{x_0} = q$ 个根，且 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )} = {}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}$ 。根据第七章§3 定理 6 推论，$(3)^{*x_0}$ 内 $f_{m^*}^*(y^2)$ 的标准式为

$$f_{m^*}^*(y^2) = a_{m^* 0}[y^{2k} - \lambda_1 y^{2k-2} + \cdots + (-1)^{k-1}\lambda_{k-1} y^2 + (-1)^k \lambda_k] \qquad (4)^{*x_0}$$

其中 $k=L_*=U_\alpha^M-U_\beta^M\geq 1$，$a_{m^*0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 $a_{m^*0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，$l=U_\alpha-U_\beta$，$l=0$ 或 1，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq 0$；$l=1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。这就为 $f(z)=0$ 的近似解法二创造了有利条件。

根据§5 定理推论，若 $q=1$，$l=1$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上只有一个根，就是实根 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$，$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$ 为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$，无须再求解。

不妨设 $q\geq 2$，于是若 q 为偶数，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上没有实根，$l=0$，$f(x_0)\neq 0$，$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$ 为全虚根类型的同实部根全集；若 q 为 ≥ 3 的奇数，则 $f(z)=0$ 直线 $x=x_0$ 上有一个实根 $z=x_0$，$l=1$，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$，$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集，这个实根就是 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{f(\ )}$。

若无法求得 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{M(\ )}$ 的精确值 a，而通过根号计算求得其充分好的近似值 r，即 $x_0=a\approx r$，其中 $\alpha<r<\beta$，$M(r)\approx 0$，但 $f(r)\neq 0$，$M(r)\neq 0$，$Q(r)\neq 0$。

r 是 $f(z)=0$ 的互素点，作点 r 的以 $f_0^*(y^2), f_1^*(y^2)$ 为基的施图姆序列

$$\left\{f_0^*(y^2), f_1^*(y^2), f_2^*(y^2), \cdots, f_{m_r^*}^*(y^2)\right\} \tag{3}^{*r}$$

其最后多项式 $f_{m_r^*}^*(y^2)$ 是非零常数。由多项式函数的连续性，可取 $(3)^{*r}$ 内关于 y^2 的次数 $K^*=L_*=U_\alpha^M-U_\beta^M$ 的 $f_{m_0^*}^*(y^2)=f_{m_0^*}^*(r,y^2)$（$m_0^*<m_r^*$），作为 $(3)^{*a}$ 内 $f_{m^*}^*(y^2)=f_{m^*}^*(a,y^2)$ 的近似函数，称为点 r 近似的 $f_{m_0^*}^*(y^2)$。假设点 r 近似的 $f_{m_0^*}^*(y^2)$ 的标准式为

$$f_{m_0^*}^*(y^2)=a_{m_0^*0}[y^{2k}-\lambda_1 y^{2k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\lambda_{k-1}y^2+(-1)^k\lambda_k] \tag{4}^{*r}$$

其中 $k=L_*=U_\alpha^M-U_\beta^M\geq 1$，$a_{m_0^*0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且 $a_{m_0^*0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。令

$$F_{m_0^*}^*\left((z-r)^2\right)=F_{m_0^*}^*\left((iy)^2\right)=i^{2k}f_{m_0^*}^*(y^2)，\text{则}$$

$$F_{m_0^*}^*\left((z-r)^2\right)=a_{m_0^*0}[(z-r)^{2k}+\lambda_1(z-r)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-r)^2+\lambda_k]$$

其中 k 为正整数，令 $P\left((z-r)^2\right)=(z-r)^{2k}+\lambda_1(z-r)^{2k-2}+\cdots+\lambda_{k-1}(z-r)^2+\lambda_k$，于是

$$F_{m_0^*}^*\left((z-r)^2\right)=a_{m_0^*0}P\left((z-r)^2\right)。\text{再令 } s=(z-r)^2=-y^2，\text{则}$$

$$P(s)=s^k+\lambda_1 s^{k-1}+\cdots+\lambda_{k-1}s+\lambda_k$$

实系数 k 次多项式 $P(s)$ 称为点 r 近似的 $P(s)$，且 $P(-\infty)\neq 0$，$P(0)=\lambda_k\neq 0$，$P(+\infty)\neq 0$。

作点 r 以近似的 $P(s),P^{'}(s)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点点 s $(s\in R)$ 的变号数分别记为 V_s^P 和 U_s^P 。

必须说明：由于 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，若 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的精确值，则点 a 的 $P(s)$ 没有重根，$\left(P(s),P^{'}(s)\right)=1$，作点 a 以 $P(s),P^{'}(s)$ 为基的施图姆序列只有标准型，没有扩展型，但是 r 作为实部点 x_0 的近似值，作点 r 以近似的 $P(s),P^{'}(s)$ 为基的施图姆序列却可能既有标准型又有扩展型。

点 r 近似的 $P(s)$ 必须满足的**条件**是：1) 若 $W_\alpha-W_\beta=q$ 为 ≥ 3 的奇数，则

$$2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=\left(W_\alpha-W_\beta\right)-\left(U_\alpha-U_\beta\right)=q-1\ (\text{为}\geq 2\text{的偶数})$$

2) 若 $W_\alpha-W_\beta=q$ 为偶数，则 $2(U_{-\infty}^P-U_0^P)=W_\alpha-W_\beta=q$ 。

若不满足该条件，必须对点 r 近似的 $f_{m_0^*}^*\left(y^2\right)$ 有关系数作适当修改，直到满足该条件为止。

根据该条件，则 $U_{-\infty}^P-U_0^P\geq 1$。设 $V_{-\infty}^P-V_0^P=k_1$，则 $k_1\geq 1$，$P(s)=0$ 共有 k_1 个各不相同的负实根，$s=(z-r)^2=-y^2$，$F_{m_0^*}^*\left((z-r)^2\right)=a_{m_0^*0}P\left((z-r)^2\right)$，故 $F_{m_0^*}^*\left((z-r)^2\right)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上有 k_1 对的各不相同的共轭根，$(4)^{*r}$ 有 k_1 个各不相同的正实根，从而 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上有 k_1 对各不相同的近似共轭根。

我们可在 $(-\infty,0]$ 内找到 $P(s)=0$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$, $[\varepsilon_2,\eta_2]$,$\cdots$, $[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\leq\varepsilon_2<\eta_2\leq\cdots\leq\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}\leq 0$，且 $P\left(\varepsilon_j\right)\neq 0$，$P\left(\eta_j\right)\neq 0$，$V_{\varepsilon_j}^P-V_{\eta_j}^P=1$，$j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $P(s)=0$ 的这 k_1 个各不相同的负实根就可表示为

$$s_j=\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}\text{，}\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

其中 s_j 是 $P(s)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P$ 重负实根。$P(s)=0$ 的负实根个数为

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^P-U_0^P=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P-U_{\eta_j}^P\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j\text{ 。}$$

由 $-y_j^2=s_j<0$ 可得 $y_j^2=-s_j$ $(j=1,2,\cdots,k_1)$ 是 $(4)^{*r}$ 关于 y^2 的 k_1 个各不相同的正实根。于是 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=r$ 上有 k_1 对各不相同的近似共轭根

$$\begin{cases} z_{j1} \approx r + i\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{-\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \\ z_{j2} \approx r - i\sqrt[{[\varepsilon_j,\eta_j]}]{-\sqrt{(1,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1},\lambda_k)}} \end{cases} \quad j = 1,2,\cdots,k_1$$

由第五章§5 定理 10 推论 2，则 z_{j1}, z_{j2} 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=r$ 上的一对 $l_j = U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P$ 重近似共轭根，故 $f(z)=0$ 在直线 $x=r$ 上共有

$$k^{(1)} = U_{-\infty}^P - U_0^P = \sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P\right) = \sum_{j=1}^{k_1} l_j$$

对近似共轭根，其中

1) 若 q 为偶数， $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上的近似根的个数为

$$2\sum_{j=1}^{k_1} l_j = 2\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P\right) = 2(U_{-\infty}^P - U_0^P) = W_\alpha - W_\beta = q \text{。}$$

2) 若 q 为 ≥ 3 的奇数，则 $z_0 \approx r$ 是 $f(z)=0$ 近似的单实根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上的近似根的个数为

$$1 + 2\sum_{j=1}^{k_1} l_j = 1 + 2\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^P - U_{\eta_j}^P\right) = 1 + 2(U_{-\infty}^P - U_0^P) = W_\alpha - W_\beta = q \text{。}$$

第一篇实系数代数方程的统一解法原理到此结束，作者将在第二篇介绍复系数代数方程的统一解法原理。

第二篇

复系数代数方程
统一解法原理

第一章
方程复根的求解路径

整式代数方程统一解法原理的形成，不仅要有实系数代数方程统一解法原理，还必须有复系数代数方程统一解法原理，于是这一章阐述复根的求解路径。

§1 原方程与实系数二元多项式方程组的关系

设复系数 n 次多项式 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$，其中 $n\ge 1$，$c_0\ne 0$，$c_j\in C$，$c_j=a_j+ib_j$，$a_j\in R$，$b_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$，且 $b_0=0$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零，$a_0=c_0\ne 0$，i 为虚数单位。为便于阐述，本篇 $f(z)$ 均为此式(在最后一章 $c_0>0$)。若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的所有根，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1},c_n)}$。

与实系数代数方程相同，为了能够通过设立分根号和同实部根全集根号来解决 $f(z)=0$ 求复根的问题，必须先解决在设立过程中遇到的各种问题，建立相应的统一解法理论，并从探寻复根的求解路径开始。记

$$a(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,\quad b(z)=b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}z+b_n$$

则 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是实系数多项式，且有

$$f(z)=a(z)+ib(z)$$

其中 $f(z)$，$a(z)$，$b(z)$ 在 z 平面上任意点 x 的泰勒展开式分别为

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\cdots+\frac{f'(x)}{1!}(z-x)+f(x)$$

$$a(z)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n+\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\cdots+\frac{a'(x)}{1!}(z-x)+a(x)$$

$$b(z)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}(z-x)^{n-2}+\cdots+\frac{b'(x)}{1!}(z-x)+b(x)$$

其中 $\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}=a_0\ne 0$，$\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}+i\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}$，$\cdots$，$\frac{f'(x)}{1!}=\frac{a'(x)}{1!}+i\frac{b'(x)}{1!}$，$f(x)=a(x)+ib(x)$，并且 $\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}=b_1$。令 $z-x=y$，则 $f(x+y)=a(x+y)+ib(x+y)$，而

$$f(x+y)=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+\frac{f'(x)}{1!}y+f(x)$$

$$a(x+y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+\frac{a'(x)}{1!}y+a(x)$$

$$b(x+y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\cdots+\frac{b'(x)}{1!}y+b(x)$$

并记 $A_0(x,y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{a^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$

$$A_1(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{a^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

$$B_0(x,y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{b^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

$$B_1(x,y)=\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\frac{b^{(n-6)}(x)}{(n-6)!}y^{n-6}+\cdots$$

于是 $a(x+y)=A_0(x,y)+A_1(x,y)$， $b(x+y)=B_0(x,y)+B_1(x,y)$，其中 $A_0(x,y)$， $A_1(x,y)$， $B_0(x,y)$， $B_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式。

令 $F_0(x,y)=A_0(x,y)+iB_0(x,y)$， $F_1(x,y)=A_1(x,y)+iB_1(x,y)$，则有

$$F_0(x,y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+i\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+i\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots$$

$$F_1(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+i\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+i\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$$

于是有 $f(x+y)=F_0(x,y)+F_1(x,y)$，再令 $\begin{cases}F_0(x,iy)=i^n f_0(x,y)\\ F_1(x,iy)=i^{n-1}f_1(x,y)\end{cases}$，则

$$\begin{cases}f_0(x,y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots\\ f_1(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}-\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots\end{cases}$$

其中 $f_0(x,y), f_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式，且 $\frac{a^{(n)}(x)}{n!}=a_0\neq 0$ 。令 $z=x+iy$，则

$$f(z)=f(x+iy)=F_0(x,iy)+F_1(x,iy)=i^n f_0(x,y)+i^{n-1}f_1(x,y)=i^n\left[f_0(x,y)-if_1(x,y)\right]$$

于是由

$$f(z)= f(x+iy)=i^n\left[f_0(x,y)-if_1(x,y)\right] \tag{1}$$

可得实系数二元多项式的方程组

$$\begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} \tag{2}$$

我们称(1)是方程 $f(z)=0$ 与方程组(2)的多项式关系式。

§2 方程组解的性质与最大公因式方程(一)根的性质

设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 $f_0(x,y), f_1(x,y)$ 在 $x = x_0$， $y = y_0$ 时函数值满足 $f_0(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_1(x_0, y_0) = 0$，则称 (x_0, y_0) 是方程组(2)的一个(复数)解。

方程组(2)解的**性质**

$f_0(x,y), f_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式，(2)解的性质及其推论与第一篇第二章(2)解的性质 2 及其推论完全相同，证明方法相同予以省略。

性质 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解，则 $(\overline{x_0}, \overline{y_0})$ 也是方程组(2)的解(其中 $\overline{x_0}$， $\overline{y_0}$ 分别是 x_0， y_0 的共轭复数)。

推论 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 (x_0, y_0) 是(2)的解的充要条件是：$(\overline{x_0}, \overline{y_0})$ 是(2)的解。

例 1 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 (a, y_0) 是(2)的解的充要条件是：$(a, \overline{y_0})$ 是(2)的解。

设 $x_0 \in C$，将方程组(2)转化成恒定元为 $x = x_0$ 的一元方程组

$$\begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} \qquad (2)^{x_0}$$

则 $(2)^{x_0}$ 是 y 的复系数多项式方程组(其中 $x_0 \in R$ 时， $(2)^{x_0}$ 是 y 的实系数多项式方程组)。

$\dfrac{a^{(n)}(x_0)}{n!} = a_0 \neq 0$，故 $f_0(x_0, y)$ 是 y 的次数为 n 的多项式，但 $f_1(x_0, y)$ 却有可能是 y 的零多项式，即当它关于 y 的系数全为零时。

设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 $f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 时函数值满足 $f_0(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_1(x_0, y_0) = 0$，则称 y_0 是方程组 $(2)^{x_0}$ 的一个(复数)解。若 $f_1(x_0, y)$ 是 y 的零多项式，则对 $\forall\ y_0 \in C$， $f_1(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 时函数值 $f_1(x_0, y_0) = 0$，于是方程 $f_0(x_0, y) = 0$ 的根就是方程组 $(2)^{x_0}$ 的解。显然， y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是： $(y - y_0) \mid f_0(x_0, y)$ 且 $(y - y_0) \mid f_1(x_0, y)$。

再设 l 为非负整数，若 $(y - y_0)^l \mid f_0(x_0, y)$ 且 $(y - y_0)^l \mid f_1(x_0, y)$，但 $(y - y_0)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$，则称 y_0 是方程组 $(2)^{x_0}$ 的 l 重(复数)解。若 $f_1(x_0, y)$ 是 y 的零多项式，则方程 $f_0(x_0, y) = 0$ 的 l 重根就是方程组 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解。统计解的个数，重解按重数计算。

由 $(2)^{x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合可写成 $\left\{ y \,\middle|\, \begin{cases} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{cases} (y \in C)\ \ (2)^{x_0} \right\}$

下面定理 1 及其推论的证明方法与第一篇第二章定理 1 及其推论相同予以省略。

定理 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解的充要条件是：y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

推论 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 (x_0, y_0) 是(2)的解的充要条件是：

$$(y-y_0) \mid f_0(x_0, y) \text{且} (y-y_0) \mid f_1(x_0, y)\text{。}$$

设 $d(x_0, y)$ 是 $f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$ 关于 y 的一个最大公因式， $f_0(x_0, y)$， $f_1(x_0, y)$，$d(x_0, y)$ 可视为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，于是当 $x_0 \in C$ 时，$d(x_0, y)$ 是 y 的复系数多项式；当 $x_0 \in R$ 时， $d(x_0, y)$ 是 y 的实系数多项式。

两个 y 的系数不全为零的多项式 $f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$ 关于 y 的最大公因式总是一个 y 的系数不全为零的多项式，即它是非零多项式。于是用 $(f_0(x_0, y), f_1(x_0, y))$ 来表示 y 的首项系数是1的那个最大公因式。若 $(f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)) = 1$，则称 $f_0(x_0, y), f_1(x_0, y)$ 关于 y 互素。

设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$， 若 $d(x_0, y)$ 在 $y = y_0$ 时函数值 $d(x_0, y_0) = 0$， 则称 y_0 是方程 $d(x_0, y) = 0$ 的一个(复)根。显然， y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根的充要条件是：$(y-y_0) \mid d(x_0, y)$。再设 l 为非负整数，若 $(y-y_0)^l \mid d(x_0, y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $d(x_0, y)$，则称 y_0 是方程 $d(x_0, y) = 0$ 的 l 重(复)根。统计根的个数，重根按重数计算。

$d(x_0, y) = 0$ 所有复根(含重根)组成的集合可写成 $\{\, y \mid d(x_0, y) = 0 \ (y \in C)\}$。

下面定理 2 及其推论根据预章定理 2 及其推论即得。

定理 2 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$， l 为非负整数，则

1) y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是： y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的根。

2) y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的 l 重解的充要条件是： y_0 是 $d(x_0, y) = 0$ 的 l 重根。

推论 1 设 $x_0 \in C$，则 $(2)^{x_0}$ 所有复数解(含重解)组成的集合与 $d(x_0, y) = 0$ 所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即

$$\left\{ y \,\middle|\, \left\{ \begin{array}{l} f_0(x_0, y) = 0 \\ f_1(x_0, y) = 0 \end{array} \right. (y \in C) \ \ (2)^{x_0} \right\} = \{\, y \mid d(x_0, y) = 0 \ (y \in C)\}$$

于是 $d(x_0, y) = 0$ 的所有复根就是 $(2)^{x_0}$ 的所有复数解。

推论 2 设 $x_0 \in C$，若 $(2)^{x_0}$ 复数解(含重解)的个数为 K_{x_0}， $d(x_0, y)$ 关于 y 的次数为 K，则 $K_{x_0} = K$， 故 $(2)^{x_0}$ 有解的充要条件是： $K \geq 1$。

推论 3 设 $x_0 \in C$，则 $(2)^{x_0}$ 无解的充要条件是：$(f_0(x_0,y), f_1(x_0,y))=1$。

定理 3 设 $x_0 \in C$，$\begin{cases} f_0(x_0,y)=g_0(x_0,y)d(x_0,y) \\ f_1(x_0,y)=g_1(x_0,y)d(x_0,y) \end{cases}$，则 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 无解，$g_0(x_0,y)$，$g_1(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0(x_0,y), g_1(x_0,y))=1$。

证明 $d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y), f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，根据预章定理 5 即得。】

$d(x_0,y)=0$ 根的**性质** 性质及推论 1 至 4 与第一篇 $d(x_0,y)=0$ 根的性质 2 及推论相同。

性质 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根，则 $\overline{y_0}$ 是 $d(\overline{x_0},y)=0$ 的根。

推论 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $d(\overline{x_0},y)=0$ 的根。

推论 2 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $(y-y_0) \mid d(x_0,y)$ 的充要条件是：$(y-\overline{y_0}) \mid d(\overline{x_0},y)$。

例 2 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，则 $(y-y_0) \mid d(a,y)$ 的充要条件是：$(y-\overline{y_0}) \mid d(a,y)$。

推论 3 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l \mid d(a,y)$ 的充要条件是：$(y-\overline{y_0})^l \mid d(a,y)$。

推论 4 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根。

设 $a \in R$，$y_0 \notin R$，l 为非负整数，若 y_0 和 $\overline{y_0}$ 都是 $d(a,y)=0$ 的 l 重根，则称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭(复)根，其中 y_0 为纯虚数时，称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭纯虚数根。

推论 5 设 $a \in R$，$y_0 \notin R$，l 为非负整数，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是：$(y-y_0)^l(y-\overline{y_0})^l \mid d(a,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}(y-\overline{y_0})^{l+1}$ 不能整除 $d(a,y)$。

证明 $d(a,y)=0$ 是 y 的实系数代数方程，由第一篇第二章§2 性质推论 5 即得。】

$(2)^{x_0}$ 解的**性质** 性质及推论 1 至 4 与第一篇 $(2)^{x_0}$ 解的性质 2 及其推论相同。

性质 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $\overline{y_0}$ 是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的解。

推论 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $(2)^{\overline{x_0}}$ 的解。

例 3 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，则 y_0 是 $(2)^a$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的解。

推论 2 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $(y-y_0) \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0) \mid f_1(x_0,y)$ 的充要条件是：

$$\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_0\left(\overline{x_0},y\right)\text{且}\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_1\left(\overline{x_0},y\right)$$

推论 3 设 $a \in R$， $y_0 \in C$， l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l \mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(a,y)$ 的充要条件是： $\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_0(a,y)$ 且 $\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_1(a,y)$。

推论 4 设 $a \in R$， $y_0 \in C$， l 为非负整数，则 y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重解的充要条件是： $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的 l 重解。

设 $a \in R$， $y_0 \notin R$， l 为非负整数，若 y_0 和 $\overline{y_0}$ 都是方程组 $(2)^a$ 的 l 重解，则称 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对 l 重共轭(复数)解，其中 y_0 为纯虚数时，称 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对 l 重共轭纯虚数解。

推论 5 设 $a \in R$， $y_0 \notin R$， l 为非负整数，则 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是：$(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_1(a,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}\left(y-\overline{y_0}\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(a,y), f_1(a,y)$。

证明 $d(a,y)$ 是 $f_0(a,y), f_1(a,y)$ 关于 y 的最大公因式，于是 $(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid d(a,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}\left(y-\overline{y_0}\right)^{l+1}$ 不能整除 $d(a,y) \Leftrightarrow (y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_1(a,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}\left(y-\overline{y_0}\right)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(a,y), f_1(a,y)$。

根据定理 2，则 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是： y_0， $\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭复根。再由 $d(x_0,y)=0$ 根的性质推论 5 即得。】

§3 原方程根与方程组解及最大公因式方程根的关系

定理 4 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，l 为正整数，若 $(y-y_0)^l \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^l \mid f_1(x_0,y)$，则 $(y-y_0)^l \mid f(x_0+iy)$，即 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。

证明 令 $z=x_0+iy$，则由关系式(1)可得

$$f(z)=f(x_0+iy)=i^n f_0(x_0,y)+i^{n-1}f_1(x_0,y) \qquad (1)^{x_0}$$

于是由题设则 $(y-y_0)^l \mid f(x_0+iy)$，$(z-z_0)=i(y-y_0)$，根据 $f(z)=f(x_0+iy)$ 的整除性质，则 $(z-z_0)^l \mid f(z)$，即 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根。】

定理 5 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0,y_0) 是方程组(2)的解，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。

证明 若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则 $f_0(x_0,y_0)=0$ 且 $f_1(x_0,y_0)=0$，于是

$$f(z_0)=f(x_0+iy_0)=i^n\left[f_0(x_0,y_0)-if_1(x_0,y_0)\right]=0$$

故 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 若 (x_0,y_0) 是(2)的解，则 $(\overline{x_0},\overline{y_0})$ 也是(2)的解，再由定理 5 即得。】

例 4 设 $a \in R$，$y_0 \in C$，若 (a,y_0) 是(2)的解，则 $(a,\overline{y_0})$ 也是(2)的解，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 都是方程 $f(z)=0$ 的根，其中

1) 当 $y_0 \in R$ 时，$\overline{y_0}=y_0$，则 $(a,y_0)=(a,\overline{y_0})$，$z_1=z_2$；

2) 当 $y_0 \notin R$ 时，$\overline{y_0}\neq y_0$，则 $(a,y_0)\neq(a,\overline{y_0})$，$z_1\neq z_2$。

推论 2 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由推论 1 和定理 1 即得。】

推论 3 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 y_0 是 $d(x_0,y)=0$ 的根，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由推论 2 和定理 2 即得。】

定义 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$ 且 $y_0 \neq 0$，若 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 都是 $f(z)=0$ 的根，

则称 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$(在 z 平面上)的一对(复)根，其中 $x_0\in R$，$y_0\in R$ 时，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$(在 z 平面直线 $x=x_0$ 上)的一对共轭(复)根。

本篇一对复根，一对复数解的定义与第一篇一对复根，一对复数解的定义相比较只是多了一个限制条件 $y_0\neq 0$，从而将 $y_0=0$ 的情形排除在外，它们性质也是如此，证明予以省略。

$f(z)=0$ 一对复根的**性质**　设 $x_0\in C$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\, f(x_0+iy)$。

定义　设 $x_0\in C$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，若 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 都是方程组(2)的解，则称 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对(复数)解，其中 $x_0\in R$，$y_0\in R$ 时，(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对实数解。

方程组(2)一对复数解的**性质**　设 $x_0\in C$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，则 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是(2)的一对复数解的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)|\, f_0(x_0,y)$ 且 $\left(y^2-y_0^2\right)|\, f_1(x_0,y)$。

由(2)解的性质所决定，本篇一对复根和一对复数解，仅为特例，如例 5。

定理 6　设 $x_0\in R$，$y_0\in R$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的根的充要条件是：(x_0,y_0) 是方程组(2)的实数解。

证明　若 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的根，则 $f(z_0)=f(x_0+iy_0)=0$。于是由关系式(1)，就有 $i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=f(x_0+iy_0)=f(z_0)=0$。

$f_0(x,y), f_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式，$x_0\in R$，$y_0\in R$，于是 $f_0(x_0,y_0), f_1(x_0,y_0)$ 均为实数，而 i^n 和 i^{n-1} 一个为实数，另一个为纯虚数，必有 $\begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0 \\ f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$，因此，$(x_0,y_0)$ 是(2)的实数解。

反过来，若 (x_0,y_0) 是(2)的实数解，由定理 5，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的根。】

当 $x_0\in R$，$y_0\in R$ 时，$z_0=x_0+iy_0$ 是 z 平面直线 $x=x_0$ 上的一个点，点 z_0 在 z 平面上关于直线 $x=x_0$ 的对称点就是它自身，于是若 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根，则 z_0 在 z 平面上关于直线 $x=x_0$ 对称。

例 5　设 $x_0\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，由定理 6，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$

(在 z 平面直线 $x=x_0$ 上)的一对共轭(复)根的充要条件是：(x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$是(2)的一对实数解。

推论 1 设 $a\in R$，则 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$(a,0)$是(2)的实数解。

证明 在定理 6 中令 $x_0=a$， $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $x_0\in R$， $y_0\in R$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的根的充要条件是： y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的实数解。

证明 由定理 6 和定理 1 即得。】

推论 2 表明 设 $x_0\in R$，$y_0\in R$，则 $(y-y_0)\mid f(x_0+iy)$ 的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)\mid f_1(x_0,y)$。

设 $x_0\in C$， $z=x_0+iy$，则 $f(z)=f(x_0+iy)=F_0(x_0,iy)+F_1(x_0,iy)=i^n f_0(x_0,y)+i^{n-1}f_1(x_0,y)$ 其中 $F_0(x_0,iy)=i^n f_0(x_0,y)$，$F_1(x_0,iy)=i^{n-1}f_1(x_0,y)$， $f_0(x_0,y)$，$f_1(x_0,y)$均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式。

若 $(2)^{x_0}$ 有解，由定理 2 推论 2，则 $f_0(x_0,y)$，$f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式 $d(x_0,y)$ 关于 y 的次数 $K\geq 1$，$(f_0(x_0,y),f_1(x_0,y))\neq 1$。$d(x_0,y)$ 是关于 x_0， y 的实系数二元多项式，设

$$\begin{cases} f_0(x_0,y)=g_0(x_0,y)d(x_0,y) \\ f_1(x_0,y)=g_1(x_0,y)d(x_0,y) \end{cases}$$

其中 $g_0(x_0,y)$，$g_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，$g_0(x_0,y)$ 是 y 的系数不全为零的多项式，即它是非零多项式，但 $g_1(x_0,y)$ 却有可能是 y 的零多项式，由定理 3，则 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 无解， $g_0(x_0,y)$，$g_1(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))=1$，于是

$$f(z)=f(x_0+iy)=i^n f_0(x_0,y)+i^{n-1}f_1(x_0,y)=i^{n-K}[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)][i^K d(x_0,y)]$$

令 $g(z)=g(x_0+iy)=i^{n-K}[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$，则 $f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\,[i^K d(x_0,y)]$。

再令 $F_d(x_0,iy)=i^K d(x_0,y)$，则 $f(z)=f(x_0+iy)=g(x_0+iy)F_d(x_0,iy)$，于是

$$f(z)=g(z)F_d(x_0,z-x_0)$$

该式与 x_0 有关，可称它是 $f(z)$ 在 z 平面上点 x_0 的分解式，其中 $g(z)$ 称为点 x_0 的 $g(z)$，$F_d(x_0,z-x_0)=F_d(x_0,iy)=i^K d(x_0,y)$，$F_d(x_0,z-x_0)$ 是关于 x_0，$(z-x_0)$ 的复系数二元多项式，

故 $F_d(x_0,z-x_0)$ 是 $(z-x_0)$ 的复系数 K 次多项式，也是 z 的复系数 K 次多项式，$g(z)$ 为复系数 $n-K$ 次多项式。

由 $\begin{cases} f_0(x_0,y)=g_0(x_0,y)d(x_0,y) \\ f_1(x_0,y)=g_1(x_0,y)d(x_0,y) \end{cases}$ 可得 $\begin{cases} i^n f_0(x_0,y)=i^{n-K}g_0(x_0,y)\ [i^K d(x_0,y)] \\ i^{n-1} f_1(x_0,y)=i^{n-K-1}g_1(x_0,y)\ [i^K d(x_0,y)] \end{cases}$

令 $G_0(x_0,iy)=i^{n-K}g_0(x_0,y)$，$G_1(x_0,iy)=i^{n-K-1}g_1(x_0,y)$，又 $F_0(x_0,iy)=i^n f_0(x_0,y)$，$F_1(x_0,iy)=i^{n-1}f_1(x_0,y)$，$F_d(x_0,iy)=i^K d(x_0,y)$，于是 $\begin{cases} F_0(x_0,iy)=G_0(x_0,iy)F_d(x_0,iy) \\ F_1(x_0iy)=G_1(x_0,iy)F_d(x_0,iy) \end{cases}$。

由 $z=x_0+iy$，则有 $\begin{cases} F_0(x_0,z-x_0)=G_0(x_0,z-x_0)F_d(x_0,z-x_0) \\ F_1(x_0,z-x_0)=G_1(x_0,z-x_0)F_d(x_0,z-x_0) \end{cases}$

其中 $F_0(x_0,z-x_0)$ 是 $(z-x_0)$ 的次数为 n 的多项式，但 $F_1(x_0,z-x_0)$ 却有可能是 $(z-x_0)$ 的零多项式，即当它关于 $(z-x_0)$ 的系数全为零时。由于 $(2)^{x_0}$ 有解，

$\begin{cases} F_0(x_0,z-x_0)=F_0(x_0,iy)=i^n f_0(x_0,y) \\ F_1(x_0,z-x_0)=F_1(x_0,iy)=i^{n-1}f_1(x_0,y) \end{cases}$，于是 $\begin{cases} F_0(x_0,z-x_0)=0 \\ F_1(x_0,z-x_0)=0 \end{cases}$ 有解，根据预章定理 2 推论 3，则 $F_0(x_0,z-x_0)$, $F_1(x_0,z-x_0)$ 关于 $(z-x_0)$ 非互素，即 $(F_0(x_0,z-x_0),F_1(x_0,z-x_0))\neq 1$。

$\begin{cases} G_0(x_0,z-x_0)=0 \\ G_1(x_0,z-x_0)=0 \end{cases}$ 无解。否则，假如 $\begin{cases} G_0(x_0,z-x_0)=0 \\ G_1(x_0,z-x_0)=0 \end{cases}$ 有解，则 $\exists\ y_0\in C$，将 $z_0=x_0+iy_0$ 代入 $\begin{cases} G_0(x_0,z-x_0)=0 \\ G_1(x_0,z-x_0)=0 \end{cases}$ 后，满足 $\begin{cases} G_0(x_0,z_0-x_0)=0 \\ G_1(x_0,z_0-x_0)=0 \end{cases}$。于是有

$$\begin{cases} G_0(x_0,z_0-x_0)=G_0(x_0,iy_0)=i^{n-K}g_0(x_0,y_0)=0 \\ G_1(x_0,z_0-x_0)=G_1(x_0,iy_0)=i^{n-K-1}g_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

因此 y_0 是 $\begin{cases} g_0(x_0,y)=0 \\ g_1(x_0,y)=0 \end{cases}$ 的解，矛盾。根据预章定理 5，则 $(G_0(x_0,z-x_0),G_1(x_0,z-x_0))=1$，即 $G_0(x_0,z-x_0)$, $G_1(x_0,z-x_0)$ 关于 $(z-x_0)$ 互素，$F_d(x_0,z-x_0)$ 是 $F_0(x_0,z-x_0)$, $F_1(x_0,z-x_0)$ 关于 $(z-x_0)$ 的一个最大公因式。

综上所述，设 $x_0\in C$，若 $(2)^{x_0}$ 有解，则 $d(x_0,y)$ 关于 y 的次数 $K\geq 1$，$f(z)$ 就能在 z 平面上的点 x_0 分解成两个 z 的复系数多项式 $g(z)$ 与 $F_d(x_0,z-x_0)$ 的乘积，即

$$f(z)=g(z)F_d(x_0,z-x_0)$$

其中 $g(z)$ 为点 x_0 的 $g(z)$。由 $z=x_0+iy$，该式又可写成 $f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\ [i^K d(x_0,y)]$。于是说点 x_0 的 $g(z)$，就意味着 $f(z)=g(z)F_d(x_0,z-x_0)$ 或 $f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\ [i^K d(x_0,y)]$。反之亦然。

$g(z)=g(x_0+iy)$的**整除性质** 与 $f(z)=f(x_0+iy)$的整除性质相同。

点 x_0 的 $g(z)$ **性质 1** 设 $x_0\in R$， $y_0\in R$， $z_0=x_0+iy_0$，

$$g(z)=g(x_0+iy)=i^{n-K}[g_0(x_0,y)-ig_1(x_0,y)]$$

其中 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 均为关于 x_0， y 的实系数二元多项式，且 $g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 互素，即 $(g_0(x_0,y),g_1(x_0,y))=1$，则 $g(z_0)\neq 0$，于是 $(z-z_0)$不能整除 $g(z)$，即 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(x_0+iy)$。

证明 用反证法：假如 $g(z_0)=0$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $g(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的根，由定理 6 推论 2 则 y_0 是$\begin{cases}g_0(x_0,y)=0\\g_1(x_0,y)=0\end{cases}$的实数解，于是 $(y-y_0)\mid g_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)\mid g_1(x_0,y)$，$g_0(x_0,y)$, $g_1(x_0,y)$ 关于 y 非互素，矛盾。所以 $g(z_0)\neq 0$，$(z-z_0)$不能整除 $g(z)$，$z=x_0+iy$，$(z-z_0)=i(y-y_0)$，由 $g(z)=g(x_0+iy)$ 的整除性质，则 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(x_0+iy)$。】

点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1 表明 若 $x_0\in R$，则 $g(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上没有根。

下面继续定理 6 的推论

推论 3 设 $x_0\in R$， $y_0\in R$， l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l\mid f(x_0+iy)$ 的充要条件是：

$$(y-y_0)^l\mid f_0(x_0,y)\text{且}(y-y_0)^l\mid f_1(x_0,y)\text{。}$$

证明 当 $l=0$ 时，命题显然成立；当 $l\geq 1$ 时，由定理 4 充分性成立，再证必要性。若 $(y-y_0)^l\mid f(x_0+iy)$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重以上根， $l\geq 1$， $x_0\in R$， $y_0\in R$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的根，由定理 6 推论 2， y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的实数解，于是有

$$f(x_0+iy)=g(x_0+iy)\ [i^K d(x_0,y)]$$

由点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1，则 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(x_0+iy)$，于是 $((y-y_0)^l,g(x_0+iy))=1$，因此 $(y-y_0)^l\mid d(x_0,y)$。$d(x_0,y)$ 是 $f_0(x_0,y)$, $f_1(x_0,y)$ 关于 y 的最大公因式，于是

$$(y-y_0)^l\mid f_0(x_0,y)\text{且}(y-y_0)^l\mid f_1(x_0,y)\text{。】}$$

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根的充要条件是： y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重实数解。

证明 由推论 3，则 $(y-y_0)^l\mid f(a+iy)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $f(a+iy)$ 的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^l\mid f_1(a,y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(a,y)$, $f_1(a,y)$。

故命题成立。】

当$a \in R$时，$d(a,y)$是y的实系数多项式。

推论 5 设$a \in R$，$y_0 \in R$，l为非负整数，则$z_0 = a + iy_0$是$f(z) = 0$在z平面直线$x = a$上的l重根的充要条件是：y_0是$d(a,y) = 0$的l重实根。

证明 由推论 4 和定理 2 即得。】

设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$z_0 = x_0 + iy_0$，若$F_d(x_0, z - x_0)$在$z = z_0$时函数值$F_d(x_0, z_0 - x_0) = F_d(x_0, iy_0) = i^K d(x_0, y_0) = 0$，则$z_0 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$(在$z$平面上)的一个(复)根。显然，$z_0 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的根的充要条件是：$(z - z_0) | F_d(x_0, z - x_0)$。

再设l为非负整数，若$(z - z_0)^l | F_d(x_0, z - x_0)$，但$(z - z_0)^{l+1}$不能整除$F_d(x_0, z - x_0)$，则$z_0 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$(在$z$平面上)的$l$重(复)根。

$F_d(x_0, z - x_0) = F_d(x_0, iy)$的**整除性质** 设$x_0 \in C$，$y_0 \in C$，$l$为非负整数，$z = x_0 + iy$，$z_0 = x_0 + iy_0$，则$(z - z_0)^l | F_d(x_0, z - x_0)$的充要条件是：$(y - y_0)^l | F_d(x_0, iy)$。

它与$f(z) = f(x_0 + iy)$整除性质相同，仅有形式差异。$z_0 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的根的充要条件是：$(y - y_0) | F_d(x_0, iy)$；$z_0 = x_0 + iy_0$是$F_d(x_0, z - x_0) = 0$的l重根的充要条件是：$(y - y_0)^l | F_d(x_0, iy)$，但$(y - y_0)^{l+1}$不能整除$F_d(x_0, iy)$。

下面继续定理 6 的推论

推论 6 设$a \in R$，$y_0 \in R$，l为非负整数，则$z_0 = a + iy_0$是$f(z) = 0$在z平面直线$x = a$上的l重根的充要条件是：$z_0 = a + iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面直线$x = a$上的l重根。

证明 由题设和$F_d(a, iy) = i^K d(a, y)$，则$(y - y_0)^l | d(a, y)$，但$(y - y_0)^{l+1}$不能整除$d(a, y)$的充要条件是：$(y - y_0)^l | F_d(a, iy)$，但$(y - y_0)^{l+1}$不能整除$F_d(a, iy)$。因此，y_0是$d(a, y) = 0$的l重实根的充要条件是：$z_0 = a + iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$在z平面直线$x = a$上的l重根。再根据推论 5 即得。】

§4 方程一对对偶复根与方程组一对对偶复数解

定义 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 都是 $f(z) = 0$ 的根，特别当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，$x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根，则称 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ (在 z 平面上)的一对对偶(复)根。

定义解析：

1) 当 $x_0 \notin R$ 或 $y_0 \notin R$ 时，若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 都是 $f(z) = 0$ 的根，就可称 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ (在 z 平面上)的一对对偶(复)根。

2) 当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0} = x_0 + iy_0$，若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 + iy_0$ 都是 $f(z) = 0$ 的根，则要求 $x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根，才能称 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ (在 z 平面直线 $x = x_0$ 上)的一对对偶(复)根，其中 $y_0 = 0$ 时，则要求 x_0 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根，才能称 $z_1 = x_0$， $z_2 = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶实根。

事实上， $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = x_0 + iy_0$，若 $x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的单根，则 z_1 和 z_2 实际上是 $f(z) = 0$ 的同一个根；只有要求 $x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根，才能确保 z_1 和 z_2 是 $f(z) = 0$ 的一对根。

根据 $f(z) = f(x_0 + iy)$ 的整除性质，则 $x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根的充要条件是 $(y - y_0)^2 \mid f(x_0 + iy)$。

$f(z) = 0$ 一对对偶复根的**性质** 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$(y - y_0) \mid f(x_0 + iy)$ 且 $(y - \overline{y_0}) \mid f(\overline{x_0} + iy)$，特别当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，有 $(y - y_0)^2 \mid f(x_0 + iy)$。

证明 若 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根，则

$$(z - z_1) \mid f(z) \text{ 且 } (z - z_2) \mid f(z)。$$

令 $z = x_0 + iy$，则 $(z - z_1) = i(y - y_0)$，由 $f(z) = f(x_0 + iy)$ 的整除性质，有 $(y - y_0) \mid f(x_0 + iy)$；令 $z = \overline{x_0} + iy$，则 $(z - z_2) = i(y - \overline{y_0})$，由 $f(z) = f(\overline{x_0} + iy)$ 的整除性质，有 $(y - \overline{y_0}) \mid f(\overline{x_0} + iy)$ 特别当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，由定义，$x_0 + iy_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 2 重以上根，$(y - y_0)^2 \mid f(x_0 + iy)$。

反过来，若 $(y - y_0) \mid f(x_0 + iy)$ 且 $(y - \overline{y_0}) \mid f(\overline{x_0} + iy)$，特别当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，有 $(y - y_0)^2 \mid f(x_0 + iy)$，由 $f(z) = f(x_0 + iy)$ 的整除性质有 $(z - z_1) \mid f(z)$；由 $f(z) = f(\overline{x_0} + iy)$ 的

整除性质有 $(z-z_2)|f(z)$。于是 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根，特别当 $x_0\in R$ 且 $y_0\in R$ 时，由于 $(y-y_0)^2|f(x_0+iy)$，则 x_0+iy_0 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，因此 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根。】

推论 1 设 $x_0\in C$，则 $z_1=x_0$， $z_2=\overline{x_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$y|f(x_0+iy)$ 且 $y|f(\overline{x_0}+iy)$，特别当 $x_0\in R$ 时，有 $y^2|f(x_0+iy)$。

证明 在性质中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $x_0\notin R$ 或 $y_0\notin R$，则 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$(y-y_0)|f(x_0+iy)$ 且 $(y-\overline{y_0})|f(\overline{x_0}+iy)$。

证明 在性质中令 $x_0\notin R$ 或 $y_0\notin R$ 即得。】

推论 3 设 $a\in R$， $y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|f(a+iy)$。

证明 若 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则 $(z-z_1)|f(z)$ 且 $(z-z_2)|f(z)$。令 $z=a+iy$，则 $(z-z_1)=i(y-y_0)$，$(z-z_2)=i(y-\overline{y_0})$，由 $f(z)=f(a+iy)$ 的整除性质，则 $(y-y_0)|f(a+iy)$ 且 $(y-\overline{y_0})|f(a+iy)$，于是 1) 当 $y_0\notin R$ 时，$\overline{y_0}\neq y_0$，$((y-y_0),(y-\overline{y_0}))=1$，则 $(y-y_0)(y-\overline{y_0})|f(a+iy)$；2) 当 $y_0\in R$ 时，$\overline{y_0}=y_0$，由定义，$a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，即 $(y-y_0)^2|f(a+iy)$，必要性也成立。

反过来，若 $(y-y_0)(y-\overline{y_0})|f(a+iy)$，则 $(y-y_0)|f(a+iy)$ 且 $(y-\overline{y_0})|f(a+iy)$，由 $f(z)=f(a+iy)$ 的整除性质，则 $(z-z_1)|f(z)$ 且 $(z-z_2)|f(z)$，于是 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根，特别当 $y_0\in R$ 时，$\overline{y_0}=y_0$，有 $(y-y_0)^2|f(a+iy)$，即 $a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，因此 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根。】

设 $a\in R$， $y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则根 z_1 和 z_2 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称，其中 1) $y_0\in R$ 时， $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对对偶根；2) $y_0\notin R$ 时， $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的一对对偶根(y_0 为纯虚数时， $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面实轴上的一对对偶实根)。

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in R$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面直线 $x=a$

上)的一对对偶(复)根的充要条件是：$(y-y_0)^2 \mid f(a+iy)$。

证明 在推论 3 中令 $y_0 \in R$ 即得。】

定义 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$都是方程组(2)的解，特别当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，$(y-y_0)^2 \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^2 \mid f_1(x_0,y)$，则称 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶(复数)解。

定义解析：1) 当 $x_0 \notin R$ 或 $y_0 \notin R$ 时，若 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$都是(2)的解，就可称 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解；2) 当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，$(\overline{x_0},\overline{y_0})=(x_0,y_0)$，若 (x_0,y_0)，(x_0,y_0)都是(2)的解，则要求满足 $(y-y_0)^2 \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^2 \mid f_1(x_0,y)$，才能称 (x_0,y_0)，(x_0,y_0)是(2)的一对对偶实数解。

方程组(2)一对对偶复数解的**性质** 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解的充要条件是：$(y-y_0) \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0) \mid f_1(x_0,y)$，$(y-\overline{y_0}) \mid f_0(\overline{x_0},y)$ 且 $(y-\overline{y_0}) \mid f_1(\overline{x_0},y)$，特别当 $x_0 \in R$ 且 $y_0 \in R$ 时，$(y-y_0)^2 \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0)^2 \mid f_1(x_0,y)$。

证明 由题设和定义根据定理 1 推论即得。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，则 $(x_0,0)$，$(\overline{x_0},0)$是(2)的一对对偶复数解的充要条件是：$y \mid f_0(x_0,y)$ 且 $y \mid f_1(x_0,y)$，$y \mid f_0(\overline{x_0},y)$ 且 $y \mid f_1(\overline{x_0},y)$，特别当 $x_0 \in R$ 时，$y^2 \mid f_0(x_0,y)$ 且 $y^2 \mid f_1(x_0,y)$。

证明 在性质中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 2 设 $x_0 \notin R$ 或 $y_0 \notin R$，则 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解的充要条件是：$(y-y_0) \mid f_0(x_0,y)$ 且 $(y-y_0) \mid f_1(x_0,y)$，$(y-\overline{y_0}) \mid f_0(\overline{x_0},y)$ 且 $(y-\overline{y_0}) \mid f_1(\overline{x_0},y)$。

证明 在性质中令设 $x_0 \notin R$ 或 $y_0 \notin R$ 即得。】

定理 7 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：(x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是方程组(2)的一对对偶复数解。

证明 若 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则 $f(z)$的次数 $n \ge 2$，$f(z_1)=f(x_0+iy_0)=0$，$f(z_2)=f(\overline{x_0}+i\overline{y_0})=0$，由关系式(1)有

$$\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=f(x_0+iy_0)=0 \\ i^n f_0(\overline{x_0},\overline{y_0})+i^{n-1}f_1(\overline{x_0},\overline{y_0})=f(\overline{x_0}+i\overline{y_0})=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \\ \overline{i^n f_0(\overline{x_0},\overline{y_0})+i^{n-1}f_1(\overline{x_0},\overline{y_0})}=\overline{0} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \\ \overline{i^n} f_0(x_0,y_0)+\overline{i^{n-1}}f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

于是 1) 当n为偶数时，$\overline{i^n}=i^n$，$\overline{i^{n-1}}=-i^{n-1}$，有

$$\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \\ i^n f_0(x_0,y_0)-i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

2) 当n为奇数时，$\overline{i^n}=-i^n$，$\overline{i^{n-1}}=i^{n-1}$，有

$$\begin{cases} i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \\ -i^n f_0(x_0,y_0)+i^{n-1}f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

于是无论n为偶数或奇数，都有

$$\begin{cases} f_0(x_0,y_0)=0 \\ f_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

故(x_0,y_0)是(2)的解，由(2)解的性质，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$也是(2)的解。特别当$x_0\in R$且$y_0\in R$时，由一对对偶复根定义，$x_0+iy_0$是$f(z)=0$的 2 重以上根，即$(y-y_0)^2\mid f(x_0+iy)$，由定理 6 推论 3，则$(y-y_0)^2\mid f_0(x_0,y)$且$(y-y_0)^2\mid f_1(x_0,y)$，于是$(x_0,y_0)$，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解。

反过来，若(x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解，由定理 5，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$都是$f(z)=0$的根。特别当$x_0\in R$且$y_0\in R$时，由一对对偶复数解定义，$(y-y_0)^2\mid f_0(x_0,y)$且$(y-y_0)^2\mid f_1(x_0,y)$，由定理 6 推论 3，$(y-y_0)^2\mid f(x_0+iy)$，即$x_0+iy_0$是$f(z)=0$的 2 重以上根，于是$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根。】

推论 1 设$x_0\in C$，则$z_1=x_0$和$z_2=\overline{x_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根的充要条件是：$(x_0,0)$，$(\overline{x_0},0)$是(2)的一对对偶复数解。

证明 在定理 7 中令$y_0=0$即得。】

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根的充要条件是：(a,y_0)，$(a,\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解。

证明 在定理 7 中令$x_0=a\in R$即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对对偶根的充要条件是：(a,y_0)，(a,y_0)是(2)的一对对偶实数解。

证明 在推论 2 中令$y_0\in R$即得。】

推论 4 设$a\in R$，则$z_1=a$，$z_2=a$是$f(z)=0$的一对对偶实根的充要条件是：$(a,0)$，$(a,0)$是(2)的一对对偶实数解。

证明 在推论 3 中令$y_0=0$即得。】

推论 5 设$a\in R$，y_0为纯虚数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$(在z平面实轴上)的一对对偶实根的充要条件是：(a,y_0)，$(a,\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解。

证明 在推论 2 中令y_0为纯虚数即得。】

为了更好地理解定理 7 及其推论，我们引入

定义 设z_j，z_h是z平面上的任意两点$(j\neq h)$，若x_{jh}是z_j和$\overline{z_h}$的中点，则称x_{jh}是z_j对z_h的对影中点。

由第一篇第二章§5 中点定义，x_{jh}是z_j和$\overline{z_h}$的中点，包含以下二层含义：

1) 当$z_j\neq\overline{z_h}$时，x_{jh}为线段$z_j\overline{z_h}$的中点；2) 当$z_j=\overline{z_h}$时，$x_{jh}=z_j=\overline{z_h}$。

对影中点**性质** 设z_j，z_h是z平面上的任意两点$(j\neq h)$，则x_{jh}是z_j对z_h的对影中点的充要条件是：$x_{jh}=\dfrac{z_j+\overline{z_h}}{2}$。

证明 显然，x_{jh}是z_j对z_h的对影中点的充要条件是：x_{jh}是z_j和$\overline{z_h}$的中点。再由中点性质即得。】

例 设$x_j,y_j,x_h,y_h\in R$，$z_j=x_j+iy_j$和$z_h=x_h+iy_h$是z平面上的任意两点$(j\neq h)$，则x_{jh}是z_j对z_h的对影中点的充要条件是：$x_{jh}=\dfrac{x_j+x_h}{2}+i\dfrac{y_j-y_h}{2}$。

推论 1 设z_j，z_h是z平面上的任意两点$(j\neq h)$，x_{jh}是z_j对z_h的对影中点，若$z_j=x_{jh}+iy_{jh}$，则$z_h=\overline{x_{jh}}+i\overline{y_{jh}}$。

证明 由题意根据对影中点性质，则$x_{jh}=\dfrac{z_j+\overline{z_h}}{2}$，$\overline{x_{jh}}=\dfrac{z_h+\overline{z_j}}{2}$。若$z_j=x_{jh}+iy_{jh}$，则$z_h=2\overline{x_{jh}}-\overline{z_j}=2\overline{x_{jh}}-\left(\overline{x_{jh}}-i\overline{y_{jh}}\right)=\overline{x_{jh}}+i\overline{y_{jh}}$。】

推论 2 设 z_j，z_h 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$，若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，$z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}}$，则 x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点。

证明 若 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，$z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}}$，则 $\overline{z_h} = x_{jh} - iy_{jh}$，$x_{jh} = \dfrac{z_j + \overline{z_h}}{2}$，由对影中点性质，$x_{jh}$ 是 z_j 对 z_h 的对影中点。】

推论 3 设 z_j，z_h 是 z 平面上的任意两点 $(j \neq h)$，若 x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点，x_{hj} 是 z_h 对 z_j 的对影中点，则 $\overline{x_{jh}} = x_{hj}$。

证明 由题意根据对影中点性质，$x_{jh} = \dfrac{z_j + \overline{z_h}}{2}$，$x_{hj} = \dfrac{z_h + \overline{z_j}}{2}$，故 $\overline{x_{jh}} = \dfrac{z_h + \overline{z_j}}{2} = x_{hj}$。】

推论 4 设 z_j 和 z_h 是 z 平面上的任意两点，若 x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点，则 x_{jh} 也是 $\overline{z_h}$ 对 $\overline{z_j}$ 的对影中点。

证明 若 x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点，则 x_{jh} 是 z_j 和 $\overline{z_h}$ 的中点，x_{jh} 也是 $\overline{z_h}$ 和 z_j 的中点，由定义，则 x_{jh} 是 $\overline{z_h}$ 对 $\overline{z_j}$ 的对影中点。】

推论 4 将在第三章用到。

对于 z 平面上任意两点 z_j，z_h $(j \neq h)$，它们有两个对影中点：x_{jh} 和 x_{hj}，其中 x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点，x_{hj} 是 z_h 对 z_j 的对影中点，且 $\overline{x_{jh}} = x_{hj}$，于是称 x_{jh}，$\overline{x_{jh}}$ 是 z_j，z_h 的一双对影中点。由对影中点性质及推论，对于 z_j，z_h 可以有两种表达式：

$$\begin{cases} z_j = x_{jh} + iy_{jh} \\ z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}} \end{cases} \text{或} \begin{cases} z_h = x_{hj} + iy_{hj} \\ z_j = \overline{x_{hj}} + i\overline{y_{hj}} \end{cases}$$

其中 $\overline{x_{jh}} = x_{hj}$，$z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}} = x_{hj} + iy_{hj}$，于是 $\overline{y_{jh}} = y_{hj}$，可见两种表达式本质相同。为了方便，我们规定 $j < h$，并选择 $\begin{cases} z_j = x_{jh} + iy_{jh} \\ z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}} \end{cases}$ 作为 z 平面上任意两点 z_j，z_h 的表达式。

设 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是复系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 的所有复根，z_j 和 z_h 是其中任意两个根 $(1 \leq j < h, h = 2,3,\cdots,n)$，$x_{jh}$ 是 z_j 对 z_h 的对影中点，令 $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，由推论 1 则 $z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}}$，$z_j = x_{jh} + iy_{jh}$ 和 $z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}}$ 都是 $f(z)=0$ 的根，特别当 $x_{jh} \in R$ 且 $y_{jh} \in R$ 时，

$z_h=\overline{x_{jh}}+i\overline{y_{jh}}\ =x_{jh}+iy_{jh}=z_j$，则 $x_{jh}+iy_{jh}$ 是 $f(z)=0$ 的 2 重以上根，故 $z_j=x_{jh}+iy_{jh}$，$z_h=\overline{x_{jh}}+i\overline{y_{jh}}$ 是 $f(z)=0$ 以 x_{jh}，$\overline{x_{jh}}$ 为一双对影中点的一对对偶复根。于是 $f(z)=0$ 的这 n 个复根(无论是否有重根)合计可组成 $C_n^2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复根。

设 $x_{jh}\in C$，$y_{jh}\in C$，若 $z_j=x_{jh}+iy_{jh}$，$z_h=\overline{x_{jh}}+i\overline{y_{jh}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则又称 $z_j=x_{jh}+iy_{jh}$，$z_h=\overline{x_{jh}}+i\overline{y_{jh}}$ 是 $f(z)=0$ 以 x_{jh}，$\overline{x_{jh}}$ 为一双对影中点的成对对偶根。特别当 $x_{jh}=\overline{x_{jh}}=a\in R$ 时，则 $z_j=a+iy_{jh}$，$z_h=a+i\overline{y_{jh}}$ 是 $f(z)=0$ 以 a，a 为一双对影中点的成对对偶根，它们在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称。

定义 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0，$\overline{y_0}$ 都是方程组 $(2)^a$ 的解，特别当 $y_0\in R$ 时，$(y-y_0)^2\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^2\mid f_1(a,y)$，则称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭(复数)解。

定义解析：在 $a\in R$ 的前提下，1) 当 $y_0\notin R$ 时，若 y_0，$\overline{y_0}$ 都是 $(2)^a$ 的解，就可称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解；2) 当 $y_0\in R$ 时，若 y_0，y_0 都是 $(2)^a$ 的解，则要求满足 $(y-y_0)^2\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^2\mid f_1(a,y)$，即 y_0 是 $(2)^a$ 的 2 重以上解，才能称 y_0，y_0 是 $(2)^a$ 的一对共轭实数解。

$(2)^a$ 一对共轭复数解的**性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0})\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)(y-\overline{y_0})\mid f_1(a,y)$。

证明 若 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解，则

$$(y-y_0)\mid f_0(a,y)\text{ 且 }(y-y_0)\mid f_1(a,y)，\ (y-\overline{y_0})\mid f_0(a,y)\text{ 且 }(y-\overline{y_0})\mid f_1(a,y)$$

1) 当 $y_0\notin R$ 时，$((y-y_0),(y-\overline{y_0}))=1$，于是

$$(y-y_0)(y-\overline{y_0})\mid f_0(a,y)\text{ 且 }(y-y_0)(y-\overline{y_0})\mid f_1(a,y)$$

2) 当 $y_0\in R$ 时，$\overline{y_0}=y_0$，由定义，则 $(y-y_0)^2\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^2\mid f_1(a,y)$，必要性也成立。

反过来，若 $(y-y_0)(y-\overline{y_0})\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)(y-\overline{y_0})\mid f_1(a,y)$，则

$$(y-y_0)\mid f_0(a,y)\text{ 且 }(y-y_0)\mid f_1(a,y)，\ (y-\overline{y_0})\mid f_0(a,y)\text{ 且 }(y-\overline{y_0})\mid f_1(a,y)$$

于是 y_0，$\overline{y_0}$ 都是 $(2)^a$ 的解，特别当 $y_0\in R$ 时，由于 $\overline{y_0}=y_0$，有 $(y-y_0)^2\mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)^2\mid f_1(a,y)$，因此 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解。】

引理 设$a\in R$，$y_0\in C$，则(a,y_0)，$(a,\overline{y_0})$是方程组(2)的一对对偶复数解的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$是$(2)^a$的一对共轭复数解。

证明 由题设和定义根据定理 1 即得。】

方程组(2)一对对偶复数解的性质**推论 3** 设$a\in R$，$y_0\in C$，则(a,y_0)，$(a,\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ f_0(a,y)$且$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ f_1(a,y)$。

证明 由引理和$(2)^a$一对共轭复数解的性质即得。】

定理 8 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$是$(2)^a$的一对共轭复数解。

证明 由引理和定理 7 推论 2 即得。】

定理 8 表明 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ f(a+iy)$的充要条件是：

$$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ f_0(a,y)\text{且}(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ f_1(a,y)。$$

点a的$g(z)$**性质 2** 设$a\in R$，$g(z)=g(a+iy)=i^{n-K}[g_0(a,y)-ig_1(a,y)]$，其中$g_0(a,y)$，$g_1(a,y)$均为关于$a$，$y$的实系数二元多项式，且$g_0(a,y)$，$g_1(a,y)$关于$y$互素，即$(g_0(a,y),g_1(a,y))=1$，于是

1) $g(z)=0$没有以a，a为一双对影中点的成对对偶根；

2) 设$y_0\notin R$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$，则$(z-z_1)$和$(z-z_2)$不能同时整除$g(z)$，即$(y-y_0)$和$(y-\overline{y_0})$不能同时整除$g(a+iy)$。

证明 1) 用反证法：假如$g(z)=0$有以a，a为一双对影中点的成对对偶根，设为$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ ($y_0\in C$)，则$y_0\notin R$(否则，假如$y_0\in R$，则$a+iy_0$是$g(z)=0$的 2 重以上根，于是$g(a+iy_0)=0$，与性质 1，$g(a+iy_0)\neq 0$，矛盾)。那么由定理 8，则y_0，$\overline{y_0}$是$\begin{cases}g_0(a,y)=0\\g_1(a,y)=0\end{cases}$的一对共轭复数解，故$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ g_0(a,y)$且$(y-y_0)(y-\overline{y_0})|\ g_1(a,y)$，$g_0(a,y)$，$g_1(a,y)$关于$y$非互素，矛盾。所以，$g(z)=0$没有以$a$，$a$为一双对影中点的成对对偶根。2) 由 1)则$(z-z_1)$和$(z-z_2)$不能同时整除$g(z)$。$z=a+iy$，$(z-z_1)=i(y-y_0)$，$(z-z_2)=i(y-\overline{y_0})$，由$g(z)=g(a+iy)$的整除性质，则$(y-y_0)$和$(y-\overline{y_0})$不能同时整除$g(a+iy)$。】

定义 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0，$\overline{y_0}$都是$d(a,y)=0$的根，特别当$y_0\in R$时，y_0是

$d(a,y)=0$ 的 2 重以上根，即 $(y-y_0)^2 \mid d(a,y)$，则称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对共轭(复)根。

定义解析：在 $a\in R$ 的前提下，1) 当 $y_0\notin R$ 时，若 y_0，$\overline{y_0}$ 都是 $d(a,y)=0$ 的根，就可称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对共轭复根。2) 当 $y_0\in R$ 时，若 y_0，y_0 都是 $d(a,y)=0$ 的根，则要求 y_0 是 $d(a,y)=0$ 的 2 重以上根，即 $(y-y_0)^2 \mid d(a,y)$，才能称 y_0，y_0 是 $d(a,y)=0$ 的一对共轭实根。

$d(a,y)=0$ 一对共轭复根的**性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid d(a,y)$。

它的证明方法与 $(2)^a$ 一对共轭复数解的性质相同。

引理 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对共轭复根。

证明 $d(a,y)$ 是 $f_0(a,y)$, $f_1(a,y)$ 关于 y 的最大公因式，因此 $(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f_1(a,y)$ 的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid d(a,y)$。于是命题成立。】

定理 9 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对共轭复根。

证明 由引理和定理 8 即得。】

定理 9 表明 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f(a+iy)$ 的充要条件是：

$$(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid d(a,y)$$

定义 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 都是 $F_d(a,z-a)=0$ 的根，特别当 $y_0\in R$ 时，$a+iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 2 重以上根，则称 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ (在 z 平面上)的一对对偶(复)根。

定义解析：在 $a\in R$ 的前提下，1) 当 $y_0\notin R$ 时，若 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 都是 $F_d(a,z-a)=0$ 的根，就可称 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ (在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上)的一对对偶(复)根，其中 y_0 为纯虚数时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 在 z 平面实轴上的一对对偶实根。2) 当 $y_0\in R$ 时，若 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$ 都是 $F_d(a,z-a)=0$ 的根，则要求 $a+iy_0$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 2 重以上根，才

能称 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a + iy_0$ 是 $F_d(a, z-a) = 0$ (在 z 平面直线 $x = a$ 上)的一对对偶(复)根，其中 $y_0 = 0$ 时，则要求 a 是 $F_d(a, z-a) = 0$ 的 2 重以上根，才能称 $z_1 = a$， $z_2 = a$ 是 $F_d(a, z-a) = 0$ 的一对对偶实根。

$F_d(a, z-a) = 0$ 一对对偶复根的**性质** 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a, z-a) = 0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$(y - y_0)(y - \overline{y_0}) | F_d(a, iy)$。

它的证明方法与 $f(z) = 0$ 一对对偶复根的性质推论 3 相同。

引理 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $d(a, y) = 0$ 的一对共轭复根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a, z-a) = 0$ 的一对对偶复根。

证明 由题设和 $F_d(a, iy) = i^K d(a, y)$，则

$(y - y_0)(y - \overline{y_0}) | d(a, y)$ 的充要条件是：$(y - y_0)(y - \overline{y_0}) | F_d(a, iy)$。于是命题成立。】

定理 10 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$， $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a, z-a) = 0$ 的一对对偶复根。

证明 由引理和定理 9 即得。】

定理 10 表明 设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则 $(y - y_0)(y - \overline{y_0}) | f(a + iy)$ 的充要条件是：

$$(y - y_0)(y - \overline{y_0}) | F_d(a, iy)。$$

§5 最大公因式方程(二)根的性质与相关定理

$F_d(x_0,z-x_0)$是$F_0(x_0,z-x_0)$, $F_1(x_0,z-x_0)$关于$(z-x_0)$的最大公因式，它是关于x_0，$(z-x_0)$的复系数二元多项式，于是$F_d(x_0,z-x_0)$是$(z-x_0)$的复系数多项式，也是z的复系数多项式。

定理 11 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，l为非负整数，则 1) y_0是$d(x_0,y)=0$的根的充要条件是：$z_0=x_0+iy_0$是$F_d(x_0,z-x_0)=0$在z平面上的根；2) y_0是$d(x_0,y)=0$的l重根的充要条件是：$z_0=x_0+iy_0$是$F_d(x_0,z-x_0)=0$在z平面上的l重根。

证明 由题设和$F_d(x_0,iy)=i^K d(x_0,y)$，则 1) $(y-y_0)\mid d(x_0,y)$的充要条件是：$(y-y_0)\mid F_d(x_0,iy)$。故命题成立。2) $(y-y_0)^l\mid d(x_0,y)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能整除$d(x_0,y)$的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid F_d(x_0,iy)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能整除$F_d(x_0,iy)$。故命题成立。】

$F_d(x_0,z-x_0)=0$根的**性质**

性质 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，若$z_1=x_0+iy_0$是$F_d(x_0,z-x_0)=0$的根，则$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$F_d\left(\overline{x_0},z-\overline{x_0}\right)=0$的根。

证明 若$z_1=x_0+iy_0$是$F_d(x_0,z-x_0)=0$的根，则$F_d(x_0,z_1-x_0)=0$。于是

$$i^K d(x_0,y_0)=F_d(x_0,iy_0)=F_d(x_0,z_1-x_0)=0$$

y_0是$d(x_0,y)=0$的根，由$d(x_0,y)=0$根的性质，则$\overline{y_0}$是$d\left(\overline{x_0},y\right)=0$的根，即$d\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)=0$，于是$F_d\left(\overline{x_0},z_2-\overline{x_0}\right)=F_d\left(\overline{x_0},i\overline{y_0}\right)=i^K d\left(\overline{x_0},\overline{y_0}\right)=0$，故$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$F_d\left(\overline{x_0},z-\overline{x_0}\right)=0$的根。】

推论 1 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，则$z_1=x_0+iy_0$是$F_d(x_0,z-x_0)=0$的根的充要条件是：$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$F_d\left(\overline{x_0},z-\overline{x_0}\right)=0$的根。

证明 $\overline{\left(\overline{x_0}\right)}+i\overline{\left(\overline{y_0}\right)}=x_0+iy_0=z_1$，$F_d\left(\overline{\left(\overline{x_0}\right)},z-\overline{\left(\overline{x_0}\right)}\right)=F_d(x_0,z-x_0)$，充分性由性质即得。】

推论 2 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，则

$$(z-z_1)\mid F_d(x_0,z-x_0)\text{的充要条件是：}(z-z_2)\mid F_d\left(\overline{x_0},z-\overline{x_0}\right)。$$

证明 由推论 1 根据余数定理的推论即得。】

例 6 设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$，则

$$(z-z_1)\mid F_d(a,z-a)\text{的充要条件是：}(z-z_2)\mid F_d(a,z-a)$$

推论 3 设$a \in R$，$y_0 \in C$，l为非负整数，$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$，则

$(z - z_1)^l \mid F_d(a, z - a)$的充要条件是：$(z - z_2)^l \mid F_d(a, z - a)$。

证明 若$(z - z_1)^l \mid F_d(a, z - a)$，令$z = a + iy$，则$(z - z_1) = i(y - y_0)$，由$F_d(a, z - a) = F_d(a, iy)$的整除性质则$(y - y_0)^l \mid F_d(a, iy)$。由$F_d(a, iy) = i^K d(a, y)$可得$(y - y_0)^l \mid d(a, y)$。由$d(x_0, y) = 0$根的性质推论 3 则$\left(y - \overline{y_0}\right)^l \mid d(a, y)$。再由$F_d(a, iy) = i^K d(a, y)$可得$\left(y - \overline{y_0}\right)^l \mid F_d(a, iy)$。$(z - z_2) = i\left(y - \overline{y_0}\right)$，由$F_d(a, z - a) = F_d(a, iy)$的整除性质，则$(z - z_2)^l \mid F_d(a, z - a)$。充分性同理可证。】

推论 4 设$a \in R$，$y_0 \in C$，l为非负整数，则$z_1 = a + iy_0$是$F_d(a, z - a) = 0$的l重根的充要条件是：$z_2 = a + i\overline{y_0}$是$F_d(a, z - a) = 0$的$l$重根。

证明 根据推论 3 即得。】

设$a \in R$，$y_0 \notin R$，l为非负整数，若$z_1 = a + iy_0$和$z_2 = a + i\overline{y_0}$都是$F_d(a, z - a) = 0$的$l$重根，则称$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$是$F_d(a, z - a) = 0$(在$z$平面上)的一对$l$重对偶(复)根(其中$y_0$为纯虚数时，称$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$是$F_d(a, z - a) = 0$在$z$平面实轴上的一对$l$重对偶实根)。

推论 5 设$a \in R$，$y_0 \notin R$，l为非负整数，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$是$F_d(a, z - a) = 0$的一对$l$重对偶复根的充要条件是：$(y - y_0)^l\left(y - \overline{y_0}\right)^l \mid F_d(a, iy)$，但$(y - y_0)^{l+1}\left(y - \overline{y_0}\right)^{l+1}$不能整除$F_d(a, iy)$。

证明 由$F_d(a, iy) = i^K d(a, y)$，则$(y - y_0)^l\left(y - \overline{y_0}\right)^l \mid d(a, y)$，但$(y - y_0)^{l+1}\left(y - \overline{y_0}\right)^{l+1}$不能整除$d(a, y)$的充要条件是：$(y - y_0)^l\left(y - \overline{y_0}\right)^l \mid F_d(a, iy)$，但$(y - y_0)^{l+1}\left(y - \overline{y_0}\right)^{l+1}$不能整除$F_d(a, iy)$。

根据定理 11，则$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$是$F_d(a, z - a) = 0$的一对$l$重对偶复根的充要条件是：$y_0$，$\overline{y_0}$是$d(a, y) = 0$的一对$l$重共轭复根。再由$d(x_0, y) = 0$根的性质推论 5 即得。】

定理 12 设$a \in R$，$y_0 \notin R$，l为非负整数，则y_0，$\overline{y_0}$是$d(a, y) = 0$的一对l重共轭复根的充要条件是：$z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$是$F_d(a, z - a) = 0$ (在z平面上)的一对l重对偶复根。

证明 由定理 11 即得。】

例 7 设 $a\in R$， y_0 为纯虚数， l 为非负整数，则 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭纯虚数根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 在 z 平面实轴上的一对 l 重对偶实根。

证明 在定理 12 中令 y_0 为纯虚数即得。】

定理 13 设 $a\in R$，$f(z)=g(z)F_d(a,z-a)$，$y_0\notin R$，l_1,l_2 均为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$(z-z_1)|g(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g(z)$；2) $l_1<l_2$ 时，$(z-z_2)|g(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g(z)$；3) $l_1=l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g(z)$。

证明 由题设则 $(z-z_1)^{l_1}|f(z)$，但 $(z-z_1)^{l_1+1}$ 不能整除 $f(z)$；$(z-z_2)^{l_2}|f(z)$，但 $(z-z_2)^{l_2+1}$ 不能整除 $f(z)$；由点 a 的 $g(z)$ 性质 2，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 不能同时整除 $g(z)$，于是

1) $l_1>l_2$ 时，$(z-z_1)|g(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g(z)$。否则，假如 $(z-z_1)$ 不能整除 $g(z)$，则 $\left((z-z_1)^{l_1},g(z)\right)=1$，$(z-z_1)^{l_1}|F_d(a,z-a)$，由 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 根的性质推论 3，则 $(z-z_2)^{l_1}|F_d(a,z-a)$，又 $l_1\ge l_2+1$，故 $(z-z_2)^{l_2+1}|F_d(a,z-a)$，$(z-z_2)^{l_2+1}|f(z)$，矛盾。

2) $l_1<l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1=l_2$ 时，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $g(z)$。否则① 假如 $(z-z_1)|g(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $g(z)$，则 $\left((z-z_2)^{l_2},g(z)\right)=1$，$(z-z_2)^{l_2}|F_d(a,z-a)$，由 $F_d(x_0,z-x_0)=0$ 根的性质推论 3，则 $(z-z_1)^{l_2}|F_d(a,z-a)$，于是 $(z-z_1)^{l_1}|F_d(a,z-a)$。再由 $(z-z_1)|g(z)$，则 $(z-z_1)^{l_1+1}|f(z)$，矛盾。② 假如 $(z-z_2)|g(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $g(z)$，则与①同理可得 $(z-z_2)^{l_2+1}|f(z)$，矛盾。】

推论 设 $a\in R$， K 为正整数， $f(a+iy)=g(a+iy)[i^K d(a,y)]$， $y_0\notin R$， l_1,l_2 均为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$(y-y_0)|g(a+iy)$，但 $\left(y-\overline{y_0}\right)$ 不能整除 $g(a+iy)$；2) $l_1<l_2$ 时，$\left(y-\overline{y_0}\right)|g(a+iy)$，但 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(a+iy)$；3) $l_1=l_2$ 时，$(y-y_0)$ 和 $\left(y-\overline{y_0}\right)$ 都不能整除 $g(a+iy)$。

证明 令 $z=a+iy$，$F_d(a,iy)=i^K d(a,y)$，由题设则 $f(z)=g(z)F_d(a,z-a)$。又 $(z-z_1)=$

$i\left(y-y_0\right)$，$\left(z-z_2\right)=i\left(y-\overline{y_0}\right)$，由 $g(z)=g(a+iy)$ 的整除性质，则 $\left(z-z_1\right)|\,g(z)$ 的充要条件是：$\left(y-y_0\right)|\,g(a+iy)$；$\left(z-z_2\right)|\,g(z)$ 的充要条件是：$\left(y-\overline{y_0}\right)|\,g(a+iy)$。再由定理 13 即得。】

定理 14 设 $a\in R$，$(2)^a$ 有解，$y_0\notin R$，l_1,l_2 均为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l_2 重对偶复根，$z_1=a+iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$ 时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l_1 重对偶复根，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $g(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

证明 由于 $(2)^a$ 有解，则 $f(z)=g(z)F_d(a,z-a)$，再由题意根据定理 13，那么

1) $l_1>l_2$ 时，$\left(z-z_1\right)|\,g(z)$，但 $\left(z-z_2\right)$ 不能整除 $g(z)$，则 z_2 不是 $g(z)=0$ 的根，于是 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的 l_2 重根，由 $F_d\left(x_0,z-x_0\right)=0$ 根的性质推论 4，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l_2 重对偶复根。$z_1=a+iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，$F_d(a,z-a)=0$ 的 l_2 重根，于是 $z_1=a+iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根。

2) $l_1<l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1=l_2$ 时，$\left(z-z_1\right)$ 和 $\left(z-z_2\right)$ 都不能整除 $g(z)$，则 z_1 和 z_2 都不是 $g(z)=0$ 的根。又 $l_1=l_2=l$，所以 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根。】

推论 1 设 $a\in R$，$(2)^a$ 有解，$y_0\notin R$，l_1,l_2,l 均为非负整数，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根的充要条件是：$l=\min\left(l_1,l_2\right)$。

证明 由定理 14，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_d(a,z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根 $\Leftrightarrow$ $l_1>l_2$ 时，$l=l_2$；$l_1<l_2$ 时，$l=l_1$；$l_1=l_2$ 时，$l=l_1=l_2\Leftrightarrow l=\min\left(l_1,l_2\right)$。】

推论 2 设 $a\in R$，$(2)^a$ 有解，$y_0\notin R$，l_1,l_2 均为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1>l_2$ 时，y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l_2 重共轭复根，$z_1=a+iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 l_1-l_2 重根；2) $l_1<l_2$ 时，y_0，$\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l_1 重共轭复根，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $g(z)=0$ 的 l_2-l_1 重根；3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是

$d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭复根， $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

证明 由定理 14 和定理 12 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$(2)^a$ 有解，$y_0\notin R$，l_1,l_2,l 均为非负整数，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 y_0， $\overline{y_0}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是： $l=\min(l_1,l_2)$。

证明 由推论 1 和定理 12 即得。】

§6 方程组的解与结式方程的根

将 $f_0(x,y), f_1(x,y)$ 关于 y 的结式，记为 $res(f_0, f_1, y) = Q(x)$，则

$$
Q(x)=\left|\begin{array}{cccccccc}
\frac{a^{(n)}(x)}{n!} & \frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \cdots & \cdots & & \\
 & \frac{a^{(n)}(x)}{n!} & \frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \cdots & \cdots & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \frac{a^{(n)}(x)}{n!} & \frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \cdots \\
\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & \frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & -\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots & \cdots & & \\
 & \frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & \frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & -\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots & \cdots & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & & & \frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & \frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & -\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots
\end{array}\right|
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n-1 \\
\left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n
\end{array}
$$

这是一个 $2n-1$ 阶行列式，展开后是 x 的实系数多项式，次数为 n^2，可设

$$Q(x) = A_0 x^{n^2} + A_1 x^{n^2-1} + \cdots + A_{n^2-1}x + A_{n^2}$$

其中 $A_0 \neq 0$，$A_0, A_1, \cdots, A_{n^2}$ 均为实数。将 $Q(x)$ 看作函数，通过行列式计算 $Q(x)$ 对 n^2+1 个不同数的函数值，解线性方程组可求得 $A_0, A_1, \cdots, A_{n^2}$ 的具体数值。

定理[5] 如果 (x_0, y_0) 是方程组(2)的一个复数解，那么 x_0 就是 $Q(x)=0$ 的一个根；反过来，如果 x_0 是 $Q(x)=0$ 的一个复根，那么 $\frac{a^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{a^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} = 0$，或者存在一个复数 y_0，使 (x_0, y_0) 是方程组(2)的一个解。】

$Q(x)$ 代表结式，故称 $Q(x)=0$ 为结式方程。由于 $\frac{a^{(n)}(x_0)}{n!} = a_0 \neq 0$，定理可改写成

定理 15 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根；反之，若 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 (x_0, y_0) 是方程组(2)的解。

推论 1 设 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根；反之，若 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 y_0 是 $(2)^{x_0}$ 的解。

证明 由定理 15 和定理 1 即得。】

推论 2 设 $x_0 \in C$，则 $(2)^{x_0}$ 有解的充要条件是：$Q(x_0)=0$。

证明 由推论 1 即得。】

设 $x_0 \in C$，若 $Q(x_0)=0$，根据推论 2 则 $(2)^{x_0}$ 有解，$f(z)$就能在 z 平面上的点 x_0 分解成两个 z 的复系数多项式 $g(z)$ 与 $F_d(x_0, z-x_0)$ 的乘积，即 $f(z)=g(z)F_d(x_0, z-x_0)$。

定理 16 设 $z_j = x_j + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的所有复根（$x_j \in R$，$y_j \in R$），$z_j = x_{jh} + iy_{jh}$，$z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}}$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 是 $f(z)=0$ 的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复根，则 (x_j, y_j) $(j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组(2)的 n 个实数解；(x_{jh}, y_{jh})，$(\overline{x_{jh}}, \overline{y_{jh}})$ ($1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n$)是(2)的 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复数解；$x = x_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$，$x = x_{jh}$，$x = \overline{x_{jh}}$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 都是 $Q(x)=0$ 的根，于是 $(x-x_j)$，$(x-x_{jh})$，$(x-\overline{x_{jh}})$都是 $Q(x)$ 的一次因式，而且

$$Q(x) = A_0 \prod_{j=1}^{n} (x-x_j) \prod_{1\le j<h, h=2}^{n} (x-x_{jh})(x-\overline{x_{jh}}) \qquad (A_0 \in R \text{ 且 } A_0 \ne 0)$$

方程组(2)有 n^2 个解，$Q(x)=0$ 有 n^2 个根，(2)的一个解对应 $Q(x)=0$ 的一个根。

证明 根据定理 6 和定理 7 以及定理 15 即得，必须说明的是

1. 在 $f(z)=0$ 没有重根，对影中点没有重合，并且根与对影中点也不重合的情况下，$x = x_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$，$x = x_{jh}$，$x = \overline{x_{jh}}$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 都是 $Q(x)=0$ 的单根(即 $(x-x_j)$，$(x-x_{jh})$，$(x-\overline{x_{jh}})$都是 $Q(x)$ 的 1 重因式)，这些根的个数总和等于 $n + 2C_n^2 = n^2$，恰好等于 $Q(x)=0$ 的次数，因而这 n^2 个根就是 $Q(x)=0$ 的所有复根。于是有

$$Q(x) = A_0 \prod_{j=1}^{n} (x-x_j) \prod_{1\le j<h, h=2}^{n} (x-x_{jh})(x-\overline{x_{jh}}) \qquad (A_0 \in R \text{ 且 } A_0 \ne 0)$$

方程组(2)有 n^2 个各不相同的复数解，$Q(x)=0$ 有 n^2 个根，可以说(2)的一个解对应 $Q(x)=0$ 的一个根。

2. 在 $f(z)=0$ 有重根或对影中点有重合或根与对影中点有重合的情况下，它依然有 n 个复根(含重根)，可组合成 $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复根，对影中点也依然是 $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 对(只是有重合而已)，方程组(2)复数解的个数也还是 n^2 个(其中会有相同的解)，$Q(x)=0$

依然有n^2个根，这时只需换一种更普通的表述方式，说$\left(x-x_j\right)$，$\left(x-x_{jh}\right)$，$\left(x-\overline{x_{jh}}\right)$都是$Q(x)$的一次因式。这些因式的次数之和为$n+2C_n^2=n^2$，恰好等于$Q(x)$的次数，因而它们就是$Q(x)$的全部因式。于是有

$$Q(x)=A_0\prod_{j=1}^{n}\left(x-x_j\right)\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}\left(x-x_{jh}\right)\left(x-\overline{x_{jh}}\right)\qquad (A_0\in R \text{且} A_0\neq 0)$$ 】

定义　设$x_0\in C$，$y_0\in C$，l为非负整数，若$\left(x_0,y_0\right)$是方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的l重元素，则称$\left(x_0,y_0\right)$是(2)的l重(复数)解。

$\left(x_0,y_0\right)$是(2)的l重解的充要条件是：$\left(x_0,y_0\right)$是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的l重元素。$\left(x_0,y_0\right)$是(2)的0重解的充要条件是：$\left(x_0,y_0\right)$不是(2)的解。

对n次方程$f(z)=0$，由定理 16，方程组(2)有n^2个解，$Q(x)=0$有n^2个根，(2)的一个解对应$Q(x)=0$的一个根。若x_0是$Q(x)=0$的一个L重根，则(2)恰好有L个解与之相对应，这L个解可写成

$$\left(x_0,y_j\right),\quad j=1,2,\cdots,L\text{。}$$

这L个解就是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解。

由(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$可写成

$$\{(x,y)\}=\left\{(x,y)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

其中$x=x_0$的全部解(含相同解)组成的集合可写成

$$\left\{\left(x_0,y\right)|\left\{\begin{array}{l}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

因此，说$\left(x_0,y_j\right)$($j=1,2,\cdots,L$)是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解，就意味着$\left\{\left(x_0,y_j\right)|\ j=1,2,\cdots,L\right\}=\left\{\left(x_0,y\right)|\left\{\begin{array}{l}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$。

写成推论则有

推论 1　设$x_0\in C$，则x_0是$Q(x)=0$的L重根的充要条件是：$\exists\ y_j\in C$，$j=1,2,\cdots,L$，使得$\left(x_0,y_j\right)$ $\left(j=1,2,\cdots,L\right)$是方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解(含相同解)，即$\left\{\left(x_0,y_j\right)|\ j=1,2,\cdots,L\right\}=\left\{\left(x_0,y\right)|\left\{\begin{array}{l}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$

推论 1 可简述成 设 $x_0 \in C$，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根的充要条件是：(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L 。

推论 2 设 $a\in R$， $y_j^{(0)}\in R$ 且 $y_j^{(0)}\neq 0$， $y_j\notin R$， l 为非负整数， $z_0=a$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的 l 重实根，$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,t)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有各不相同的非 a 根，其中 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $f(z)=0$ 的 $l_j^{(0)}$ 重根； $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ ($j=1,2,\cdots,s$)是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的以 a， a 为一双对影中点的所有各不相同的成对对偶根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根， $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重实根，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a， a 为一双对影中点的成对对偶根共有 $\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{t}\dfrac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$ 对，而且

$$L=2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\frac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]+l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$$

其中当 $l=n$ 时， $t=0$， $s=0$， $L=n^2$；当 $l=0$ 时， $L=\sum\limits_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum\limits_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$ 。

证明 1) 不妨设 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一个根(其中 $y_0\in R$)，由定理 16，则相应的 $(x-a)$ 是 $Q(x)$ 的一次因式。 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 $l_j^{(0)}$ 重根 $(j=1,2,\cdots,t)$，则相应的 $(x-a)$ 是 $Q(x)$ 的 $\sum\limits_{j=1}^{t}l_j^{(0)}$ 次因式； $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重实根，于是相应的 $(x-a)$ 是 $Q(x)$ 的 l 次因式。

2) 不妨设 $z_j=a+iy_{jh}$， $z_h=a+i\overline{y_{jh}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根(其中 $y_{jh}\in C$)，则 $z_j=a+iy_{jh}$， $z_h=a+i\overline{y_{jh}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 a， a 为一双对影中点的成对对偶根，由定理 16，则相应的 $(x-a)$ 是 $Q(x)$ 的 2 次因式。

$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,t)$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有各不相同的非 a 根，其中 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $f(z)=0$ 的 $l_j^{(0)}$ 重根，则 $l_j^{(0)}$ 个 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 本身可组合成 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上以 a， a 为一双对影中点的成对非 a 对偶根 $z_j=a+iy_j^{(0)}$， $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 有

$\dfrac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}$ 对 $(j=1,2,\cdots,t)$，这样的成对非 a 对偶根共计有 $\sum_{j=1}^{t}\dfrac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}$ 对。$z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重实根，则 l 个 $z_0=a$ 本身可组合成 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上以 a，a 为一双对影中点的成对 a 对偶根 $z_0=a$，$z_0=a$ 有 $\dfrac{l(l-1)}{2}$ 对。于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上以 a，a 为一双对影中点的成对对偶根合计有 $\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\dfrac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}$ 对。

$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的以 a，a 为一双对影中点的所有各不相同的成对对偶根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，可组合成 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上以 a，a 为一双对影中点的成对对偶根 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 有 $l_{j1}l_{j2}$ 对($j=1,2,\cdots,s$)，故 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上以 a，a 为一双对影中点的成对对偶根共有 $\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$ 对。

因此，$f(z)=0$ 在 z 平面上以 a，a 为一双对影中点的成对对偶根共有

$$\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\frac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$$

对，于是相应的 $(x-a)$ 是 $Q(x)$ 的 $2\left[\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\dfrac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]$ 次因式。

综合 1) 2)，则 $(x-a)$ 是 $Q(x)$ 的 $2\left[\dfrac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\dfrac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]+l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}$ 重因式，又 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重实根，于是

$$L=2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\frac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]+l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}\quad=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$$

故命题成立。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in R$，若 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根，则 (a,y_0) 是方程组(2)的 l^2 重实数解。

证明 根据定理 16，若 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根，则它对应(2)的 l 个实数解 (a,y_0)；这 l 个 $z_0=a+iy_0$ 本身可组合成 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 $\frac{l(l-1)}{2}$ 对对偶根 $z_0=a+iy_0$，$z_0=a+iy_0$，它们对应(2)的 $\frac{l(l-1)}{2}$ 对对偶实数解 (a,y_0)，(a,y_0)。于是 (a,y_0) 是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的 l^2 重元素，因此 (a,y_0) 是(2)的 l^2 重实数解。】

推论 4 设 $x_0\notin R$ 或 $y_0\notin R$，若 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 (x_0,y_0) 和 $(\overline{x_0},\overline{y_0})$ 都是方程组(2)的 l_1l_2 重解。

证明 若 $z_1=x_0+iy_0$ 和 $z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则它们可组合成 $f(z)=0$ 的 l_1l_2 对对偶复根 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，由定理 16，则(2)有 l_1l_2 对对偶复数解 (x_0,y_0)，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$ 与之相对应，于是 (x_0,y_0) 和 $(\overline{x_0},\overline{y_0})$ 都是(2)所有复数解(含相同解)组成的集合的 l_1l_2 重元素，因此 (x_0,y_0) 和 $(\overline{x_0},\overline{y_0})$ 都是(2)的 l_1l_2 重解。】

推论 5 n 次方程 $f(z)=0$ 复根的实部均为 $Q(x)=0$ 的实根，$Q(x)=0$ 至少有一个实根。

证明 根据定理 16 即得。】

要求 $f(z)=0$ 复根的实部，由推论 5 可先求 $Q(x)=0$ 的实根。作以 $Q(x),Q'(x)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 $x\ (x\in R)$ 的变号数分别记为 V_x^Q 和 U_x^Q。

设 $V_{-\infty}^Q-V_{+\infty}^Q=H$，由推论 5，则 $H\geq 1$，于是可在 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $Q(x)=0$ 实根的 H 个隔离区间：$[\alpha_1,\beta_1]$，$[\alpha_2,\beta_2]$，$\cdots$，$[\alpha_H,\beta_H]$，其中 $\alpha_1<\beta_1\leq\alpha_2<\beta_2\leq\cdots\leq\alpha_H<\beta_H$，且 $Q(\alpha_j)\neq 0$，$Q(\beta_j)\neq 0$，$V_{\alpha_j}^Q-V_{\beta_j}^Q=1$，$j=1,2,\cdots,H$。于是 $Q(x)=0$ 的 H 个各不相同的实根就可表示为 $x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$（或简写成 $x_j={}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{Q(\ )}$），$j=1,2,\cdots,H$，其中 x_j 是 $Q(x)=0$ 的 $L_j=U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q$ 重实根。

$Q(x)=0$ 的实根总数为：$U_{-\infty}^Q-U_{+\infty}^Q=\sum_{j=1}^{H}\left(U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q\right)=\sum_{j=1}^{H}L_j$。

$Q(x)$的实根因式可表示为：$\prod_{j=1}^{H}\left(x-\sqrt[\left[\alpha_j,\beta_j\right]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\right)^{U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q}$

若α,β均为有限实数，且$\alpha<x_0<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(x_0)=0$，$Q(\beta)\neq 0$，$V_\alpha^Q-V_\beta^Q=1$，则$Q(x)=0$在区间(α,β)内的根$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$ (即$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\;)}$)，根$x_0$的重数$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$。

为了方便与二元多项式方程组(2)进行对比，我们可以将方程组

$$\begin{cases}f_0(a,y)=0\\ f_1(a,y)=0\end{cases}\qquad (2)^a$$

视为关于a，y的二元多项式方程组。设$a\in R$，$y_0\in C$，若$f_0(a,y),f_1(a,y)$在$y=y_0$时的函数值满足$f_0(a,y_0)=0$且$f_1(a,y_0)=0$，则称(a,y_0)是方程组$(2)^a$的一个(复数)解。

(a,y_0)是$(2)^a$的解的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_0(a,y)$且$(y-y_0)\mid f_1(a,y)$。

再设l为非负整数，若$(y-y_0)^l\mid f_0(a,y)$且$(y-y_0)^l\mid f_1(a,y)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能同时整除$f_0(a,y),f_1(a,y)$，则称(a,y_0)是方程组$(2)^a$的l重(复数)解。统计解的个数，重解按重数计算。设$(2)^a$复数解(含重解)的个数为K_a，则$K_a\leq n$。由$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合可写成$\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(a,y)=0\\ f_1(a,y)=0\end{cases}(y\in C)\;(2)^a\right\}$

(a,y_0)是$(2)^a$的l重解的充要条件是：(a,y_0)是$(2)^a$所有复数解组成的集合的l重元素。

定理 17 设$a\in R$，$Q(a)=0$，则$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合是方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=a$的全部解(含相同解)组成的集合的子集，即

$$\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(a,y)=0\\ f_1(a,y)=0\end{cases}(y\in C)\;(2)^a\right\}\subset\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\;(2)\right\}$$

其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，有

$$\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(a,y)=0\\ f_1(a,y)=0\end{cases}(y\in C)\;(2)^a\right\}=\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\;(2)\right\}$$

证明 由$a\in R$，$Q(a)=0$，则$(2)^a$有解。记

$$A=\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(a,y)=0\\ f_1(a,y)=0\end{cases}(y\in C)\;(2)^a\right\},\quad B=\left\{(a,y)\mid\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\;(2)\right\}$$

则 A 是由 $(2)^a$ 所有复数解组成的集合，B 是由(2)所有复数解组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=a$ 的全部解组成的集合，A 和 B 是两个允许有重元的有限集合。

对 $\forall\ (a,y_{j_0})\in A$，$(a,y_{j_0})(l)\in A$，则 $l\geq 1$，(a,y_{j_0}) 是 $(2)^a$ 的任意一个解，且 (a,y_{j_0}) 是 $(2)^a$ 的 l 重解，于是 $(y-y_{j_0})^l \mid f_0(a,y)$ 且 $(y-y_{j_0})^l \mid f_1(a,y)$，但 $(y-y_{j_0})^{l+1}$ 不能同时整除 $f_0(a,y)$，$f_1(a,y)$。那么

1) $y_{j_0}\in R$ 时，由定理 6 推论 3，则 $(y-y_{j_0})^l \mid f(a+iy)$，但 $(y-y_{j_0})^{l+1}$ 不能整除 $f(a+iy)$，即 $z_0=a+iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根，根据定理 16 推论 3 则 (a,y_{j_0}) 是方程组(2)的 l^2 重实数解，故 (a,y_{j_0}) 是(2)所有复数解组成的集合的 l^2 重元素，从而也是 B 的 l^2 重元素，由 $l\geq 1$，$l^2\geq l$，则 (a,y_{j_0}) 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $(a,y_{j_0})(\geq l)\in B$。

2) $y_{j_0}\notin R$ 时，$(y-y_{j_0})^l \mid d(a,y)$，但 $(y-y_{j_0})^{l+1}$ 不能整除 $d(a,y)$。由 $d(x_0,y)=0$ 根的性质推论 3，则 $(y-\overline{y_0})^l \mid d(a,y)$，但 $(y-\overline{y_0})^{l+1}$ 不能整除 $d(a,y)$，因此 y_{j_0}，$\overline{y_{j_0}}$ 是 $d(a,y)=0$ 的一对 l 重共轭复根。不妨设 $z_1=a+iy_{j_0}$，$z_2=a+i\overline{y_{j_0}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由定理 14 推论 3，则 $l=\min(l_1,l_2)$。由定理 16 推论 4，则 (a,y_{j_0})，$(a,\overline{y_{j_0}})$ 都是方程组(2)的 l_1l_2 重解，于是 (a,y_{j_0}) 是(2)所有复数解组成的集合的 l_1l_2 重元素，从而也是 B 的 l_1l_2 重元素。由 $l=\min(l_1,l_2)$ 且 $l\geq 1$，$l_1l_2\geq l^2\geq l$，则 (a,y_{j_0}) 也是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $(a,y_{j_0})(\geq l)\in B$。

总之，由 $\forall\ (a,y_{j_0})\in A$，$(a,y_{j_0})(l)\in A \quad \Rightarrow \quad (a,y_{j_0})(\geq l)\in B$，故 $A\subset B$，即

$$\left\{(a,y) \mid \begin{cases} f_0(a,y)=0 \\ f_1(a,y)=0 \end{cases} (y\in C)\ \ (2)^a\right\} \subset \left\{(a,y) \mid \begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases} (x\in C, y\in C)\ \ (2)\right\}。$$

其中 $(f(z),f'(z))=1$ 时，$f(z)=0$ 根均为 1 重根(即单根)。我们说，$(2)^a$ 的解均为 1 重解，即 A 的元素都是 1 重元素。否则，假设存在 $(a,y_{j_0})(l)\in A$，$l>1$，那么重复上面的论证可知：$y_{j_0}\in R$ 时，$z_0=a+iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根($l>1$)，矛盾；$y_{j_0}\notin R$ 时，由于 $l=\min(l_1,l_2)$ 且 $l>1$，则 $l_1>1$，$l_2>1$，$z_1=a+iy_{j_0}$ 和 $z_2=a+i\overline{y_{j_0}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，矛盾。

因此，对 $\forall\ (a,y_{j_0})\in A$，$(a,y_{j_0})(l)\in A$，则 $l=1$，重复论证可知：$y_{j_0}\in R$ 时，$l^2=l=1$，

于是$\left(a,y_{j_0}\right)$是B的l重元素，即$\left(a,y_{j_0}\right)(l)\in B$； $y_{j_0}\notin R$时，$l=\min(l_1,l_2)$且$l=1$，$l_1=1$，$l_2=1$，则$l_1l_2=l^2=l=1$，于是$\left(a,y_{j_0}\right)$是B的l重元素，即$\left(a,y_{j_0}\right)(l)\in B$。总之，由

$$\forall\ \left(a,y_{j_0}\right)\in A,\ \left(a,y_{j_0}\right)(l)\in A\Rightarrow\left(a,y_{j_0}\right)(l)\in B。$$

反过来，对$\forall\ \left(a,y_{j_1}\right)\in B$，那么$\left(a,y_{j_1}\right)$是方程组(2)的解，由定理 1，则$y_{j_1}$是$(2)^a$的解，由新定义即$\left(a,y_{j_1}\right)$是$(2)^a$的解，于是$\left(a,y_{j_1}\right)\in A$，即由$\forall\ \left(a,y_{j_1}\right)\in B\Rightarrow\left(a,y_{j_1}\right)\in A$。

根据预章定理 1，则$A=B$，即

$$\left\{(a,y)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0(a,y)=0\\ f_1(a,y)=0\end{array}\right.\ (y\in C)\ \ (2)^a\right\}=\left\{(a,y)\,|\left\{\begin{array}{l}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{array}\right.\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}。】$$

定理 18 设$a\in R$，$Q(a)=0$，$(2)^a$复数解(含重解)的个数为K_a，方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=a$的全部解(含相同解)的个数为L，则$K_a\le L$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$K_a=L$。

证明 不妨设A是由$(2)^a$所有复数解组成的集合，B是由(2)所有复数解组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=a$的全部解组成的集合。由题设则A的元素个数为K_a，B的元素个数为L。由定理 17，则$A\subset B$，因此$K_a\le L$，其中当$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$A=B$，于是$K_a=L$。】

显然，二元和一元方程组$(2)^a$复数解的个数相等，定理 18 中$(2)^a$的复数解，无论用一元或二元法表示，命题均成立。

定理 19 设$a\in R$，L为正整数，若$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，$(2)^a$复数解(含重解)的个数为K_a，则$K_a\le L$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$K_a=L$。

证明 由定理 16 推论 1 和定理 18 即得。】

定理 20 设$a\in R$，L为正整数，若$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，$d(a,y)$关于y的次数为K，则$K\le L$，其中$\left(f(z),f'(z)\right)=1$时，$K=L$。

证明 由定理 2 推论 2 和定理 19 即得。】

第二章
施图姆序列

§1 恒定元为实数 *a* 的方程组

设复系数 n 次多项式 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$，其中 $n\geq 1$，$c_0\neq 0$，$c_j\in C$，$c_j=a_j+ib_j$，$a_j\in R$，$b_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$，且 $b_0=0$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零，$a_0=c_0\neq 0$，i 为虚数单位，并记

$$a(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,\quad b(z)=b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}z+b_n$$

则 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是实系数多项式，且有

$$f(z)=a(z)+ib(z)$$

令 $a\in R$， $z=a+iy$，则由第一章可知

$$f(z)=f(a+iy)=F_0(a,iy)+F_1(a,iy)=i^nf_0(a,y)+i^{n-1}f_1(a,y)=i^n\left[f_0(a,y)-if_1(a,y)\right]$$

其中
$$\begin{cases} f_0(a,y)=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}y^n+\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{a^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{b^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots \\ f_1(a,y)=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}+\dfrac{b^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{a^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}-\dfrac{b^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots \end{cases}$$

$f_0(a,y)$ 和 $f_1(a,y)$ 是 y 的实系数多项式。于是由关系式

$$f(z)=f(a+iy)=i^n\left[f_0(a,y)-if_1(a,y)\right] \qquad (1)^a$$

可得 y 的实系数一元多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(a,y)=0 \\ f_1(a,y)=0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

其中 a 为恒定元， y 是变元。$\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$， 故 $f_0(a,y),f_1(a,y)$ 是两个 y 的系数不全为零的多项式。

定理 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 (a,y_0) 是方程组(2)的解的充要条件是：y_0 是 $(2)^a$ 的解。

证明 在第一章定理 1 中令 $x_0=a\in R$ 即得。】

简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$， $f_1(a,y)=f_1(y)$，称为点 a 的 $f_0(y),f_1(y)$，则方程组 $(2)^a$ 可简写

为

$$\begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

$f_0(y), f_1(y)$是实系数多项式。$\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$，故 $f_0(y)$是次数为n的多项式，但 $f_1(y)$却有可能是零多项式，即当它的系数全为零时。关系式$(1)^a$可写成

$$f(z)=f(a+iy)=i^n[f_0(y)-if_1(y)] \qquad (1)^a$$

设$a\in R$，$y_0\in C$，若点a的 $f_0(y), f_1(y)$在 $y=y_0$ 时函数值满足 $f_0(y_0)=0$ 且 $f_1(y_0)=0$，则 y_0 是方程组$(2)^a$的一个(复数)解。若点a的 $f_1(y)\equiv 0$，则点a的 $f_0(y)(=0)$的根就是$(2)^a$的解。显然，y_0是$(2)^a$的解的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_0(y)$且$(y-y_0)\mid f_1(y)$。

再设l为非负整数，若$(y-y_0)^l\mid f_0(y)$且$(y-y_0)^l\mid f_1(y)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能同时整除 $f_0(y), f_1(y)$，则y_0是方程组$(2)^a$的l重(复数)解。若点a的 $f_1(y)\equiv 0$，则点a的 $f_0(y)(=0)$的l重根就是$(2)^a$的l重解。由$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合是允许有重元的有限集合，它可写成$\left\{ y \mid \begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} \ (y\in C)\ \ (2)^a \right\}$

显然，y_0是简写前$(2)^a$的解的充要条件是：y_0是简写后$(2)^a$的解。将$(2)^a$简写不影响定理 1 命题的成立，以下各定理也是如此。

当点a的 $f_1(y)\neq 0$时，将$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合记作$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}$，且称它是方程 $f_0(y)=0$所有复根组成的集合与方程 $f_1(y)=0$所有复根组成的集合的交集。若$\sqrt{f_1(\ )}=\phi$，则$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}=\phi$。交集$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}$的本质特征是：设 $y_0\in C$，l, l_0, l_1均为非负整数，则 $y_0(l)\in\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )} \Leftrightarrow y_0(l_0)\in\sqrt{f_0(\ )}$，$y_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}$，其中 $l=\min(l_0, l_1)$。

当点a的 $f_1(y)\equiv 0$时，若仍然把 $f_1(y)=0$看作方程，则任意复数都是它的根，而且根的重数都是无限次的。在预章由零多项式方程 $f_1(y)=0$的所有复根组成的集合$\sqrt{f_1(\ )}$称为整式方程的根全集。根全集$\sqrt{f_1(\ )}$是一个允许有重元的无限集合，任意复数都是它的元素，而且元素的重数也都是无限次的。若套用子集定义，则有$\sqrt{f_0(\ )}\subset\sqrt{f_1(\ )}$。为了统一，这时仍将$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合记作

$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}$，且称它是方程 $f_0(y)=0$ 所有复根组成的集合与零多项式方程 $f_1(y)=0$ 所有复根组成的根合的交集。这时，$(2)^a$ 就转化为 $f_0(y)=0$，故 $\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}$ 的本质特征是 $\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}=\sqrt{f_0(\ )}$。

总之，无论点 a 的 $f_1(y)$ 是否是非零多项式，都有

$$\left\{y\,\middle|\,\begin{cases}f_0(y)=0\\ f_1(y)=0\end{cases}(y\in C)\ \ (2)^a\right\}=\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}。$$

y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重解的充要条件是：$y_0(l)\in\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}$。

定理 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 a 是 $Q(x)=0$ 的根；反过来，若 a 是 $Q(x)=0$ 的根，则至少存在一个复数 y_0，使 y_0 是 $(2)^a$ 的解。

证明 由定理 1 和第一章定理 15 即得。】

推论 设 $a\in R$，则 $(2)^a$ 有解的充要条件是：$Q(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

引理 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$(2)^a$ 复数解(含重解)的个数为 K_a，方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=a$ 的全部解(含相同解)的个数为 L，则 $K_a\le L$，其中 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，$K_a=L$。

证明 由第一章定理 18 即得。】

定理 3 设 $a\in R$，L 为正整数，若 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$(2)^a$ 复数解(含重解)的个数为 K_a，则 $K_a\le L$，其中 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时，$K_a=L$。

证明 由引理和第一章定理 16 推论 1 即得。】

$(2)^a$ 解的**性质** 性质及推论 1 至 4 与第一篇第三章 $(2)^a$ 解的性质 2 及其推论相同。

性质 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(2)^a$ 的解，则 $\overline{y_0}$ 也是 $(2)^a$ 的解。

推论 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0 是 $(2)^a$ 的解的充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的解。

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)\mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)\mid f_1(y)$ 的充要条件是：

$$\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_0(y)\text{ 且 }\left(y-\overline{y_0}\right)\mid f_1(y)。$$

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l\mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)^l\mid f_1(y)$ 的充要条件是：$\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid f_0(y)$ 且 $\left(y-\overline{y_0}\right)^l\mid f_1(y)$。

推论 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则y_0是$(2)^a$的l重解的充要条件是：$\overline{y_0}$是$(2)^a$的l重解。

推论 5 设$a\in R$，$y_0\notin R$，l为非负整数，则y_0，$\overline{y_0}$是$(2)^a$的一对l重共轭复数解的充要条件是：$(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_0(y)$且$(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_1(y)$，但$(y-y_0)^{l+1}\left(y-\overline{y_0}\right)^{l+1}$不能同时整除$f_0(y), f_1(y)$。

证明 在第一章$(2)^{x_0}$解的性质推论 5 中简记$f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$即得。】

定理 4 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为正整数，若$(y-y_0)^l \mid f_0(y)$且$(y-y_0)^l \mid f_1(y)$，则$(y-y_0)^l \mid f(a+iy)$，即$z_0=a+iy_0$是$f(z)=0$的l重以上根。

证明 在第一章定理 4 中令$x_0=a\in R$，简记$f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$即得。】

定理 5 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(2)^a$的解，则$z_0=a+iy_0$是$f(z)=0$的根。

证明 由定理 1 和第一章定理 5 即得。】

推论 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(2)^a$的解，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$都是$f(z)=0$的根。

证明 由$(2)^a$解的性质和定理 5 即得。】

定义 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，若y_0，$-y_0$都是方程组$(2)^a$的解，则称y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对(复数)解，其中$y_0\in R$时，称y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对实数解。

$(2)^a$一对复数解的**性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$且$y_0\neq 0$，则y_0，$-y_0$是$(2)^a$的一对复数解的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right) \mid f_0(y)$且$\left(y^2-y_0^2\right) \mid f_1(y)$。

由$(2)^a$解的性质所决定，本篇$(2)^a$一对复数解，仅为特例，如例 2。

定理 6 设$a\in R$，$y_0\in R$，则$z_0=a+iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的根的充要条件是：y_0是$(2)^a$的实数解。

证明 由定理 1 和第一章定理 6 即得。】

定理 6 表明 设$a\in R$，$y_0\in R$，则$(y-y_0) \mid f(a+iy)$的充要条件是：

$$(y-y_0) \mid f_0(y) \text{ 且 } (y-y_0) \mid f_1(y)$$

例 1 设$a\in R$，$y_0\in R$，若$z_0=a+iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的根，由定理 6 和定理 2 推论，则$Q(a)=0$。

例 2 设$a\in R$，$y_0\in R$且$y_0\neq 0$，由定理 6，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$在

z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭根的充要条件是： y_0， $-y_0$ 是 $(2)^a$ 的一对实数解。

例 2 表明 设 $a\in R$， $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 $\left(y^2-y_0^2\right)\mid f(a+iy)$ 的充要条件是：

$$\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_0(y) \text{ 且 } \left(y^2-y_0^2\right)\mid f_1(y)。$$

推论 1 设 $a\in R$，则 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是： 0 是 $(2)^a$ 的实数解。

证明 在定理 6 中令 $y_0=0$ 即得。】

设 $a\in R$， $z=a+iy$， 简记 $F_0(a,iy)=F_0(iy)$， $F_1(a,iy)=F_1(iy)$， 则 $F_0(iy)=i^n f_0(y)$， $F_1(iy)=i^{n-1}f_1(y)$， $f(z)=f(a+iy)=F_0(iy)+F_1(iy)=i^n f_0(y)+i^{n-1}f_1(y)$。

作点 a 的以 $f_0(y),f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_m(y)\} \tag{3}^a$$

$(3)^a$ 内均为实系数多项式，其中 $f_j(y)=q_j(y)f_{j+1}(y)-f_{j+2}(y)$，即 $f_{j+2}(y)=-rem\left(f_j(y),f_{j+1}(y)\right)$， $j=0,1,2,\cdots,(m-1)$，且 $f_{m+1}(y)\equiv 0$， 最后多项式 $f_m(y)$ 是 $f_j(y),f_{j+1}(y)$ 的最大公因式。

$$\begin{cases} f_0(y)=f_0(a,y)=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}y^n+\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{a^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{b^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots \\ f_1(y)=f_1(a,y)=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}+\dfrac{b^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{a^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}-\dfrac{b^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots \end{cases}$$

记 $a_{00}=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}$， $a_{01}=\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$， $a_{02}=\dfrac{a^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$， $a_{03}=\dfrac{b^{(n-3)}(a)}{(n-3)!},\cdots$

$a_{10}=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$， $a_{11}=\dfrac{b^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$， $a_{12}=\dfrac{a^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}$， $a_{13}=\dfrac{b^{(n-4)}(a)}{(n-4)!},\cdots$

其中 $a_{00}=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}=a_0\neq 0$， 从而将 $(3)^a$ 写成

$$\begin{aligned} &f_0(y)=a_{00}y^n+a_{01}y^{n-1}-a_{02}y^{n-2}-a_{03}y^{n-3}+\cdots \\ &f_1(y)=a_{10}y^{n-1}+a_{11}y^{n-2}-a_{12}y^{n-3}-a_{13}y^{n-4}+\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_m(y)=a_{m0}y^K+a_{m1}y^{K-1}-a_{m2}y^{K-2}-a_{m3}y^{K-3}+\cdots \end{aligned}$$

最后的 K 次多项式 $f_m(y)$ 是 $f_0(y),f_1(y)$ 的最大公因式。

点 a 的 $f_0(y),f_1(y)$ 是两个不全为零的多项式，它们的最大公因式是非零多项式，于是用 $(f_0(y),f_1(y))$ 来表示首项系数是 1 的那个最大公因式。

若 $(f_0(y),f_1(y))=1$， 则称点 a 的 $f_0(y),f_1(y)$ 互素。

设 $a\in R$，$Q(a)=0$，由定理 2 推论则 $(2)^{a}$ 有解，根据预章定理 2 推论 2，则 $(3)^{a}$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\geq 1$，$(f_0(y),f_1(y))\neq 1$。可设 $\begin{cases}f_0(y)=g_0(y)f_m(y)\\ f_1(y)=g_1(y)f_m(y)\end{cases}$（即 $\begin{cases}f_0(a,y)=g_0(a,y)f_m(a,y)\\ f_1(a,y)=g_1(a,y)f_m(a,y)\end{cases}$）。其中 $g_0(y),g_1(y)$ 为实系数多项式，$g_0(y)$ 是非零多项式，但 $g_1(y)$ 却有可能是零多项式，根据预章定理 5，则 $\begin{cases}g_0(y)=0\\ g_1(y)=0\end{cases}$ 无解，$(g_0(y),g_1(y))=1$。于是

$$f(z)=f(a+iy)=i^{n}\left[f_0(a,y)-if_1(a,y)\right]=i^{n}\left[f_0(y)-if_1(y)\right]=i^{n}\left[g_0(y)-ig_1(y)\right]f_m(y)$$

令 $g(z)=g(a+iy)=i^{n-K}\left[g_0(y)-ig_1(y)\right]$，则 $f(a+iy)=g(a+iy)\left[i^{K}f_m(y)\right]$，其中 K 为 $f_m(y)$ 的次数，令 $F_m(iy)=i^{K}f_m(y)$，则 $f(z)=f(a+iy)=g(a+iy)F_m(iy)$，于是

$$f(z)=g(z)F_m(z-a)$$

该式与 a 有关，它是 $f(z)$ 在 z 平面实轴上点 a 的分解式，其中 $g(z)$ 为点 a 的 $g(z)$，$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^{K}f_m(y)$。$F_m(z-a)=F_m(a,z-a)$，$F_m(a,z-a)$ 是关于 a，$(z-a)$ 的复系数二元多项式，于是 $F_m(z-a)$ 是 $(z-a)$ 的复系数 K 次多项式，也是 z 的复系数 K 次多项式，因此 $g(z)$ 是复系数 $n-K$ 次多项式。

由 $\begin{cases}f_0(y)=g_0(y)f_m(y)\\ f_1(y)=g_1(y)f_m(y)\end{cases}$ 可得 $\begin{cases}i^{n}f_0(y)=i^{n-K}g_0(y)\left[i^{K}f_m(y)\right]\\ i^{n-1}f_1(y)=i^{n-K-1}g_1(y)\left[i^{K}f_m(y)\right]\end{cases}$

令 $G_0(iy)=i^{n-K}g_0(y)$，$G_1(iy)=i^{n-K-1}g_1(y)$，又 $F_0(iy)=i^{n}f_0(y)$，$F_1(iy)=i^{n-1}f_1(y)$，$F_m(iy)=i^{K}f_m(y)$，于是 $\begin{cases}F_0(iy)=G_0(iy)F_m(iy)\\ F_1(iy)=G_1(iy)F_m(iy)\end{cases}$，由 $z=a+iy$，则有

$$\begin{cases}F_0(z-a)=G_0(z-a)F_m(z-a)\\ F_1(z-a)=G_1(z-a)F_m(z-a)\end{cases}$$

其中 $F_0(z-a)$ 是 $(z-a)$ 的次数为 n 的多项式，但 $F_1(z-a)$ 却有可能是 $(z-a)$ 的零多项式，即当它关于 $(z-a)$ 的系数全为零时。由于 $(2)^{a}$ 有解，$\begin{cases}F_0(z-a)=F_0(iy)=i^{n}f_0(y)\\ F_1(z-a)=F_1(iy)=i^{n-1}f_1(y)\end{cases}$，于是 $\begin{cases}F_0(z-a)=0\\ F_1(z-a)=0\end{cases}$ 有解，故 $F_0(z-a),\ F_1(z-a)$ 关于 $(z-a)$ 非互素，即 $(F_0(z-a),F_1(z-a))\neq 1$。

$\begin{cases}G_0(z-a)=0\\ G_1(z-a)=0\end{cases}$ 无解。否则，假如 $\begin{cases}G_0(z_0-a)=0\\ G_1(z_0-a)=0\end{cases}$ 有解，则 $\exists\ y_0\in C$，将 $z_0=a+iy_0$ 代入 $\begin{cases}G_0(z-a)=0\\ G_1(z-a)=0\end{cases}$ 后，满足 $\begin{cases}G_0(z_0-a)=0\\ G_1(z_0-a)=0\end{cases}$。从而有

$$\begin{cases}G_0(z_0-a)=G_0(iy_0)=i^{n-K}g_0(y_0)=0\\G_1(z_0-a)=G_1(iy_0)=i^{n-K-1}g_1(y_0)=0\end{cases}$$

于是 y_0 是 $\begin{cases}g_0(y)=0\\g_1(y)=0\end{cases}$ 的解，矛盾。因此，$(G_0(z-a),G_1(z-a))=1$，即 $G_0(z-a),\ G_1(z-a)$ 关于 $(z-a)$ 互素，$F_m(z-a)$ 是 $F_0(z-a),\ F_1(z-a)$ 关于 $(z-a)$ 的一个最大公因式。

综上所述，设 $a\in R$，若 $Q(a)=0$，则 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\geq1$，$f(z)$ 就能在 z 平面实轴上的点 a 分解成两个 z 的复系数多项式 $g(z)$ 与 $F_m(z-a)$ 的乘积，即

$$f(z)=g(z)F_m(z-a)$$

其中 $g(z)$ 为点 a 的 $g(z)$，由 $z=a+iy$，该式又可写成 $f(a+iy)=g(a+iy)[i^K f_m(y)]$。于是说点 a 的 $g(z)$，就意味着 $f(z)=g(z)F_m(z-a)$ 或 $f(a+iy)=g(a+iy)[i^K f_m(y)]$。反之亦然。

点 a 的 $g(z)$ **性质 1** 设 $a\in R$，$y_0\in R$，$z_0=a+iy_0$，$g(z)=g(a+iy)=i^{n-K}[g_0(y)-ig_1(y)]$ 其中 $g_0(y),g_1(y)$ 为实系数多项式，$(g_0(y),g_1(y))=1$，则 $g(z_0)\neq0$，于是 $(z-z_0)$ 不能整除 $g(z)$，即 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(a+iy)$。

证明 在第一章点 x_0 的 $g(z)$ 性质 1 中令 $x_0=a$，简记 $g_0(a,y)=g_0(y)$，$g_1(a,y)=g_1(y)$ 即得。】

它表明 若 $f(z)=g(z)F_m(z-a)$，则 $g(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=a$ 上没有根。

下面继续定理 6 的推论

推论 2 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 $(y-y_0)^l\mid f(a+iy)$ 的充要条件是：

$$(y-y_0)^l\mid f_0(y)\text{且}(y-y_0)^l\mid f_1(y)。$$

证明 第一章定理 6 推论 3 中令 $x_0=a$，简记 $f_0(a,y)=f_0(y)$，$f_1(a,y)=f_1(y)$ 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根的充要条件是：y_0 是 $(2)^a$ 的 l 重实数解。

证明 根据推论 2 即得。】

推论 4 设 $a\in R$，l 为非负整数，则 $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重实根的充要条件是：0 是 $(2)^a$ 的 l 重实数解。

证明 在推论 3 中令 $y_0=0$ 即得。】

$f(z)=0$ 一对对偶复根的**性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是

$f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f(a+iy)$。

证明 该性质即为第一章 $f(z)=0$ 一对对偶复根的性质推论 3。】

推论 设 $a\in R$，$y_0\in R$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面直线 $x=a$ 上)的一对对偶(复)根的充要条件是：$(y-y_0)^2 \mid f(a+iy)$。

证明 在性质中令 $y_0\in R$ 即得。】

定义 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0，$\overline{y_0}$ 都是方程组 $(2)^a$ 的解，特别 $y_0\in R$ 时，y_0 是 $(2)^a$ 的 2 重以上解，即 $(y-y_0)^2 \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)^2 \mid f_1(y)$，则称 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭(复数)解。

$(2)^a$ 一对共轭复数解的**性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f_0(y)$ 且 $(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f_1(y)$。

证明 在第一章 $(2)^a$ 一对共轭复数解的性质中将 $f_0(a,y), f_1(a,y)$ 简记为 $f_0(y), f_1(y)$ 即得。】

引理 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 (a,y_0)，$(a,\overline{y_0})$ 是方程组(2)的一对对偶复数解的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解。

证明 由第一章定理 8 引理即得。】

定理 7 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解。

证明 由引理和第一章定理 7 推论 2 即得。】

定理 7 表明 设 $a\in R$，$y_0\in C$，则 $(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f(a+iy)$ 的充要条件是：

$$(y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f_0(y) \text{ 且 } (y-y_0)(y-\overline{y_0}) \mid f_1(y)。$$

例 3 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，由定理 7 和定理 2 推论，则 $Q(a)=0$。

推论 1 设 $a\in R$，$y_0\in R$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对对偶根的充要条件是：y_0，y_0 是 $(2)^a$ 的一对共轭实数解。

证明 在定理 7 中令 $y_0\in R$ 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $z_1=a$，$z_2=a$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶实根的充要条件是：0，0 是 $(2)^a$ 的一对共轭实数解。

证明 在推论 1 中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 3 设 $a\in R$， $y_0\notin R$，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的一对对偶根的充要条件是： y_0， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭复数解。

证明 在定理 7 中令 $y_0\notin R$ 即得。】

推论 4 设 $a\in R$， y_0为纯虚数，则 $z_1=a+iy_0$， $z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面实轴上)的一对对偶实根的充要条件是： y_0， $\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对共轭纯虚数解。

证明 在推论 3 中令 y_0为纯虚数即得。】

点 a 的 $g(z)$ **性质 2** 设 $a\in R$，$g(z)=g(a+iy)=i^{n-K}\left[g_0(y)-ig_1(y)\right]$，其中 $g_0(y),g_1(y)$为实系数多项式，$(g_0(y),g_1(y))=1$，于是 1) $g(z)=0$ 没有以 a， a 为一双对影中点的成对对偶根；2) 设 $y_0\notin R$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$，则 $(z-z_1)$和 $(z-z_2)$不能同时整除 $g(z)$，即 $(y-y_0)$和 $\left(y-\overline{y_0}\right)$不能同时整除 $g(a+iy)$。

证明 在第一章点 a 的 $g(z)$ 性质 2 中简记 $g_0(a,y)=g_0(y)$， $g_1(a,y)=g_1(y)$ 即得。】

§2 最大公因式方程(一)

设施图姆序列$(3)^a$内$f_m(y)$的次数为K，且记

$$f_m(y)=0 \qquad (4)^a$$

则称它为$(3)^a$最后的K次方程$(4)^a$。显然，y_0是$(4)^a$的根的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_m(y)$。y_0是$(4)^a$的l重根的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid f_m(y)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能整除$f_m(y)$。

$(4)^a$所有复根(含重根)组成的集合可写成$\left\{\, y\mid f_m(y)=0\ (y\in C)\ (4)^a\right\}$，或记作$\sqrt{f_m(\ )}$，于是$\left\{\, y\mid f_m(y)=0\ (y\in C)\ (4)^a\right\}=\sqrt{f_m(\ )}$。$y_0$是$(4)^a$的$l$重根的充要条件是：$y_0(l)\in\sqrt{f_m(\ )}$。

$f_m(y)$是$f_0(y),f_1(y)$的最大公因式，下面定理1及推论根据预章定理2及推论即得。

定理 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则

1) y_0是$(2)^a$的解的充要条件是：y_0是$(4)^a$的根。

2) y_0是$(2)^a$的l重解的充要条件是：y_0是$(4)^a$的l重根。

推论 1 设$a\in R$，则$(2)^a$所有复数解(含重解)组成的集合与$(4)^a$所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即$\sqrt{f_0(\ )}\cap\sqrt{f_1(\ )}=\sqrt{f_m(\ )}$，于是$(4)^a$的所有复根就是$(2)^a$的所有复数解。

推论 2 设$a\in R$，$(2)^a$复数解(含重解)的个数为K_a，$(4)^a$的次数为K，则$K_a=K$，故$(2)^a$有解的充要条件是：$K\geq 1$。

推论 3 设$a\in R$，则$(2)^a$无解的充要条件是：$(f_0(y),f_1(y))=1$。

推论 4 设$a\in R$，在$(3)^a$内 1) 当$f_1(y)\neq 0$时，设$y_0\in C$，l,l_0,l_1均为非负整数，则$y_0(l)\in\sqrt{f_m(\ )}\Leftrightarrow y_0(l_0)\in\sqrt{f_0(\ )}$，$y_0(l_1)\in\sqrt{f_1(\ )}$，其中$l=\min(l_0,l_1)$。

2) 当$f_1(y)\equiv 0$时，则$f_m(y)=f_0(y)$，$m=0$。

定理 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(4)^a$的根，则a是$Q(x)=0$的根；反过来，若a是$Q(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0，使y_0是$(4)^a$的根。

证明 由定理1和§1定理2即得。】

推论 1 设$a\in R$，则$(4)^a$次数(即$(3)^a$内$f_m(y)$的次数)$K\geq 1$的充要条件是：$Q(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

定义 设 $f(z)$的次数$n\geq 1$，$a\in R$，$(3)^a$ 内 $f_m(y)$的次数为K，于是 1) 当$K=0$时，$(f_0(y), f_1(y))=1$，点a的 $f_0(y), f_1(y)$互素，则称a是 $f(z)=0$的一个互素点；2) 当$1\leq K\leq n$时，$(f_0(y), f_1(y))\neq 1$，点a的 $f_0(y), f_1(y)$非互素，则称a是 $f(z)=0$的一个非互素点。

由该定义，推论可写成推论 2 和 3。

推论 2 设$a\in R$，则a是 $f(z)=0$的非互素点的充要条件是：$Q(a)=0$。

推论 3 设$a\in R$，则a是 $f(z)=0$的互素点的充要条件是：$Q(a)\neq 0$。

在z平面实轴上任意取一点a，若a是$Q(x)=0$的根，则a是 $f(z)=0$的非互素点，否则a就是 $f(z)=0$的互素点。

例 1 设$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0, A_1,\cdots, A_{n^2-1}, A_{n^2})}$，则$\alpha,\beta$均为有限实数，且

$$\alpha<x_0<\beta,\quad Q(\alpha)\neq 0,\quad Q(\beta)\neq 0,\quad Q(x_0)=0,\quad V_\alpha^Q-V_\beta^Q=1。$$

由推论 2 和 3，则x_0是 $f(z)=0$的非互素点，α和β都是 $f(z)=0$的互素点。

定理 3 设$a\in R$，L为正整数，若$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，$(4)^a$ 的次数为K，则$K\leq L$，其中$(f(z), f'(z))=1$时，$K=L$。

证明 $(4)^a$ 的次数为K，由定理 1 推论 2，则$(2)^a$ 复数解(含重解)的个数也为K，再由§1 定理 3 即得。】

推论 设$a\in R$，L为正整数，$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，$(4)^a$ 的次数为K，若$K<L$，则 $f(z)=0$有重根。

证明 用反证法。假设 $f(z)=0$没有重根，则$(f(z), f'(z))=1$。由定理 3，则$K=L$，矛盾。所以 $f(z)=0$有重根。】

$(4)^a$ 根的**性质** $(4)^a$ 是实系数代数方程，根据第一篇第二章§2 性质及其推论，它的根具有以下性质及其推论。

性质 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0是$(4)^a$ 的根，则$\overline{y_0}$也是$(4)^a$ 的根。

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0是$(4)^a$ 的根的充要条件是：$\overline{y_0}$是$(4)^a$ 的根。

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y-y_0)\mid f_m(y)$的充要条件是：$(y-\overline{y_0})\mid f_m(y)$。

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，则$(y-y_0)^l\mid f_m(y)$的充要条件是：$(y-\overline{y_0})^l\mid f_m(y)$。

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 y_0 是 $(4)^a$ 的 l 重根充要条件是：$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的 l 重根。

推论 5 设 $a\in R$，$y_0\notin R$，l 为非负整数，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是：$(y-y_0)^l\left(y-\overline{y_0}\right)^l \mid f_m(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}\left(y-\overline{y_0}\right)^{l+1}$ 不能整除 $f_m(y)$。

例 2 设 $a\in R$，$y_0\notin R$，l 为非负整数，由定理 1，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(2)^a$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l 重共轭复根。

定理 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(4)^a$ 的根，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由定理 1 和§1 定理 5 即得。】

推论 设 $a\in R$，$y_0\in C$，若 y_0 是 $(4)^a$ 的根，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 都是 $f(z)=0$ 的根。

证明 由 $(4)^a$ 根的性质和定理 4 即得。】

定义 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，若 y_0，$-y_0$ 都是方程 $(4)^a$ 的根，则称 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对(复)根，其中 $y_0\in R$ 时，称 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对实根。

$(4)^a$ 一对复根的**性质** 设 $a\in R$，$y_0\in C$ 且 $y_0\neq 0$，则 y_0，$-y_0$ 是 $(4)^a$ 的一对复根的充要条件是：$\left(y^2-y_0^2\right)\mid f_m(y)$。

由 $(4)^a$ 根的性质所决定，本篇 $(4)^a$ 一对复根，仅为特例，如例 3。

定理 5 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 1) $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的充要条件是：y_0 是 $(4)^a$ 的实根；2) $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根的充要条件是：y_0 是 $(4)^a$ 的 l 重实根。

证明 由定理 1 和§1 定理 6 及其推论 3 即得。】

定理 5 表明 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 1) $(y-y_0)\mid f(a+iy)$ 的充要条件是：$(y-y_0)\mid f_m(y)$；2) $(y-y_0)^l\mid f(a+iy)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $f(a+iy)$ 的充要条件是：$(y-y_0)^l\mid f_m(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $f_m(y)$。

推论 设 $a\in R$，l 为非负整数，则

1) $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：0 是 $(4)^a$ 的根；

2) $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：0 是 $(4)^a$ 的 l 重根。

证明 在定理 5 中令 $y_0=0$ 即得。】

例 3 设$a\in R$，$y_0\in R$且$y_0\neq 0$，由定理 5，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对共轭根的充要条件是：y_0，$-y_0$是$(4)^a$的一对实根。即

$$\left(y^2-y_0^2\right)|\ f(a+iy)\Leftrightarrow\left(y^2-y_0^2\right)|\ f_m(y)。$$

定义 设$a\in R$，$y_0\in C$，若y_0和$\overline{y_0}$都是方程$(4)^a$的根，特别当$y_0\in R$时，y_0是$(4)^a$的 2 重以上根，即$(y-y_0)^2\ |\ f_m(y)$，则称y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭(复)根。

$(4)^a$一对共轭复根的**性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭复根的充要条件是：$(y-y_0)\left(y-\overline{y_0}\right)|\ f_m(y)$。

证明 在第一章$d(a,y)=0$一对共轭复根的性质中简记$d(a,y)=f_m(a,y)=f_m(y)$，并将$d(a,y)=0$改为$(4)^a$即得。】

引理 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0，$\overline{y_0}$是$(2)^a$的一对共轭复数解的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭复根。

证明 $f_m(y)$是$f_0(y),f_1(y)$的最大公因式，故$(y-y_0)\left(y-\overline{y_0}\right)|\ f_0(y)$且$(y-y_0)\left(y-\overline{y_0}\right)|\ f_1(y)$的充要条件是：$(y-y_0)\left(y-\overline{y_0}\right)|\ f_m(y)$。于是命题成立。】

定理 6 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭复根。

证明 由引理和§1 定理 7 即得。】

定理 6 表明 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y-y_0)\left(y-\overline{y_0}\right)|\ f(a+iy)$的充要条件是：

$$(y-y_0)\left(y-\overline{y_0}\right)|\ f_m(y)。$$

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对对偶根的充要条件是：y_0，y_0是$(4)^a$的一对共轭实根。

证明 在定理 6 中令$y_0\in R$即得。】

推论 2 设$a\in R$，则$z_1=a$，$z_2=a$是$f(z)=0$的一对对偶实根的充分必要条件是：0，0是$(4)^a$的一对共轭实根。

证明 在推论 1 中令$y_0=0$即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_0\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$在z平面上但不在直线$x=a$上的一对对偶根的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭复根。

证明 在定理 6 中令 $y_0 \notin R$ 即得。】

推论 4 设 $a \in R$，y_0 为纯虚数，则 $z_1 = a + iy_0$，$z_2 = a + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ (在 z 平面实轴上)的一对对偶实根的充要条件是：y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对共轭纯虚数根。

证明 在推论 3 中令 y_0 为纯虚数即得。】

定理 7 设 $a \in R$，若 a 是 $f(z)=0$ 的互素点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有根。

证明 若 a 是 $f(z)=0$ 的互素点，由定理 2 推论 3，则 $Q(a)\neq 0$。用反证法。假如 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上有根 $z_0 = a + iy_0$ (其中 $y_0 \in R$)，由定理 5，则 y_0 是 $(4)^a$ 的实根，根据定理 2，则 $Q(a)=0$，矛盾。所以 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上没有根。】

定理 8 设 $a \in R$，K 为正整数，$f(a+iy) = g(a+iy)[i^K f_m(y)]$，$y_0 \notin R$，$l_1, l_2$ 为非负整数，若 $z_1 = a + iy_0$ 和 $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，$(y-y_0) \mid g(a+iy)$，但 $\left(y-\overline{y_0}\right)$ 不能整除 $g(a+iy)$；2) $l_1 < l_2$ 时，$\left(y-\overline{y_0}\right) \mid g(a+iy)$，但 $(y-y_0)$ 不能整除 $g(a+iy)$；3) $l_1 = l_2$ 时，$(y-y_0)$ 和 $\left(y-\overline{y_0}\right)$ 都不能整除 $g(a+iy)$。

证明 在第一章定理 13 推论中将 $d(a,y)$ 记为 $f_m(y)$ 即得。】

下面定理 9 及推论，由 $a \in R$，$Q(a)=0$，根据§1 定理 2 推论，则 $(2)^a$ 有解，于是分别在第一章定理 14 推论 2 和 3 中将 $d(a,y)=0$ 改为 $(4)^a$ 即得。

定理 9 设 $a \in R$，$Q(a)=0$，$y_0 \notin R$，l_1, l_2 为非负整数，$z_1 = a + iy_0$ 和 $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l_2 重共轭复根，$z_1 = a + iy_0$ 是 $g(z)=0$ 的 $l_1 - l_2$ 重根；2) $l_1 < l_2$ 时，y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l_1 重共轭复根，$z_2 = a + i\overline{y_0}$ 是 $g(z)=0$ 的 $l_2 - l_1$ 重根；3) $l_1 = l_2$ 时，记 $l_1 = l_2 = l$，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l 重共轭复根，$z_1 = a + iy_0$ 和 $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

推论 设 $a \in R$，$Q(a)=0$，$y_0 \notin R$，l_1, l_2, l 为非负整数，$z_1 = a + iy_0$ 和 $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l 重共轭复根的充要条件是：$l = \min(l_1, l_2)$。

§3 最大公因式方程(二)

$F_m(z-a)$是$F_0(z-a)$, $F_1(z-a)$关于$(z-a)$的最大公因式。$F_m(z-a)=F_m(a,z-a)$，$F_m(a,z-a)$是关于a，$(z-a)$的复系数二元多项式，于是$F_m(z-a)$是$(z-a)$的复系数多项式，也是z的复系数多项式。

设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_0=a+iy_0$，若$F_m(z-a)$在$z=z_0$时函数值$F_m(z_0-a)=F_m(iy_0)=i^K f_m(y_0)=0$，则$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$(在$z$平面上)的一个(复)根。显然，$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根的充要条件是：$(z-z_0)|F_m(z-a)$。

再设l为非负整数，若$(z-z_0)^l|F_m(z-a)$，但$(z-z_0)^{l+1}$不能整除$F_m(z-a)$，则$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$ (在z平面上)的l重(复)根。

$F_m(z-a)=F_m(iy)$的**整除性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z=a+iy$，$z_0=a+iy_0$，则$(z-z_0)^l|F_m(z-a)$的充分必要条件是：$(y-y_0)^l|F_m(iy)$。

显然，$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根的充要条件是：$(y-y_0)|F_m(iy)$；$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的l重根的充要条件是：$(y-y_0)^l|F_m(iy)$，但$(y-y_0)^{l+1}$不能整除$F_m(iy)$。

$F_m(z-a)=0$根的**性质**

性质 设$a\in R$，$y_0\in C$，若$z_1=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根，则$z_2=a+i\overline{y_0}$也是$F_m(z-a)=0$的根。

证明 若$z_1=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根，则$F_m(z_1-a)=0$。于是

$$i^K f_m(y_0)=F_m(iy_0)=F_m(z_1-a)=0$$

y_0是$(4)^a$的根，由$(4)^a$根的性质，则$\overline{y_0}$是$(4)^a$的根，即$f_m(\overline{y_0})=0$。$z_2=a+i\overline{y_0}$，于是$F_m(z_2-a)=F_m(i\overline{y_0})=i^K f_m(\overline{y_0})=0$，故$z_2=a+i\overline{y_0}$也是$F_m(z-a)=0$的根。】

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根的充要条件是：$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$的根。

推论 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$，则

$$(z-z_1)|F_m(z-a)\text{的充要条件是：}(z-z_2)|F_m(z-a)\text{。}$$

推论 3 设$a\in R$，$y_0\in C$，l为非负整数，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$，则

$$(z-z_1)^l|F_m(z-a)\text{的充要条件是：}(z-z_2)^l|F_m(z-a)\text{。}$$

证明 在第一章 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 根的性质推论 3 中，简记 $F_d(a, z-a)=F_m(a, z-a)=F_m(z-a)$ 即得。】

推论 4 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。

推论 5 设 $a\in R$，$y_0\notin R$，l 为非负整数，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重对偶根的充要条件是：$(y-y_0)^l(y-\overline{y_0})^l \mid F_m(iy)$，但 $(y-y_0)^{l+1}(y-\overline{y_0})^{l+1}$ 不能整除 $F_m(iy)$。

证明 在第一章 $F_d(x_0, z-x_0)=0$ 根的性质推论 5 中简记 $F_d(a, iy)=F_m(a, iy)=F_m(iy)$，并将 $F_d(a, z-a)=0$ 改为 $F_m(z-a)=0$ 即得。】

定理 1 设 $a\in R$，$y_0\in C$，l 为非负整数，则

1) y_0 是 $(4)^a$ 的根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的根。

2) y_0 是 $(4)^a$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的 l 重根。

证明 1 由题设和 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，则

1) $(y-y_0)\mid f_m(y)$ 的充要条件是：$(y-y_0)\mid F_m(iy)$。故命题成立。

2) $(y-y_0)^l \mid f_m(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $f_m(y)$ 的充要条件是 $(y-y_0)^l \mid F_m(y)$，但 $(y-y_0)^{l+1}$ 不能整除 $F_m(iy)$。故命题成立。】

证明 2 在第一章定理 11 中令 $x_0=a\in R$，将 $d(a, y)=0$ 改为 $(4)^a$，将 $F_d(a, z-a)=0$ 改为 $F_m(z-a)=0$ 即得。】

下面推论 1 至 4 的证明方法与第一篇第三章§3 定理 1 推论 1 至 4 相同省略。

推论 1 设 $a\in R$，$y_j\in C$，$1\le K\le n$，则 y_j $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $(4)^a$ 的所有复根(含重根)充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)。

推论 2 设 $a\in R$，$y_j\in C$，则 y_j $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根的充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根。

推论 3 设 $a\in R$，$y_0\in R$，l 为非负整数，则 1) y_0 是 $(4)^a$ 的实根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根；2) y_0 是 $(4)^a$ 的 l 重实根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根。

推论 4 设$a\in R$，$y_j\in R$，则y_j $(j=1,2,\cdots,K')$是$(4)^a$的所有实根(含重根)的充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的所有根(含重根)。

推论 5 设$a\in R$，$y_j\in R$且$y_j\neq 0$，则$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$F_m(z-a)=0$在$z$平面直线$x=a$上的所有非$a$根(含重根)的充要条件是：$y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$(4)^a$的所有非0实根(含重根)。

证明 若$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$F_m(z-a)=0$在直线$x$=$a$上的所有非$a$根，不妨设$z=a$是$F_m(z-a)=0$的$l$重根，则$\overbrace{z=a,z=a,\cdots,z=a}^{l}$，$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$F_m(z-a)=0$在直线$x=a$上的所有根，由推论 4，则$\overbrace{0,0,\cdots,0}^{l}$，$y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$(4)^a$的所有实根，其中$y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$(4)^a$的所有非0实根。

反过来，若y_j $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$(4)^a$的所有非0实根，不妨设0是$(4)^a$的$l$重根，则$\overbrace{0,0,\cdots,0}^{l}$，$y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$(4)^a$的所有实根，由推论 4 则$\overbrace{z=a,z=a,\cdots,z=a}^{l}$，$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$F_m(z-a)=0$在直线$x=a$上的所有根，其中$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是$F_m(z-a)=0$在直线$x=a$上的所有非$a$根。】

推论 6 设$a\in R$，$y_j\in C$且$y_j\neq 0$，则$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$是$F_m(z-a)=0$在z平面上的所有非a根(含重根)的充要条件是：y_j $(j=1,2,\cdots,k)$是$(4)^a$的所有非0复根(含重根)。

证明 必要性不妨设$z=a$是$F_m(z-a)=0$的l重根，充分性不妨设0是$(4)^a$的l重根，根据推论 1 即得。】

定理 2 设$a\in R$，$y_0\in C$，若$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根，则a是$Q(x)=0$的根；反过来，若a是$Q(x)=0$的根，则至少存在一个复数y_0，使$z_0=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的根。

证明 由定理 1 和§2 定理 2 即得。】

推论 设$a\in R$，则$F_m(z-a)=0$关于z的次数$K\geq 1$的充要条件是：$Q(a)=0$。

证明 由定理 2 即得。】

定理 3 设 $f(z)$的次数$n\geq 1$，$a\in R$，若$Q(a)=0$，则a是$f(z)=0$的非互素点，$(3)^{a}$内$f_{m}(y)$的次数K满足$1\leq K\leq n$，$f(z)$就能在z平面实轴上的点a分解成两个z的复系数多项式$g(z)$与$F_{m}(z-a)$的乘积，即$f(z)=g(z)F_{m}(z-a)$，其中$F_{m}(z-a)=F_{m}(iy)=i^{K}f_{m}(y)$，$F_{m}(z-a)$关于$z$的次数为$K$，$g(z)$的次数为$n-K$。

证明 由§2 定理 2 推论 2 和§1 相关论述即知命题成立。】

定理 4 设$a\in R$，$y_{0}\notin R$，l为非负整数，则y_{0}，$\overline{y_{0}}$是$(4)^{a}$的一对l重共轭复根的充要条件是：$z_{1}=a+iy_{0}$，$z_{2}=a+i\overline{y_{0}}$是$F_{m}(z-a)=0$的一对$l$重对偶复根。

证明 1 根据定理 1 即得。】

证明 2 在第一章定理 12 中将$d(a,y)=0$改为$(4)^{a}$，将$F_{d}(a,z-a)=0$改为$F_{m}(z-a)=0$即得。】

推论 设$a\in R$，y_{0}为纯虚数，l为非负整数，则y_{0}，$\overline{y_{0}}$是$(4)^{a}$的一对l重共轭纯虚数根的充要条件是：$z_{1}=a+iy_{0}$，$z_{2}=a+i\overline{y_{0}}$是$F_{m}(z-a)=0$在$z$平面实轴上的一对$l$重对偶实根。

证明 在定理 4 中令y_{0}为纯虚数即得。】

定理 5 设$a\in R$，$y_{0}\in C$，若$z_{0}=a+iy_{0}$是$F_{m}(z-a)=0$的根，则$z_{0}=a+iy_{0}$是$f(z)=0$的根。

证明 由定理 1 和§2 定理 4 即得。】

推论 设$a\in R$，$y_{0}\in C$，若$z_{1}=a+iy_{0}$是$F_{m}(z-a)=0$的根，则$z_{1}=a+iy_{0}$，$z_{2}=a+i\overline{y_{0}}$都是$f(z)=0$的根。

证明 由$F_{m}(z-a)=0$根的性质和定理 5 即得。】

定义 设$a\in R$，$y_{0}\in C$且$y_{0}\neq 0$，若$z_{1}=a+iy_{0}$，$z_{2}=a-iy_{0}$都是$F_{m}(z-a)=0$的根，则称$z_{1}=a+iy_{0}$，$z_{2}=a-iy_{0}$是$F_{m}(z-a)=0$(在z平面上)的一对(复)根。

$F_{m}(z-a)=0$一对复根的**性质** 设$a\in R$，$y_{0}\in C$且$y_{0}\neq 0$，则$z_{1}=a+iy_{0}$，$z_{2}=a-iy_{0}$是$F_{m}(z-a)=0$的一对复根的充要条件是：$\left(y^{2}-y_{0}^{2}\right)\mid F_{m}(iy)$。

由$F_{m}(z-a)=0$根的性质所决定，本篇$F_{m}(z-a)=0$一对复根，仅为特例，如例 1。

定理 6 设$a\in R$，$y_{0}\in R$，l为非负整数，则 1) $z_{0}=a+iy_{0}$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的根的充要条件是：$z_{0}=a+iy_{0}$是$F_{m}(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的根；2)

$z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根的充要条件是：$z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l 重根。

证明 由定理 1 推论 3 和§2 定理 5 即得。】

推论 1 设 $a\in R$，l 为非负整数，则

1) $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$z_0=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根；

2) $z_0=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_0=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。

证明 在定理 6 中令 $y_0=0$ 即得。】

设 A 是 $f(z)=0$ 或 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的根集，它是允许有重元的有限集合，若 $z_0=a+iy_0$ 是 A 的元素，记作 $z_0=a+iy_0\in A$；若 $z_0=a+iy_0$ 是 A 的 l 重元素，记作 $a+iy_0=z_0(l)\in A$；若 $z_0=a+iy_0$ 是 A 的 l 重以上(含 l 重)元素，记作 $a+iy_0=z_0(\geq l)\in A$。

推论 2 设 $a\in R$，将由 $f(z)=0$ 和由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)组成的集合分别记为 A 和 B，则 $A=B$，于是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)就是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)。

证明 由题设，则 A 和 B 是两个允许有重元的有限集合，不妨设 $y_0\in R$，于是 $\forall$ $z_0=a+iy_0\in A$，$a+iy_0=z_0(l)\in A$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，且是 l 重根，由定理 6，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根，故 $a+iy_0=z_0(l)\in B$。

反过来，$\forall$ $z_0=a+iy_0\in B$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，根据定理 6，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，$z_0=a+iy_0\in A$。

根据预章定理 1，则 $A=B$，于是命题成立。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，$k^{(1)}$ 为正整数，则 $z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有非 a 根(含重根)的充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有非 a 根(含重根)。

证明 必要性不妨设 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根，充分性不妨设 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，根据推论 2 即得。】

例 1 设 $a\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，由定理 6，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a-iy_0$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的一对共轭复根。即 $\left(y^2-y_0^2\right)| f(a+iy)\Leftrightarrow\left(y^2-y_0^2\right)| F_m(iy)$。

定义 设$a\in R$，$y_0\in C$，若$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$都是$F_m(z-a)=0$的根，特别当$y_0\in R$时，$a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$的2重以上根，则称$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$(在z平面上)的一对对偶(复)根。

$F_m(z-a)=0$一对对偶复根的**性质** 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$的一对对偶复根的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0})| F_m(iy)$

证明 在第一章$F_d(a,z-a)=0$一对对偶复根的性质中简记$F_d(a,iy)=F_m(a,iy)=F_m(iy)$，并将$F_d(a,z-a)=0$改为$F_m(z-a)=0$即得。】

定理7 设$a\in R$，$y_0\in C$，则y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$的一对对偶复根。

证明 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，则$(y-y_0)(y-\overline{y_0})| f_m(y)$的充要条件是：$(y-y_0)(y-\overline{y_0})| F_m(iy)$。于是命题成立。】

推论1 设$a\in R$，$y_0\in R$，则y_0，y_0是$(4)^a$的一对共轭实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的一对对偶根。

证明 在定理7中令$y_0\in R$即得。】

推论2 设$a\in R$，则0，0是$(4)^a$的一对共轭实根的充要条件是：$z_1=a$，$z_2=a$是$F_m(z-a)=0$的一对对偶实根。

证明 在推论1中令$y_0=0$即得。】

推论3 设$a\in R$，$y_0\notin R$，则y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$在z平面上但不在直线$x=a$上的一对对偶根。

证明 在定理7中令$y_0\notin R$即得。】

推论4 设$a\in R$，y_0为纯虚数，则y_0，$\overline{y_0}$是$(4)^a$的一对共轭纯虚数根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$在z平面实轴上的一对对偶实根。

证明 在推论3中令y_0为纯虚数即得。】

定理8 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$的一对对偶复根。

证明 由定理7和§2定理6即得。】

定理8表明 设$a\in R$，$y_0\in C$，则$(y-y_0)(y-\overline{y_0})| f(a+iy)$的充要条件是：

$$\left(y-y_0\right)\left(y-\overline{y_0}\right)|\,F_m(iy)。$$

推论 1 设$a\in R$，$y_0\in R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的一对对偶根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+iy_0$是$F_m(z-a)=0$在z平面直线$x=a$上的一对对偶根。

证明 在定理 8 中令$y_0\in R$即得。】

推论 2 设$a\in R$，则$z_1=a$，$z_2=a$是$f(z)$=0的一对对偶实根的充分必要条件是：$z_1=a$，$z_2=a$是$F_m(z-a)=0$的一对对偶实根。

证明 在推论 1 中令$y_0=0$即得。】

推论 3 设$a\in R$，$y_0\notin R$，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$在z平面上但不在直线$x=a$上的一对对偶根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$在z平面上但不在直线$x=a$上的一对对偶根。

证明 在定理 8 中令$y_0\notin R$即得。】

推论 4 设$a\in R$，y_0为纯虚数，则$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$在z平面实轴上的一对对偶实根的充要条件是：$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$在z平面实轴上的一对对偶实根。

证明 在推论 3 中令y_0为纯虚数即得。】

定理 9 设$a\in R$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，$y_0\notin R$，l_1,l_2均为非负整数，若$z_1=a+iy_0$和$z_2=a+i\overline{y_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则 1) $l_1>l_2$时，$(z-z_1)|\,g(z)$，但$(z-z_2)$不能整除$g(z)$；2) $l_1<l_2$时，$(z-z_2)|\,g(z)$，但$(z-z_1)$不能整除$g(z)$；3) $l_1=l_2$时，$(z-z_1)$和$(z-z_2)$都不能整除$g(z)$。

证明 在第一章定理 13 中将$F_d(a,z-a)$记为$F_m(z-a)$即得。】

下面定理 10 及推论，由$a\in R$，$Q(a)=0$，根据§1 定理 2 推论则$(2)^a$有解，于是分别在第一章定理 14 及推论 1 中将$F_d(a,z-a)=0$改为$F_m(z-a)=0$即得。

定理 10 设$a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\notin R$，l_1,l_2均为非负整数，若$z_1=a+iy_0$和$z_2=a+i\overline{y_0}$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则 1) $l_1>l_2$时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$的一对l_2重对偶复根，$z_1=a+iy_0$是$g(z)=0$的l_1-l_2重根；2) $l_1<l_2$时，$z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$F_m(z-a)=0$的一对l_1重对偶复根，$z_2=a+i\overline{y_0}$是$g(z)=0$的l_2-l_1重根；

3) $l_1=l_2$ 时，记 $l_1=l_2=l$，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根，$z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 都不是 $g(z)=0$ 的根。

推论 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_0\notin R$，l_1,l_2,l 均为非负整数，若 $z_1=a+iy_0$ 和 $z_2=a+i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。

定理 11 设 $a\in R$，$y_j\in R$，$1\le K'\le n$，则 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)的充要条件是：y_j $(j=1,2,\cdots,K')$ 是方程 $(4)^a$ 的所有实根(含重根)。

证明 由定理 6 推论 2 和定理 1 推论 4 即得。】

若 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上有 K' 个根，由定理 11，则 $(4)^a$ 有 K' 个实根，这 K' 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 K' 个根的虚部。

定理 12 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上所有非 a 根(含重根)的充要条件是：y_j $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有非 0 实根(含重根)。

证明 由定理 6 推论 3 和定理 1 推论 5 即得。】

设 $(4)^a$ 实根(含重根)和非 0 实根(含重根)的个数分别为 K' 和 $k^{(1)}$，0 是 $(4)^a$ 的 l 重根，由定理 11 和 12，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根(含重根)和非 a 根(含重根)的个数分别为 K' 和 $k^{(1)}$，$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，且 $K'=l+k^{(1)}$。

§4 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集

定义 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，$1\le K\le n$，$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 K 个根，记 $B_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$。

假设对 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，当 $y_{j_1}\notin R$ 时，均能找到 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 B_a 的 l 重元素，那么就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称要求的一对 l 重元素；当 $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素，就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称要求的一个 l_1 重元素。

满足上述条件就称 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的一个根集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的 K 个根。

例 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，假如 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的任意一个元素，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，就能推导出 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，即由

$$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a,\quad a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a^{\#}$$

则 B_a 是 $B_a^{\#}$ 的子集，即 $B_a\subset B_a^{\#}$。当且仅当 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a^{\#}\subset B_a$ 时，$B_a=B_a^{\#}$。当且仅当 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\ne B_a^{\#}$ 时，B_a 是 $B_a^{\#}$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质**设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，l 为非负整数，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，于是 1)若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，$l=0$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$；2)若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，$l\ge 1$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$；3)若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，则 $l\ge 1$；4)若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$B_a\subset B_a^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$。

在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集合 B_a 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\notin R$，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 的充要条件是：$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$。

证明必要性显然成立，证充分性。若 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，即 $z_{j_2}=a+iy_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，$y_{j_1}\notin R$，于是 $y_{j_2}=\overline{y_{j_1}}\notin R$，由定义 1，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}=a+i\overline{y_{j_2}}\in B_a$。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_j\notin R$，l 为非负整数，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 也是 B_a 的 l 重元素，并且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 B_a 的一对 l 重元素。

证明 $l\geq 1$ 时，由定义 1，命题成立；$l=0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 0 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$，由性质 1 则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a$，于是 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 也是 B_a 的 0 重元素，命题也成立。】

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素。

证明证必要性。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，由题设 1) $y_{j_1}\in R$ 时，由定义 1，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l 重根，再由定义 1 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，命题成立。2) $y_{j_1}\notin R$ 时，由性质 2，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 也是 B_a 的 l 重元素。假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由定义 1 则 $l=\min(l_1,l_2)$。不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l_0 重元素，由性质 2，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 也是 $B_a^{\#}$ 的 l_0 重元素，再由定义 1，则 $l_0=\min(l_1,l_2)=l$，故 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，命题也成立。充分性同理可证。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $B_a\subset B_a^{\#}$，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 也是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，即由 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a^{\#}$。

证明由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $B_a\subset B_a^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，若 $B_a^{\#}$ 的任何一个元素都属于 B_a，即由 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，则 $B_a^{\#}\subset B_a$。

证明由 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，由性质 3，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l 重元素，即由 $\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a^{\#}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，故 $B_a^{\#}\subset B_a$。】

推论 3 设 $a\in R$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，若 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，则 $B_a^{\#}$ 至少有一个元素不属于 B_a。

证明由题设则 $B_a^{\#}\not\subset B_a$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个根集，若 $B_a^{\#}$ 至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#} \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a,\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0;$$

若 $y_{j_1}\notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a^{\#} \text{ 且 } z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a,\quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0\text{。}$$

证明由性质 1 即得。】

定义 2 设 $a\in R$，$1\le K\le n$，$B_a=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，并且不存在 $B_a^{\#}$，使 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，则称 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j$ ($j=1,2,\cdots,K$)是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根。

性质 5 设 $a\in R$，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集的充要条件是：B_a 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严

格对称的根全集，于是 1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$ 且 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \in B_a$；2) $y_{j_1} \in R$ 时，若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 是 $f(z) = 0$ 在直线 $x = a$ 上的一个根，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$。

证明 用反证法。1) $y_{j_1} \notin R$ 时，假设 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$ 且 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \in B_a$ 不成立，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$ 或 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \notin B_a$，由性质 1 则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$ 且 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \notin B_a$。由 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根，不妨设 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z) = 0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \ge 1$，$l_2 \ge 1$，记 $l = \min(l_1, l_2)$，则 $l \ge 1$。令 $B_a^{\#}$ 包含 B_a 的一切元素，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 都是 $B_a^{\#}$ 的 l 重元素。于是找到根集合 $B_a^{\#}$，使 $B_a \subset B_a^{\#}$ 且 $B_a \ne B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于直线 $x = a$ 严格对称的根集合。但这与 B_a 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$ 且 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \in B_a$。

2) $y_{j_1} \in R$ 时，假设 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$，由于 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 是 $f(z) = 0$ 在直线 $x = a$ 上的根，不妨设 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 是 $f(z) = 0$ 的 l_1 重根，则 $l_1 \ge 1$。令 $B_a^{\#}$ 包含 B_a 的一切元素，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 是 $B_a^{\#}$ 的 l_1 重元素，于是找到根集合 $B_a^{\#}$，使 $B_a \subset B_a^{\#}$ 且 $B_a \ne B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于直线 $x = a$ 严格对称的根集合。但这与 B_a 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \in B_a$。】

推论 1 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，B_a 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于直线 $x = a$ 严格对称的根集，于是 1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$ 且 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \notin B_a$，则 B_a 还不是根全集；2) $y_{j_1} \in R$ 时，若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 是 $f(z) = 0$ 在直线 $x = a$ 上的一个根，$z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$，则 B_a 还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，B_a 是 $f(z) = 0$ 在 z 平面上关于直线 $x = a$ 严格对称的根全集，1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$ 且 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}} \notin B_a$，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 不是 $f(z) = 0$ 的一对对偶复根(即 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 至少有一个不是 $f(z) = 0$ 的根)；2) $y_{j_1} \in R$ 时，若 $z_{j_1} = a + iy_{j_1} \notin B_a$，则 $z_{j_1} = a + iy_{j_1}$ 不是 $f(z) = 0$ 的根。

证明 由性质 6 即得。】

性质 7 设$a\in R$，B_a和$B_a^{\#}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的二个根集，其中B_a为根全集，则$B_a^{\#}\subset B_a$。

证明 用反证法：假如$B_a^{\#}\not\subset B_a$，由性质 3 推论 2，则$B_a^{\#}$至少有一个元素不属于B_a，设它为$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中$y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}\text{且}z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a，\quad f\left(z_{j_1}\right)=f\left(a+iy_{j_1}\right)=0$$

若$y_{j_1}\notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a^{\#}\text{且}z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a，\quad f\left(z_{j_2}\right)=f\left(a+i\overline{y_{j_1}}\right)=0$$

那么 1) $y_{j_1}\notin R$时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$f(z)=0$的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$且$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a$，由性质 6 推论 1 则$B_a$还不是根全集，矛盾。2) $y_{j_1}\in R$时，$f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$f(z)=0$在直线$x=a$上的一个根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$，由性质 6 推论 1，则$B_a$还不是根全集，矛盾。所以，$B_a^{\#}\subset B_a$。】

推论 设$a\in R$，若B_a和$B_a^{\#}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的二个根全集，则$B_a=B_a^{\#}$。

证明 由性质 7，则 $B_a^{\#}\subset B_a$且$B_a\subset B_a^{\#}$，故$B_a=B_a^{\#}$。】

定理 1 设$a\in R$，$1\le K\le n$，$B_a=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,K\}$是由$F_m(z-a)=0$在$z$平面上的所有根(含重根)组成的集合，则$B_a$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$严格对称的根全集。

证明由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则$Q(a)=0$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，故B_a的所有元素$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$是$f(z)=0$在$z$平面上的$K$个根。

假设$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$F_m(z-a)=0$的根，那么

1) $y_{j_1}\notin R$时，由$F_m(z-a)=0$根的性质，则$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$F_m(z-a)=0$的根，于是$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，从而$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$f(z)=0$的一对对偶复根。不妨设$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根，则$l_1\ge1$，$l_2\ge1$，记$l=\min(l_1,l_2)$，则$l\ge1$。由§3 定理 10 推论则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$F_m(z-a)=0$在

z 平面上的一对 l 重对偶根，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 B_a 的 l 重元素，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称要求的一对 l 重元素。

2) $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根，不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$，由§3 定理 6 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l_1 重根，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称要求的一个 l_1 重元素。

因此，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集合。再证 B_a 是根全集，用反证法：假设 B_a 还不是根全集，那么一定存在 $B_a^{\#}$，使 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，由性质 3 推论 3，则 $B_a^{\#}$ 中至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#}\text{ 且 }z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a,\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$$

若 $y_{j_1}\notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a^{\#}\text{ 且 }z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a,\quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0$$

那么 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，由§3 定理 8 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，矛盾。2) $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$，$f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根，由§3 定理 6，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，矛盾。所以，$B_a$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集。】

推论 1 设 $a\in R$，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 充分性由定理 1 即得；再证必要性。若 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集，则 $Q(a)=0$，$F_m(z-a)=0$ 关于 z 的次数 $K\geq 1$，不妨设 $B_a^{\#}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，由定理 1，则 $B_a^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集，由性质 7 推论，则 $B_a=B_a^{\#}$，因此 B_a 是由

$F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。】

推论 2 设 $a \in R$，则 B_a 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，l_1, l_2, l 均为非负整数，B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集，于是 1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 B_a 的一对 l 重元素的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。2) $y_{j_1} \in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l_1 重根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素。

证明 由题意根据推论 1，则 $Q(a)=0$，B_a 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合，于是 1) $y_{j_1} \notin R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对 l 重对偶复根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 B_a 的一对 l 重元素。再由题意根据§3 定理 10 推论即得。2) $y_{j_1} \in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 l_1 重根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素。再由§3 定理 6 即得。】

引理 设 $a \in R$，$y_j \in C$，则 $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根的充要条件是：$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)。

证明 令 $B_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,K\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设 $a \in R$，$y_j \in C$，$1 \le K \le n$，则 $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根的充要条件是：$y_j\ (j=1,2,\cdots,K)$ 是方程 $(4)^a$ 的所有复根(含重根)。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 1 即得。】

推论 设 $a \in R$，$Q(a)=0$，则 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根的个数等于 $(4)^a$ 的次数。

证明 由定理 2 即得。】

§5 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根全集

定义 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，$1\leq k\leq n$，$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 k 个非 a 根，记 $B_@=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C且y_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k\}$。

若 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，则称 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的一个非 a 根集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的 k 个非 a 根。

定义 1 比§4 定义 1 多了一个限制条件"$y_j\neq 0$"，由此将 $f(z)=0$ 的实根 a (假如有的话)排除在所定义集合 $B_@$ 之外，$B_@$ 的性质和定理 1 及其推论的证明可以省略。

在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根集合 $B_@$ 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\notin R$，$B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_@$ 的充要条件是：$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_@$。

性质 2 设 $a\in R$，$y_j\notin R$，l 为非负整数，$B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根集，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_@$ 的 l 重元素，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 也是 $B_@$ 的 l 重元素，并且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $B_@$ 的一对 l 重元素。

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$ 且 $y_{j_1}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个非 a 根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_@$ 且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_@^{\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_@$ 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_@^{\#}$ 的 l 重元素。

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$ 且 $y_{j_1}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个非 a 根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_@$ 且 $B_@\subset B_@^{\#}$，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $B_@$ 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 也是 $B_@^{\#}$ 的 l 重元素，即由 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_@\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_@^{\#}$。

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$ 且 $y_{j_1}\neq 0$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个非 a 根集，若 $B_@^{\#}$ 的任何一个元素都属于 $B_@$，即由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_@^{\#}$ $\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_@$，则 $B_@^{\#}\subset B_@$。

推论 3 设 $a\in R$，$B_@$ 和 $B_@^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个非

a 根集，若 $B_{@} \subset B_{@}^{\#}$ 且 $B_{@} \neq B_{@}^{\#}$，则 $B_{@}^{\#}$ 至少有一个元素不属于 $B_{@}$。

性质 4 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$ 且 $y_{j_1} \neq 0$，$B_{@}$ 和 $B_{@}^{\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的二个非 a 根集，若 $B_{@}^{\#}$ 至少有一个元素不属于 $B_{@}$，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_{@}^{\#} \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin B_{@}, \quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0;$$

若 $y_{j_1} \notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \in B_{@}^{\#} \text{ 且 } z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \notin B_{@}, \quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0。$$

定义 2 设 $a \in R$，$1 \leq k \leq n$，$B_{@}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in C \text{且} y_j \neq 0, j=1,2,\cdots,k\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根集，并且不存在 $B_{@}^{\#}$，使 $B_{@} \subset B_{@}^{\#}$ 且 $B_{@} \neq B_{@}^{\#}$，$B_{@}^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根集，则称 $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根全集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j$ ($j=1,2,\cdots,k$)是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部非 a 根。

性质 5 设 $a \in R$，则 $B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根全集的充要条件是：$B_{@}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部非 a 根组成的集合。

性质 6 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$ 且 $y_{j_1} \neq 0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根全集，于是 1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_{@}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \in B_{@}$；2) $y_{j_1} \in R$ 且 $y_{j_1} \neq 0$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in B_{@}$。

推论 1 设 $a \in R$，$y_{j_1} \in C$ 且 $y_{j_1} \neq 0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$B_{@}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根集，于是 1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin B_{@}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \notin B_{@}$，则 $B_{@}$ 还不是非 a 根全集；2) $y_{j_1} \in R$ 且 $y_{j_1} \neq 0$，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin B_{@}$，则 $B_{@}$ 还不是非 a 根全集。

推论 2 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$且$y_{j_1}\neq 0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$B_@$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的非a根全集，于是 1) $y_{j_1}\notin R$时，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_@$且$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_@$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$不是$f(z)=0$的一对对偶复根；2) $y_{j_1}\in R$且$y_{j_1}\neq 0$时，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_@$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$不是$f(z)=0$的根。

性质 7 设$a\in R$，$B_@$和$B_@^{\#}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的二个非a根集，其中$B_@$为非a根全集，则$B_@^{\#}\subset B_@$。

推论设$a\in R$，若$B_@$和$B_@^{\#}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的二个非a根全集，则$B_@ = B_@^{\#}$。

定理 1 设$a\in R$，$1\leq k\leq n$，$B_@=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C且y_j\neq 0, j=1,2,\cdots,k\}$是由$F_m(z-a)=0$在$z$平面上所有非$a$根(含重根)组成的集合，则$B_@$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$严格对称的非$a$根全集。

以下推论为叙述简便，说$B_@$是由$F_m(z-a)=0$在z平面上所有非a根组成的集合时，默认$F_m(z-a)=0$在z平面上非a根(含重根)的个数$k\geq 1$。

推论 1 设$a\in R$，则$B_@$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的非a根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_@$是由$F_m(z-a)=0$在z平面上所有非a根(含重根)组成的集合。

推论 2 设$a\in R$，则$B_@$是由$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的全部非a根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_@$是由$F_m(z-a)=0$在z平面上所有非a根(含重根)组成的集合。

推论 3 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$且$y_{j_1}\neq 0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，l_1,l_2,l均为非负整数，$B_@$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的非a根全集，于是 1) $y_{j_1}\notin R$时，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$B_@$的一对$l$重元素的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。2) $y_{j_1}\in R$且$y_{j_1}\neq 0$时，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$f(z)=0$在直线$x=a$上的l_1重根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是$B_@$的l_1重元素。

引理 设$a \in R$，$y_j \in C$且$y_j \neq 0$，则$z_j = a + iy_j \ (j = 1,2,\cdots,k)$是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x = a$严格对称的全部非$a$根的充要条件是：$z_j = a + iy_j \ (j = 1,2,\cdots,k)$是$F_m(z-a)=0$在$z$平面上的所有非$a$根(含重根)。

证明 令$B_@ = \{z_j = a + iy_j \mid y_j \in C且y_j \neq 0, j = 1,2,\cdots,k\}$，由定理1推论2即得。】

定理 2 设$a \in R$，$y_j \in C$且$y_j \neq 0$，$1 \le k \le n$，则$z_j = a + iy_j \ (j = 1,2,\cdots,k)$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x = a$严格对称的全部非$a$根的充要条件是：$y_j \ (j = 1,2,\cdots,k)$是方程$(4)^a$的所有非0复根(含重根)。

证明 由引理和§3定理1推论6即得。】

设$a \in R$，$Q(a)=0$，则$(3)^a$内$f_m(y)$的次数$K \ge 1$，可将$f_m(y)$写成**规范形式**

$$f_m(y) = y^l[a_{m0}y^k + a_{m1}y^{k-1} - a_{m2}y^{k-2} - a_{m3}y^{k-3} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} a_{m\ k-1}y + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]} a_{mk}] \tag{4)^a \quad (}$$

其次数$K = l + k \ge 1$，其中l和k均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0} \neq 0$，$a_{mk} \neq 0$，且$a_{m0}, a_{m1}, \cdots, a_{mk}$均为实数，式中的符号$\left[\frac{k}{2}\right]$表示不超过$\frac{k}{2}$的最大整数。于是$(4)^a$复根和非0复根的个数分别为$K$和$k$，0是$(4)^a$的$l$重根，由§4和§5定理2则$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x = a$严格对称的根和非$a$根的个数分别为$K$和$k$，$z = a$是$f(z)=0$的$l$重根，且$K = l + k$。

根全集B_a与非a根全集$B_@$的**关系性质**

设$a \in R$，K为正整数，l为非负整数，$f(z)=0$在z平面上关于直线$x = a$严格对称的根全集B_a和非a根全集$B_@$的元素个数分别为K和k，$z = a$是$f(z)=0$的l重根，则

$$B_a = \underbrace{\{a, a, \cdots, a\}}_{l} \cup B_@, \quad K = l + k。$$

证明 根据§4和§5定理1推论1，则$Q(a)=0$，B_a和$B_@$分别是由$F_m(z-a)=0$在z平面上的所有根(含重根)和所有非a根(含重根)组成的集合；根据§3定理6推论1，则$z = a$是$F_m(z-a)=0$的l重根。由$F_m(z-a)=0$在z平面上的所有根(含重根)组成的集合

是由所有 a 根和所有非 a 根组成，其中所有 a 根组成的集合是 $\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}$，于是

$$B_a=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}\cup B_{@}\text{。}$$

由于是两个允许有重元有限集合的并运算，因此并集 B_a 的元素个数就等于这两个集合的元素个数之和，即 $K=l+k$ 。】

$(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 还可写成**标准式**

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k] \qquad (4)^a$$

其次数 $K=l+k\geq1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq0$，$\lambda_k\neq0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，当 $k=0$ 时，$\lambda_k=\lambda_0=1$。又 $F_m(z-a)=F_m(iy)=i^Kf_m(y)=i^{l+k}f_m(y)$，于是

$$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l[(z-a)^k+i\lambda_1(z-a)^{k-1}+\lambda_2(z-a)^{k-2}+i\lambda_3(z-a)^{k-3}$$
$$+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}i^{k-1}\lambda_{k-1}(z-a)+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}i^k\lambda_k]$$

若 k 为正整数，可进一步细化，令

$$p(y)=y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k\text{，则}$$

$$f_m(y)=a_{m0}y^lp(y)$$

该 $p(y)$ 称为点 a 的 $p(y)$， $p(y)=0$ 为 k 次方程，由于 $\lambda_k\neq0$， 0 不是 $p(y)=0$ 的根。设 $y_j\in C$ 且 $y_j\neq0$，若 y_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $p(y)=0$ 的所有根，则它们就是 $(4)^a$ 的所有非 0 复根。

再令 $P(iy)=i^kp(y)$，由 $z=a+iy$，则 $P(z-a)=P(iy)=i^kp(y)$，于是

$$P(z-a)=(z-a)^k+i\lambda_1(z-a)^{k-1}+\lambda_2(z-a)^{k-2}+i\lambda_3(z-a)^{k-3}$$
$$+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}i^{k-1}\lambda_{k-1}(z-a)+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}i^k\lambda_k,$$

则

$$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^lP(z-a)$$

其中 $P(z-a)$ 是 $(z-a)$ 的复系数 k 次多项式，也是 z 的复系数 k 次多项式。

设 $a\in R$，$y_0\in C$，$z_0=a+iy_0$，若 $P(z-a)$ 在 $z=z_0$ 时函数值 $P(z_0-a)=P(iy_0)=i^kp(y_0)$

$=0$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $P(z-a)=0$（在 z 平面上）的一个（复）根。显然，$z_0=a+iy_0$ 是 $P(z-a)=0$ 的根的充要条件是：$(z-z_0)|P(z-a)$。

再设 l 为非负整数，若 $(z-z_0)^l|P(z-a)$，但 $(z-z_0)^{l+1}$ 不能整除 $P(z-a)$，则 $z_0=a+iy_0$ 是 $P(z-a)=0$（在 z 平面上）的 l 重(复)根。

$P(z-a)=P(iy)$ 的**整除性质** 与 $F_m(z-a)=F_m(iy)$ 的整除性质相同。

由于 $\lambda_k\neq 0$，$z_0=a$ 不是 $P(z-a)=0$ 的根，于是 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的 k 个根均不等于 a，又 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P(z-a)$，所以 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的 k 个根就是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有非 a 根。于是有

定理 3 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)的充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有非 a 根(含重根)。

推论 1 设 $a\in R$，则 $B_@$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的非 a 根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_@$ 是由 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有根(含重根)组成的集合。

证明 由定理 3 和定理 1 推论 1 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $B_@$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部非 a 根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，$B_@$ 是由 $P(z-a)=0$ 在平面上的所有根(含重根)组成的根集合。

证明 由定理 3 和定理 1 推论 2 即得。】

例 设 $a\in R$，$y_j\in C$ 且 $y_j\neq 0$，则 1) $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部非 a 根的充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P(z-a)=0$ 在平面上的所有根(含重根)。2) $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $P(z-a)=0$ 在平面上的所有根(含重根)充要条件是：y_j $(j=1,2,\cdots,k)$ 是 $(4)^a$ 的所有非 0 复根(含重根)。

证明 1)由定理 3 推论 2 即得；2)由 1)根据定理 2 即得】

定理 4 设 $a\in R$，$y_j\in R$ 且 $y_j\neq 0$，若 $z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,k^{(1)}\right)$ 是 $P(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)，则它们既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有非 a 根(含重根)。

证明 由题设和 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P(z-a)$，再由§3 定理 6 推论 3 即得。】

§6 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集

定义 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，$1\le \underline{K}\le n$，$z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\underline{K}$ 个各不相同的根，记 $\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$。

假设对 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，当 $y_{j_1}\notin R$ 时，均能找到 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 $\underline{B_a}$ 的单元素，那么就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称要求的一对单元素；当 $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称要求的一个单元素。

满足上述条件就称 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的一个根集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j\ (j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称的 $\underline{K}$ 个各不相同的根。

显然，若 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集，则 $\underline{B_a}$ 的任意一个元素都是单元素，即 $\underline{B_a}$ 是不允许有重元的 Cantor 集合。

在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集合 $\underline{B_a}$ 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\notin R$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 的充分必要条件是：$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$。

证明由定义 1 即得。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_j\in C$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$。

证明由定义 1 即得。】

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\underline{B_a}$ 和 $\underline{B_a^\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^\#}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 既是 $\underline{B_a}$ 的单元素，也是 $\underline{B_a^\#}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a^\#}$。

证明由性质 2 即得。】

推论 1 设$a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的二个根集，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$且$\underline{B_a} \subset \underline{B_a^{\#}}$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$既是$\underline{B_a}$的单元素，也是$\underline{B_a^{\#}}$的单元素，即$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1) \in \underline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1) \in \underline{B_a^{\#}}$。

证明 $\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$都是 Cantor 集合，若$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$且$\underline{B_a} \subset \underline{B_a^{\#}}$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a^{\#}}$。再由性质 3 即得。】

推论 2 设$a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的二个根集，若$\underline{B_a^{\#}}$的任何一个元素都属于$\underline{B_a}$，即由$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a^{\#}} \Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，则$\underline{B_a^{\#}} \subset \underline{B_a}$。

证明由 Cantor 集合子集定义即得。】

推论 3 设$a \in R$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的二个根集，若$\underline{B_a} \subset \underline{B_a^{\#}}$且$\underline{B_a} \neq \underline{B_a^{\#}}$，则$\underline{B_a^{\#}}$至少有一个元素不属于$\underline{B_a}$。

证明由题设则$\underline{B_a^{\#}} \not\subset \underline{B_a}$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设$a \in R$，$y_{j_1} \in C$，$\underline{B_a}$和$\underline{B_a^{\#}}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的二个根集，若$\underline{B_a^{\#}}$至少有一个元素不属于$\underline{B_a}$，设它为$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \underline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \underline{B_a}, \quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0;$$

若$y_{j_1} \notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \in \underline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \notin \underline{B_a}, \quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0 。$$

证明由性质 1 即得。】

定义 2 设$a \in R$，$1 \le \underline{K} \le n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$单层对称的根集，并且不存在$\underline{B_a^{\#}}$，使$\underline{B_a} \subset \underline{B_a^{\#}}$，$\underline{B_a} \neq \underline{B_a^{\#}}$，$\underline{B_a^{\#}}$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$单层对称的根集，则称$\underline{B_a}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$单层对称的根全集，且称其所有元素$z_j=a+iy_j$（$j=1,2,\cdots,\underline{K}$）是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根。

性质 5 设$a \in R$，则$\underline{B_a}$是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的根全集的充

要条件是：$\underline{B_a}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称的全部各不相同的根组成的集合。

证明由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，1) $y_{j_1}\notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$；2) $y_{j_1}\in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$。

证明用反证法。1) $y_{j_1}\notin R$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$ 不成立，那么 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 或 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\underline{B_a}$，由性质 1 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\underline{B_a}$。

由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，令 $\underline{B_a^\#}$ 包含 $\underline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 $\underline{B_a^\#}$ 的单元素，于是找到根集合 $\underline{B_a^\#}$，使 $\underline{B_a}\subset\underline{B_a^\#}$ 且 $\underline{B_a}\neq\underline{B_a^\#}$，$\underline{B_a^\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的关于直线 $x=a$ 单层对称的根集合。但这与 $\underline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$。

2) $y_{j_1}\in R$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，令 $\underline{B_a^\#}$ 包含 $\underline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a^\#}$ 的单元素，于是找到根集合 $\underline{B_a^\#}$，使 $\underline{B_a}\subset\underline{B_a^\#}$ 且 $\underline{B_a}\neq\underline{B_a^\#}$，$\underline{B_a^\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集合。但这与 $\underline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集，于是 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\underline{B_a}$，则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集；2) $y_{j_1}\in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集。

证明由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，1) $y_{j_1}\notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根；2) $y_{j_1}\in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，则

$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 不是 $f(z)=0$ 的根。

证明由性质 6 即得。】

下面性质 7 及推论的证明方法与§4 性质 7 及推论相同予以省略。

性质 7 设 $a\in R$，$\underline{B_a}$ 和 $\underline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的二个根集，其中 $\underline{B_a}$ 为根全集，则 $\underline{B_a^{\#}}\subset\underline{B_a}$。

推论设 $a\in R$，若 $\underline{B_a}$ 和 $\underline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的二个根全集，则 $\underline{B_a}=\underline{B_a^{\#}}$。

定理 1 设 $a\in R$，$1\le\underline{K}\le n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的根集，则 $\underline{B_a}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集。

证明由题意根据§3 定理 2 和定理 3，则 $Q(a)=0$，$f(z)=g(z)F_m(z-a)$，故 $\underline{B_a}$ 的所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\underline{K})$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\underline{K}$ 个各不相同的根。

假设$\forall$ $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的根，那么

1) $y_{j_1}\notin R$ 时，由 $F_m(z-a)=0$ 根的性质，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 也是 $F_m(z-a)=0$ 的根，并且 $z_{j_1}\ne z_{j_2}$，故 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 $\underline{B_a}$ 的单元素，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称要求的一对单元素。

2) $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 既是 $F_m(z-a)=0$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称要求的一个单元素。

因此，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上的关于直线 $x=a$ 单层对称的根集合。再证 $\underline{B_a}$ 是根全集，用反证法：假设 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，那么一定存在 $\underline{B_a^{\#}}$，使 $\underline{B_a}\subset\underline{B_a^{\#}}$ 且 $\underline{B_a}\ne\underline{B_a^{\#}}$，$\underline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根集，由性质 3 推论 3，则 $\underline{B_a^{\#}}$ 中至少有一个元素不属于 $\underline{B_a}$，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a^{\#}}\text{ 且 }z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}\text{，}\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0\text{；}$$

若 $y_{j_1}\notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in \underline{B_a^{\#}}\text{ 且 } z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin \underline{B_a}，\quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0$$

那么 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，由§3 定理 8 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}\neq z_{j_2}$，故 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$，矛盾。2) $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，$f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根，由§3 定理 6 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，矛盾。所以 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集。】

推论 1 设 $a\in R$，则 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集的充要条件是：$Q(a)=0$，$\underline{B_a}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的集合。

证明 由定理 1 和性质 7 推论即得。】

推论 2 设 $a\in R$，则 $\underline{B_a}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称的全部各不相同的根组成的集合的充要条件是：$Q(a)=0$，$\underline{B_a}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的集合。

证明 由推论 1 和性质 5 即得。】

推论 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，于是 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的一对对偶根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $\underline{B_a}$ 的一对单元素。2) $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素。

证明 由题意则根据推论 1，则 $Q(a)=0$，$\underline{B_a}$ 是由 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根组成的集合。于是 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的一对对偶根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $\underline{B_a}$ 的一对单元素。再由§3 定理 8 推论 3 即得。2) $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素。再由§3 定理 6

即得。】

引理 设$a\in R$，$y_j\in C$，则$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K}\right)$是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根的充要条件是：$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K}\right)$是$F_m(z-a)=0$在$z$平面上的所有各不相同的根。

证明 令$\underline{B_a}=\left\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\right\}$，由定理 1 推论 2 即得。】

定理 2 设$a\in R$，$y_j\in C$，$1\le \underline{K}\le n$，则$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K}\right)$是$n$次方程$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根的充要条件是：$y_j$ $\left(j=1,2,\cdots,\underline{K}\right)$是方程$(4)^a$的所有各不相同的复根。

证明 由引理和§3 定理 1 推论 2 即得。】

设$a\in R$，$y_j^{(0)}\in R$且$y_j^{(0)}\ne 0$，$y_j\notin R$，$1\le \underline{K}\le n$，l为非负整数，n次方程$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$对称的各不相同的根的个数为$\underline{K}$，若$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$P(z-a)=0$在$z$平面上的所有各不相同的根，$z=a$是$f(z)=0$的$l$重根，根据§3 定理 6 推论 1，则$z=a$是$F_m(z-a)=0$的$l$重根，$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P(z-a)$，于是

1. $l\ge 1$时，$z=a$，$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$F_m(z-a)=0$在$z$平面上的所有各不相同的根，从而它们也是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根，$\underline{K}=1+t+2s$。

2. $l=0$时，$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$F_m(z-a)=0$在$z$平面上的所有各不相同的根，从而它们也是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根，$\underline{K}=t+2s$。

推论 设$a\in R$，$y_j^{(0)}\in R$且$y_j^{(0)}\ne 0$，$y_j\notin R$，l为非负整数，$z=a$是$f(z)=0$的l重根，于是 1) $l\ge 1$时，$z=a$，$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$f(z)$=0在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根充要条件是：0，$y_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$y_j$，$\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$(4)^a$的所有各不相同的复根。2) $l=0$时，$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$对称的全部各不相同的根的充要条件是：$y_j^{(0)}$ $\left(j=1,2,\cdots,t\right)$，$y_j$，$\overline{y_j}$ $\left(j=1,2,\cdots,s\right)$是$(4)^a$的

所有各不相同的复根。

证明 由题意根据定理 2 即得。】

当$\left(f(z), f'(z)\right)=1$时，$f(z)=0$的根均为单根，若$B_a$是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$严格对称的根集，根据定义，则$B_a$也是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$单层对称的根集，这时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$是集合$B_a$的单元素，即$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in B_a$。

定义 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\underline{B_a}$和B_a分别是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称根集合和严格对称根集合。假如由$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$，则称$\underline{B_a}$是$B_a$的子集，或者说$B_a$包含$\underline{B_a}$，记作$\underline{B_a}\subset B_a$或$B_a\supset\underline{B_a}$。当$\underline{B_a}$不是$B_a$的子集时，通常记作$\underline{B_a}\not\subset B_a$。反过来，假如由$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in B_a\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$，则称$B_a$是$\underline{B_a}$的子集，或者说$\underline{B_a}$包含$B_a$，记作$B_a\subset\underline{B_a}$或$\underline{B_a}\supset B_a$。当$B_a$不是$\underline{B_a}$的子集时，通常记作$B_a\not\subset\underline{B_a}$。当且仅当$\underline{B_a}\subset B_a$且$B_a\subset\underline{B_a}$时，称$\underline{B_a}$与$B_a$相等，记作$\underline{B_a}=B_a$；当且仅当$\underline{B_a}\subset B_a$且$\underline{B_a}\neq B_a$时，称$\underline{B_a}$是$B_a$的真子集。

性质 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的根集合$\underline{B_a}$和严格对称的根集合B_a的元素个数分别为$\underline{K}$和K，于是

1)若$\underline{B_a}\subset B_a$，则$\underline{K}\leq K$；若$\underline{B_a}=B_a$，则$\underline{K}=K$；若$\underline{B_a}\subset B_a$且$\underline{B_a}\neq B_a$，则$\underline{K}<K$；若$\underline{B_a}\subset B_a$，$\underline{K}=K$，则$\underline{B_a}=B_a$。2)若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，$\underline{B_a}\subset B_a$，则$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$。

设$a\in R$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$是$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$单层对称的根全集，利用$\underline{B_a}$可以生成$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$严格对称的根全集$B_a$，方法如下：假设$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，那么

1. $y_{j_1}\notin R$时，由性质 1 则$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$，于是$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$f(z)=0$的一对对偶复根，令$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$。若$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$分别是$f(z)=0$的$l_1$重和$l_2$重根，则$l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，记$l=\min(l_1,l_2)$，则$l\geq 1$，令$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$和$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$都是$B_a$的$l$重元素，于是$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$是$B_a$的符合$f(z)=0$的根在$z$平面上关于直线$x=a$严格对称要求的一对$l$重元素。

2. $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称要求的一个 l_1 重元素。

在对 $\underline{B_a}$ 的每一个元素都进行了上述操作之后，由此生成的 B_a 符合 z 平面上严格对称根集合的定义，因此 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，下面进一步证明它是根全集。

定理 3 设 $a\in R$，$1\leq \underline{K}\leq n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a}$ 用上述方法所生成的 B_a 的元素个数为 K，$y_{j_1}\in C$，则 1) $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$；2) B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集；3) $\underline{B_a}\subset B_a$，$\underline{K}\leq K$。

证明 由题设，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，而且

1)必要性显然，证充分性。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，于是① $y_{j_1}\notin R$ 时，由§4 性质 1，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，从而 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，由性质 6，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in \underline{B_a}$，故 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$；② $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，由性质 6，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$。故充分性成立。

2)用反证法：假设 B_a 还不是根全集，那么一定存在 $B_a^{\#}$，使 $B_a\subset B_a^{\#}$ 且 $B_a\neq B_a^{\#}$，$B_a^{\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集，由§4 性质 3 推论 3，则 $B_a^{\#}$ 至少有一个元素不属于 B_a，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由§4 性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a^{\#} \text{且} z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a,\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0;$$

若 $y_{j_1}\notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a^{\#} \text{且} z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a,\quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0$$

那么① $y_{j_1}\notin R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin B_a$，由 1)则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin \underline{B_a}$，由

性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。② $y_{j_1}\in R$ 时，$f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin B_a$，由 1) 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\underline{B_a}$，由性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。所以 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集。

3)假设 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，那么① $y_{j_1}\notin R$ 时，由性质 1 则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 $\underline{B_a}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$，$a+i\overline{y_{j_1}}=z_{j_2}(1)\in\underline{B_a}$。不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，记 $l=\min(l_1,l_2)$，则 $l\geq 1$，由 B_a 生成法，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 B_a 的 l 重元素，因此 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 B_a 的 1 重以上元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$，$a+i\overline{y_{j_1}}=z_{j_2}(\geq 1)\in B_a$。于是由

$$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a。$$

② $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\underline{B_a}$ 的单元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}$。不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$，由 B_a 生成法，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素，故 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 1 重以上元素，即 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$。于是由 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$。

总之，由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(1)\in\underline{B_a}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq 1)\in B_a$。于是 $\underline{B_a}\subset B_a$。又 $\underline{B_a}$ 和 B_a 的元素个数分别为 $\underline{K}$ 和 K，所以 $\underline{K}\leq K$。】

若 $\underline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，则其任意一个元素都是 1 重的，即 $\underline{B_a}$ 的元素一定各不相同。B_a 是利用 $\underline{B_a}$ 用上述方法所生成，其任意一个元素都是 1 重以上的，即 B_a 的元素不一定各不相同。由定理 3，有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}\Leftrightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$$

事实上，由 B_a 的所有各不相同的元素组成的集合就是 $\underline{B_a}$。在 B_a 中任意取一个元素，为减少任意取的次数，可以只在 $\underline{B_a}$ 中选取，即用 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 来代表 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，或者说 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}\Leftrightarrow\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$。

§7 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集

定义 1 设 $a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，$1\le\overline{K}\le n$，$z_j=a+iy_j\ \left(j=1,2,\cdots,\overline{K}\right)$是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的 $\overline{K}$ 个根，记 $\overline{B_a}=\left\{z_j=a+iy_j\mid y_j\in C,j=1,2,\cdots,\overline{K}\right\}$。

假设对 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，当 $y_{j_1}\notin R$ 时，均能找到 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\overline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，那么就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称要求的一对元素；当 $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重元素，就称 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称要求的一个元素。

满足上述条件就称 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的一个根集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j\ \left(j=1,2,\cdots,\overline{K}\right)$是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ (普通)对称的 $\overline{K}$ 个根。

例 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，假如 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的任意一个元素，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素，就能推导出 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l 重元素，即由

$$\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a},\quad a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a^{\#}}\ 。$$

则 $\overline{B_a}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的子集，即 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$。当且仅当 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$ 时，$\overline{B_a}=\overline{B_a^{\#}}$。当且仅当 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a}\ne\overline{B_a^{\#}}$ 时，$\overline{B_a}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的真子集。

元素与集合的**关系性质** 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，l 为非负整数，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，于是 1)若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，$l=0$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$；2)若 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，$l\ge1$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$；3)若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，则 $l\ge1$；4)若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，$\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$。

在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集合 $\overline{B_a}$ 的**性质**

性质 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\notin R$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\overline{B_a}$。

证明 由定义 1 即得。】

性质 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素。

证明 由定义 1 即得。】

性质 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 且 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l 重元素。

证明 由性质 2 即得。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 且 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 也是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l 重元素。即由 $a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a^{\#}}$。

证明 由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 且 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$，再由性质 3 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，若 $\overline{B_a^{\#}}$ 的任何一个元素都属于 $\overline{B_a}$，即由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，则 $\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$。

证明 由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}\Rightarrow z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，根据性质 3，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a^{\#}}$ 的 l 重元素，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素，即由 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a^{\#}}\Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in\overline{B_a}$，故 $\overline{B_a^{\#}}\subset\overline{B_a}$。】

推论 3 设 $a\in R$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根

集，若 $\overline{B_a} \subset \overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a} \neq \overline{B_a^{\#}}$ ，则 $\overline{B_a^{\#}}$ 至少有一个元素不属于 $\overline{B_a}$ 。

证明 由题设则 $\overline{B_a^{\#}} \not\subset \overline{B_a}$，再由推论 2 即得。】

性质 4 设 $a \in R$， $y_{j_1} \in C$， $\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^{\#}}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，若 $\overline{B_a^{\#}}$ 至少有一个元素不属于 $\overline{B_a}$，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$， 则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}， \quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0；$$

若 $y_{j_1} \notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \in \overline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \notin \overline{B_a}， \quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0 。$$

证明 由性质 1 即得。】

定义 2 设 $a \in R$， $1 \le \overline{K} \le n$， $\overline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j \in C, j=1,2,\cdots,\overline{K}\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，并且不存在 $\overline{B_a^{\#}}$，使 $\overline{B_a} \subset \overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a} \neq \overline{B_a^{\#}}$，$\overline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，则称 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集，且称其所有元素 $z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,\overline{K})$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ (普通)对称的全部根。

性质 5 设 $a \in R$，则 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集的充要条件是：$\overline{B_a}$ 是由 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ (普通)对称的全部根组成的集合。

证明 由定义 2 即得。】

性质 6 设 $a \in R$， $y_{j_1} \in C$， $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$， $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集，1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$， $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \in \overline{B_a}$ 。2) $y_{j_1} \in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$ 。

证明 用反证法。1) $y_{j_1} \notin R$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \in \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \in \overline{B_a}$ 不成立，那么 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$ 或 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \notin \overline{B_a}$，由性质 1 则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}} \notin \overline{B_a}$ 。由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$， $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \ge 1$， $l_2 \ge 1$。令 $\overline{B_a^{\#}}$ 包含 $\overline{B_a}$ 的一切元

素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $\overline{B_a^\#}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，于是找到根集合 $\overline{B_a^\#}$，使 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^\#}$ 且 $\overline{B_a}\neq\overline{B_a^\#}$，$\overline{B_a^\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集合。但这与 $\overline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\overline{B_a}$。

2) $y_{j_1}\in R$ 时，假设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$，由于 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，不妨设 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$。令 $\overline{B_a^\#}$ 包含 $\overline{B_a}$ 的一切元素，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a^\#}$ 的 l_1 重元素，于是找到根集合 $\overline{B_a^\#}$，使 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^\#}$ 且 $\overline{B_a}\neq\overline{B_a^\#}$，$\overline{B_a^\#}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集合。但这与 $\overline{B_a}$ 是根全集矛盾。因此，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。】

推论 1 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，于是 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\overline{B_a}$，则 $\overline{B_a}$ 还不是根全集；2) $y_{j_1}\in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$，则 $\overline{B_a}$ 还不是根全集。

证明 由性质 6 即得。】

推论 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集，1) $y_{j_1}\notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 不是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根；2) $y_{j_1}\in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 不是 $f(z)=0$ 根。

证明 由性质 6 即得。】

下面性质 7 及推论的证明方法与§4 性质 7 及推论相同予以省略。

性质 7 设 $a\in R$，$\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根集，其中 $\overline{B_a}$ 为根全集，则 $\overline{B_a^\#}\subset\overline{B_a}$。

推论 设 $a\in R$，若 $\overline{B_a}$ 和 $\overline{B_a^\#}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的二个根全集，则 $\overline{B_a}=\overline{B_a^\#}$。

例 2 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称

的根全集为 B_a，单层对称的根全集为 $\underline{B_a}$，普通对称的根全集为 $\overline{B_a}$，1) $y_{j_1} \notin R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in B_a$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in \underline{B_a}$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in \overline{B_a}$；2) $y_{j_1}\in R$ 时，若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \overline{B_a}$。

例 3 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，B_a 和 $\overline{B_a}$ 分别是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集合和普通对称的根集合，假如 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，满足 1) $y_{j_1}\notin R$ 时，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(\geq l)\in \overline{B_a}$；2) $y_{j_1}\in R$ 时，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l_1)\in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l_1)\in \overline{B_a}$，则 B_a 是 $\overline{B_a}$ 的子集，即 $B_a\subset \overline{B_a}$。反过来，假如 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \overline{B_a}$，$a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in \overline{B_a} \Rightarrow a+iy_{j_1}=z_{j_1}(l)\in B_a$，则 $\overline{B_a}$ 是 B_a 的子集，即 $\overline{B_a}\subset B_a$。当且仅当 $B_a\subset \overline{B_a}$ 且 $\overline{B_a}\subset B_a$ 时，$B_a=\overline{B_a}$；当且仅当 $B_a\subset \overline{B_a}$ 且 $B_a\neq \overline{B_a}$ 时，B_a 是 $\overline{B_a}$ 的真子集。

性质 设 $a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根集合 B_a 和普通对称的根集合 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 K 和 $\overline{K}$，于是

1)若 $B_a\subset \overline{B_a}$，则 $K\leq \overline{K}$；若 $B_a=\overline{B_a}$，则 $K=\overline{K}$；若 $B_a\subset \overline{B_a}$ 且 $B_a\neq \overline{B_a}$，则 $K<\overline{K}$；若 $B_a\subset \overline{B_a}$，$K=\overline{K}$，则 $B_a=\overline{B_a}$。2)若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$，$B_a\subset \overline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \overline{B_a}$。

设 $a\in R$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a}$ 可以生成 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集 $\overline{B_a}$，方法如下：假设 $\forall\ z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$，那么

1. $y_{j_1}\notin R$ 时，由§6 性质 1 则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in \underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \overline{B_a}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in \overline{B_a}$。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\geq 1$，$l_2\geq 1$，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a-iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称要求的一对元素。

2. $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in \underline{B_a}$，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根，令

$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1\geq 1$，令 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重元素，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的符合 $f(z)=0$ 的根在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称要求的一个元素。

在对 $\underline{B_a}$ 的每一个元素都进行了上述操作之后，由此生成的 $\overline{B_a}$ 符合普通对称根集合的定义，因此 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集合。下面进一步证明它是根全集。

定理 1 设 $a\in R$，$1\leq \underline{K}\leq n$，$\underline{B_a}=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in C, j=1,2,\cdots,\underline{K}\}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集，利用 $\underline{B_a}$ 用§6 方法生成的 B_a 的元素个数为 K，利用 $\underline{B_a}$ 用本节方法生成的 $\overline{B_a}$ 的元素个数为 $\overline{K}$，$y_{j_1}\in C$，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集，而且 1) $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$；2) $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集；3) $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，$\underline{K}\leq K\leq\overline{K}$。

证明 根据§6 定理 3，则 B_a 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的根全集；由题设则 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，而且

1)必要性显然，证充分性。若 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$，于是① $y_{j_1}\notin R$ 时，由性质 1，则 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\overline{B_a}$，从而 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，由§6 性质 6，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$ 且 $z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\underline{B_a}$，于是 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$；② $y_{j_1}\in R$ 时，$z_{j_1}=a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，由§6 性质 6，则 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$。故充分性成立。

2)用反证法。假设 $\overline{B_a}$ 还不是根全集，那么一定存在 $\overline{B_a^{\#}}$，使 $\overline{B_a}\subset\overline{B_a^{\#}}$ 且 $\overline{B_a}\neq\overline{B_a^{\#}}$，$\overline{B_a^{\#}}$ 也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根集，由性质 3 推论 3，则 $\overline{B_a^{\#}}$ 至少有一个元素不属于 $\overline{B_a}$，设它为 $z_{j_1}=a+iy_{j_1}$，其中 $y_{j_1}\in C$，由性质 4，则有

$$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_1}=a+iy_{j_1}\notin\overline{B_a}，\quad f(z_{j_1})=f(a+iy_{j_1})=0；$$

若 $y_{j_1}\notin R$，则还有

$$z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\in\overline{B_a^{\#}} \text{ 且 } z_{j_2}=a+i\overline{y_{j_1}}\notin\overline{B_a}，\quad f(z_{j_2})=f(a+i\overline{y_{j_1}})=0$$

那么① $y_{j_1} \notin R$ 时，$z_{j_1} = a + iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a + i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根，$z_{j_1} = a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$ 且 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}} \notin \overline{B_a}$，由 1)则 $z_{j_1} = a+iy_{j_1} \notin \underline{B_a}$ 且 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}} \notin \underline{B_a}$，由§6 性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。② $y_{j_1} \in R$ 时，$f(z_{j_1}) = f(a+iy_{j_1}) = 0$，$z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的一个根，$z_{j_1} = a+iy_{j_1} \notin \overline{B_a}$，由 1)则 $z_{j_1} = a+iy_{j_1} \notin \underline{B_a}$，由§6 性质 6 推论 1 则 $\underline{B_a}$ 还不是根全集，矛盾。所以 $\overline{B_a}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 普通对称的根全集。

3)假设 $\forall\ z_{j_1} = a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，由§6 知即 $\forall\ z_{j_1} = a+iy_{j_1} \in B_a$。那么① $y_{j_1} \notin R$ 时，由§6 性质 1 则 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}} \in \underline{B_a}$，于是 $z_{j_1} = a+iy_{j_1}$，$z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根。不妨设 $z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1 \ge 1$，$l_2 \ge 1$。记 $l = \min(l_1, l_2)$，则有 $l_1 \ge l \ge 1$，$l_2 \ge l \ge 1$。由 B_a 生成法，$z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 B_a 的 l 重元素，即 $a+iy_{j_1} = z_{j_1}(l) \in B_a$，$a+i\overline{y_{j_1}} = z_{j_2}(l) \in B_a$。由 $\overline{B_a}$ 生成法，$z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重和 l_2 重元素，又 $l_1 \ge l \ge 1$，$l_2 \ge l \ge 1$，于是 $z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 和 $z_{j_2} = a+i\overline{y_{j_1}}$ 都是 $\overline{B_a}$ 的 l 重以上（含 l 重）元素，即 $a+iy_{j_1} = z_{j_1}(\ge l) \in \overline{B_a}$，$a+i\overline{y_{j_1}} = z_{j_2}(\ge l) \in \overline{B_a}$。于是由

$$a+iy_{j_1} = z_{j_1}(l) \in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1} = z_{j_1}(\ge l) \in \overline{B_a}。$$

② $y_{j_1} \in R$ 时，$z_{j_1} = a+iy_{j_1} \in \underline{B_a}$，则 $z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的根。不妨设 $z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 是 $f(z)=0$ 的 l_1 重根，则 $l_1 \ge 1$。由 B_a 生成法，$z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 是 B_a 的 l_1 重元素，即 $a+iy_{j_1} = z_{j_1}(l_1) \in B_a$。由 $\overline{B_a}$ 生成法，$z_{j_1} = a+iy_{j_1}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l_1 重元素，即 $a+iy_{j_1} = z_{j_1}(l_1) \in \overline{B_a}$。于是由 $a+iy_{j_1} = z_{j_1}(l_1) \in B_a \Rightarrow a+iy_{j_1} = z_{j_1}(l_1) \in \overline{B_a}$。

于是 $B_a \subset \overline{B_a}$；由§6 定理 3，则 $\underline{B_a} \subset B_a$，故 $\underline{B_a} \subset B_a \subset \overline{B_a}$。又 $\underline{B_a}$，B_a，$\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$，于是有 $\underline{K} \le K \le \overline{K}$。】

定理 2 设 $a \in R$，$f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集 B_a，普通对称的根全集 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$，则 $\underline{B_a} \subset B_a \subset \overline{B_a}$，$\underline{K} \le K \le \overline{K}$，其中 B_a 和 $\overline{B_a}$ 可看作是利用 $\underline{B_a}$ 分别用§6 方法和本节方法生成。

证明 由题设不妨假设利用 $\underline{B_a}$ 用§6 方法生成的 $B_a^{\#}$ 的元素个数为 $K^{\#}$，利用 $\underline{B_a}$ 用

本节方法生成的$\overline{B_a^{\#}}$的元素个数$\overline{K^{\#}}$，根据定理 1，则$B_a^{\#}$和$\overline{B_a^{\#}}$分别是$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$严格对称的根全集和普通对称的根全集，而且 $\underline{B_a}\subset B_a^{\#}\subset\overline{B_a^{\#}}$，$\underline{K}\le K^{\#}\le\overline{K^{\#}}$。

由§4 性质 7 推论，则$B_a=B_a^{\#}$，于是$K=K^{\#}$；由性质 7 推论，则$\overline{B_a}=\overline{B_a^{\#}}$，于是$\overline{K}=\overline{K^{\#}}$，所以$\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，$\underline{K}\le K\le\overline{K}$，于是命题成立。】

推论 设$a\in R$，$y_{j_1}\in C$，$f(z)=0$在z平面上关于直线$x=a$单层对称的根全集为$\underline{B_a}$，严格对称的根全集为B_a，普通对称的根全集为$\overline{B_a}$，则

1) $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$；

2) $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\underline{B_a}$的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$；

3) $z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in B_a$的充要条件是：$z_{j_1}=a+iy_{j_1}\in\overline{B_a}$。

证明 由题意根据定理 2，则B_a和$\overline{B_a}$可看作是利用$\underline{B_a}$分别用§6 方法和本节方法生成，于是 1)由§6 定理 3 即得；2)由定理 1 即得；3)由 1)和 2)即得。】

定理 3 设$a\in R$，$y_j^{(0)}\in R$且$y_j^{(0)}\ne 0$，$y_j\notin R$，$l_j^{(0)},l_{j1},l_{j2},L$均为正整数，$l$为非负整数，$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$单层对称的根全集$\underline{B_a}$，严格对称的根全集$B_a$，普通对称的根全集$\overline{B_a}$的元素个数分别为$\underline{K}$，$K$，$\overline{K}$；$f(z)=0$在$z$平面上关于直线$x=a$严格对称的非$a$根全集$B_@$的元素个数为$k$；$z_j=a+iy_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,t)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $(j=1,2,\cdots,s)$是$P(z-a)=0$在z平面上的所有各不相同的根，其中$z_j=a+iy_j^{(0)}$是$f(z)=0$的$l_j^{(0)}$重根，$z_{j1}=a+iy_j$和$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$分别是$f(z)=0$的l_{j1}重和l_{j2}重根，记$l_j=\min(l_{j2},l_{j2})$。如果$z=a$是$f(z)=0$的l重根，那么 1) $l\ge 1$时，有$\underline{K}=1+t+2s$，$K=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中$k=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$)，$\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$；2) $l=0$时，有$\underline{K}=t+2s$，$K=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$ (其中$k=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$)，$\overline{K}=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$；

3)若$x=a$是$Q(x)=0$的L重根，则$L=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$，且$\overline{K}\le L$。

证明 由题意根据定理 2，则 B_a 和 $\overline{B_a}$ 可看作是利用 $\underline{B_a}$ 分别用§6 方法和本节方法生成。$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由§3 定理 6 推论 1 则 $z=a$ 是 $F_m(z-a)=0$ 的 l 重根。又 $z_j=a+iy_j^{(0)}\,(j=1,2,\cdots,t)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}\ (j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，而 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P(z-a)$，于是

1) $l\ge 1$ 时，$z=a$，$z_j=a+iy_j^{(0)}\,(j=1,2,\cdots,t)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}\ (j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，由§6 定理 1 推论 1，则它们是 $\underline{B_a}$ 的所有元素，故 $\underline{B_a}$ 的元素个数 $\underline{K}=1+t+2s$。

由题设 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，且 $l_{j1}\ge 1$，$l_{j2}\ge 1$，记 $l_j=\min(l_{j2},l_{j2})$，则 $l_j\ge 1$。由根全集 B_a 生成法，则 $z_{j1}=a+iy_j$ 和 $z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 都是 B_a 的 l_j 重元素 $(j=1,2,\cdots,s)$。$z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 $l_j^{(0)}$ 重根，且 $l_j^{(0)}\ge 1$；$z=a$ 是 $f(z)=0$ (在直线 $x=a$ 上)的 l 重实根。由根全集 B_a 生成法，则 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 B_a 的 $l_j^{(0)}$ 重元素 $(j=1,2,\cdots,t)$，$z=a$ 是 B_a 的 l 重元素。故 B_a 的元素个数 $K=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$。

由根全集 B_a 与非 a 根全集 $B_@$ 的关系性质，则

$$B_a=\underbrace{\{a,a,\cdots,a\}}_{l}\cup B_@\text{，且 }K=l+k\text{，于是有 }k=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j\text{。}$$

由根全集 $\overline{B_a}$ 生成法，则 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 分别是 $\overline{B_a}$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重元素 $(j=1,2,\cdots,s)$，$z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $\overline{B_a}$ 的 $l_j^{(0)}$ 重元素 $(j=1,2,\cdots,t)$，$z=a$ 是 $\overline{B_a}$ 的 l 重元素。故 $\overline{B_a}$ 的元素个数 $\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})$。

2) $l=0$ 时，$z_j=a+iy_j^{(0)}\,(j=1,2,\cdots,t)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}\ (j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，由§6 定理 1 推论 1，则它们是 $\underline{B_a}$ 的所有元素，于是有 $\underline{K}=t+2s$。接下来与 1)同理可证得

$$K=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j\ (\text{其中 }k=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j),\quad \overline{K}=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}(l_{j1}+l_{j2})\text{。}$$

3) 对于 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上任意一个非 a 根 $z_0=a+iy_0$ (其中 $y_0\in R$ 且 $y_0\ne 0$)，由§6 性质 6 则 $z_0=a+iy_0\in\underline{B_a}$。于是无论 $l\ge 1$ 还是 $l=0$，$\underline{B_a}$ 中元素 $z_j=a+iy_j^{(0)}$

$(j=1,2,\cdots,t)$ 就是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有各不相同的非 a 根，其中 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $f(z)=0$ 的 $l_j^{(0)}$ 重根。

对于 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的以 a，a 为一双对影中点的任意一对对偶根 $z_1=a+iy_0$，$z_2=a+i\overline{y_0}$（其中 $y_0\notin R$），由§6 性质 6 则 $z_1=a+iy_0\in \underline{B_a}$，$z_2=a+i\overline{y_0}\in \underline{B_a}$。于是无论 $l\geq 1$ 还是 $l=0$，$\underline{B_a}$ 中元素 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 就是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的以 a，a 为一双对影中点的所有各不相同的成对对偶根，其中 $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根。若 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，由第一章定理 16 推论 2，则

$$L=2\left[\frac{l(l-1)}{2}+\sum_{j=1}^{t}\frac{l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)}{2}+\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}\right]+l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}$$

化简可得 $L=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$。

下面证明 $\overline{K}\leq L$。由于 $l_{j1}\geq 1$，$l_{j2}\geq 1$，则 $l_{j1}(l_{j2}-1)+(l_{j1}-1)l_{j2}\geq 0$，因此 $l_{j1}+l_{j2}\leq 2l_{j1}l_{j2}$ $(j=1,2,\cdots,s)$。由于 $l_j^{(0)}\geq 1$，则 $l_j^{(0)}\left(l_j^{(0)}-1\right)\geq 0$，$l_j^{(0)}\leq\left(l_j^{(0)}\right)^2$ $(j=1,2,\cdots,t)$。于是① $l\geq 1$ 时，$l(l-1)\geq 0$，$l\leq l^2$，故 $\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)\leq l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=L$。② $l=0$ 时，$\overline{K}=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)\leq\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=L$。总之，$\overline{K}\leq L$。】

设 $a\in R$，$y_j^{(0)}\in R$ 且 $y_j^{(0)}\neq 0$，$y_j\notin R$，若 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,t)$，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根，则由 $F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l P(z-a)$ 可知：

1. $z_j=a+iy_j^{(0)}$ $(j=1,2,\cdots,t)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上所有各不相同的非 a 根，由定理 3 证明可知，它们也是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上所有各不相同的非 a 根；

2. $z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ $(j=1,2,\cdots,s)$ 是 $F_m(z-a)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的以 a，a 为一双对影中点的所有各不相同的成对对偶根，由定理 3 的证明可

知，它们也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上但不在直线 $x=a$ 上的以 a， a 为一双对影中点的所有各不相同的成对对偶根。

定理 4 设 $a\in R$， L 为正整数， $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根， $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集 B_a，普通对称的根全集 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$， K， $\overline{K}$，若 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$，则

$$\underline{K}=K=\overline{K}=L，\quad \underline{B_a}=B_a=\overline{B_a}\text{。}$$

于是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根，也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称的全部各不相同的根，还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ (普通)对称的全部根。

证明 由题意根据定理 2，则 $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$， $\underline{K}\le K\le\overline{K}$。

不妨假设 $z_j=a+iy_j^{(0)}\ (j=1,2,\cdots,t)$， $z_{j1}=a+iy_j$， $z_{j2}=a+i\overline{y_j}\ (j=1,2,\cdots,s)$ 是 $P(z-a)=0$ 在 z 平面上的所有各不相同的根($y_j^{(0)}\in R$ 且 $y_j^{(0)}\ne 0$， $y_j\notin R$)，其中 $z_j=a+iy_j^{(0)}$ 是 $f(z)=0$ 的 $l_j^{(0)}$ 重根，$z_{j1}=a+iy_j$，$z_{j2}=a+i\overline{y_j}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_{j1} 重和 l_{j2} 重根，记 $l_j=\min(l_{j2},l_{j2})$， $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根 $(l\ge 0)$，由定理 3，则

1) $l\ge 1$ 时，有 $\underline{K}=1+t+2s$， $K=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$， $\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$；

2) $l=0$ 时，有 $\underline{K}=t+2s$， $K=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j$， $\overline{K}=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)$；

3)由于 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，则 $L=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}$，且 $\overline{K}\le L$。

若 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$，则 $l=0$ 或 1， $l_j^{(0)}=1$， $l_{j1}=l_{j2}=1$， $l_j=\min(l_{j2},l_{j2})=1$，于是

1) $l=1$ 时， $\underline{K}=1+t+2s$， $K=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j=1+t+2s$，而

$\overline{K}=l+\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)=1+t+2s$， $L=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=1+t+2s$，故

$$\underline{K}=K=\overline{K}=L=1+t+2s$$

2) $l=0$ 时，有 $\underline{K}=t+2s$， $K=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+2\sum_{j=1}^{s}l_j=t+2s$，而

$\overline{K}=\sum_{j=1}^{t}l_j^{(0)}+\sum_{j=1}^{s}\left(l_{j1}+l_{j2}\right)=t+2s$， $L=l^2+\sum_{j=1}^{t}\left(l_j^{(0)}\right)^2+2\sum_{j=1}^{s}l_{j1}l_{j2}=t+2s$，故

$$\underline{K}=K=\overline{K}=L=t+2s。$$

总之，无论 $l\geq 1$ 还是 $l=0$，都有 $\underline{K}=K=\overline{K}=L$，又 $\underline{B_a}\subset B_a\subset\overline{B_a}$，故 $\underline{B_a}=B_a=\overline{B_a}$。再由§4，§6，§7 性质 5 即得。】

定理 5 设 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$a\in R$，$L$ 为正整数，$x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$y_j\in C$，若 y_j $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 是方程 $(4)^a$ 的所有复根(或所有各不相同的复根)，则 $K=L$，$z_j=a+iy_j$ $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 既是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 严格对称的全部根，也是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 对称的全部各不相同的根，还是 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ (普通)对称的全部根。

证明 由题设不妨设 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=a$ 单层对称的根全集 $\underline{B_a}$，严格对称的根全集 B_a，普通对称的根全集 $\overline{B_a}$ 的元素个数分别为 $\underline{K}$，K，$\overline{K}$，根据定理 4 和§4 (或§6)定理 2 即得。】

推论 1 设 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$a\in R$，$Q(a)=0$，$y_j\in C$，则 y_j $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有复根的充要条件是：y_j $\left(j=1,2,\cdots,K\right)$ 是 $(4)^a$ 的所有各不相同的复根。

证明 由题设不妨设 $x=a$ 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，则 L 为正整数，根据定理 5，必要性和充分性可分别再由§6 和§4 定理 2 即得。】

推论 2 设 $\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$a\in R$，$Q(a)=0$，则 $(4)^a$ 的所有复根各不相等。

证明由推论 1 即得。】

第三章
方程的实根与共轭复根问题

§1 原方程与实系数多项式方程组的关系

设复系数n次多项式$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$，其中$n\geq 1$，$c_0\neq 0$，$c_j\in C$，$c_j=a_j+ib_j$，$a_j\in R$，$b_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$，且$b_0=0$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$不全为零，$a_0=c_0\neq 0$，$i$为虚数单位，记

$$a(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n\text{，}\quad b(z)=b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}z+b_n$$

则$a(z)$和$b(z)$均为实系数多项式，且有

$$f(z)=a(z)+ib(z) \tag{1}^{\#}$$

其中$a(z)$是次数为n的多项式，$b(z)$是非零多项式。由$(1)^{\#}$可得多项式方程组

$$\begin{cases}a(z)=0\\ b(z)=0\end{cases} \tag{2}^{\#}$$

且称$(1)^{\#}$是方程$f(z)=0$与方程组$(2)^{\#}$的多项式关系式。

§2 方程组解的性质与最大公因式方程根的性质

显然，z_0是$(2)^{\#}$的解的充要条件是：$(z-z_0)|a(z)$且$(z-z_0)|b(z)$；z_0是$(2)^{\#}$的l重解的充要条件是：$(z-z_0)^l|a(z)$且$(z-z_0)^l|b(z)$，但$(z-z_0)^{l+1}$不能同时整除$a(z),b(z)$。

$a(z)$, $b(z)$都是非零多项式，$(2)^{\#}$所有复数解(含重解)组成的集合可记作$\sqrt{a(\ )}\cap\sqrt{b(\ )}$，它是方程$a(z)=0$所有复根组成的根集合与方程$b(z)=0$所有复根组成的集合的交集。

交集$\sqrt{a(\ )}\cap\sqrt{b(\ )}$的**本质特征**是：设$z_0\in C$，$l,l_1,l_2$均为非负整数，则

$z_0(l)\in\sqrt{a(\ )}\cap\sqrt{b(\ )}\Leftrightarrow z_0(l_1)\in\sqrt{a(\ )}$，$z_0(l_2)\in\sqrt{b(\ )}$，其中$l=\min(l_1,l_2)$。

显然，z_0是$(2)^{\#}$的l重解的充要条件是：$z_0(l)\in\sqrt{a(\ )}\cap\sqrt{b(\ )}$。

设$d(z)$是$a(z)$, $b(z)$的一个实系数最大公因式，则$d(z)$也是非零多项式，方程$d(z)=0$所有复根(含重根)组成的集合可记作$\sqrt{d(\ )}$。

显然，z_0是$d(z)=0$的l重根的充要条件是：$z_0(l)\in\sqrt{d(\ )}$。

下面定理 1 及其推论根据预章定理 2 及其推论即得。

定理 1 设$z_0\in C$，l为非负整数，则

1) z_0是$(2)^{\#}$的解的充要条件是：z_0是$d(z)=0$的根；

2) z_0是$(2)^{\#}$的l重解的充要条件是：z_0是$d(z)=0$的l重根。

推论 1 $(2)^{\#}$所有复数解(含重解)组成的集合与$d(z)=0$所有复根(含重根)组成的集合是两个相等的集合，即$\sqrt{a(\ )}\cap\sqrt{b(\ )}=\sqrt{d(\ )}$，于是$d(z)=0$的所有复根就是$(2)^{\#}$的所有复数解。

推论 2 设$(2)^{\#}$复数解(含重解)的个数为$K^{\#}$，$d(z)$的次数为n_1，则$K^{\#}=n_1$，故$(2)^{\#}$在z平面上有解的充要条件是：$n_1\geq 1$。

推论 3 $(2)^{\#}$在z平面上无解的充要条件是：$(a(z),b(z))=1$。

推论 4 设$z_0\in C$，l,l_1,l_2均为非负整数，则

$z_0(l)\in\sqrt{d(\ )}\Leftrightarrow z_0(l_1)\in\sqrt{a(\ )}$，$z_0(l_2)\in\sqrt{b(\ )}$，其中$l=\min(l_1,l_2)$。

$d(z)=0$根的**性质** $d(z)=0$是实系数代数方程，由第一篇第二章§2 性质及推论，它

的根具有下面的性质及推论。

性质 设$z_0 \in C$，若z_0是$d(z)=0$的根，则$\overline{z_0}$也是$d(z)=0$的根。

推论 1 设$z_0 \in C$，则z_0是$d(z)=0$的根的充要条件是：$\overline{z_0}$是$d(z)=0$的根。

推论 2 设$z_0 \in C$，则$(z-z_0) \mid d(z)$的充要条件是：$(z-\overline{z_0}) \mid d(z)$。

推论 3 设$z_0 \in C$，l为非负整数，则$(z-z_0)^l \mid d(z)$的充要条件是：$(z-\overline{z_0})^l \mid d(z)$。

推论 4 设$z_0 \in C$，l为非负整数，则

z_0是$d(z)=0$的l重根的充要条件是：$\overline{z_0}$是$d(z)=0$的l重根。

推论 5 设$z_0 \notin R$，l为非负整数，z_0，$\overline{z_0}$是$d(z)=0$的一对l重共轭复根的充要条件是：$(z-z_0)^l(z-\overline{z_0})^l \mid d(z)$，但$(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1}$不能整除$d(z)$。

$(2)^{\#}$解的**性质** $(2)^{\#}$解的性质及推论与第二章$(2)^a$的性质及其推论本质上相同。

性质 设$z_0 \in C$，若z_0是方程组$(2)^{\#}$的解，则$\overline{z_0}$也是方程组$(2)^{\#}$的解。

推论 1 设$z_0 \in C$，则z_0是$(2)^{\#}$的解的充要条件是：$\overline{z_0}$是$(2)^{\#}$的解。

推论 2 设$z_0 \in C$，则$(z-z_0) \mid a(z)$且$(z-z_0) \mid b(z)$的充要条件是$(z-\overline{z_0}) \mid a(z)$且$(z-\overline{z_0}) \mid b(z)$。

推论 3 设$z_0 \in C$，l为非负整数，则

$(z-z_0)^l \mid a(z)$且$(z-z_0)^l \mid b(z)$的充要条件是：$(z-\overline{z_0})^l \mid a(z)$且$(z-\overline{z_0})^l \mid b(z)$。

推论 4 设$z_0 \in C$，l为非负整数，则

z_0是$(2)^{\#}$的l重解的充要条件是：$\overline{z_0}$是$(2)^{\#}$的l重解。

推论 5 设$z_0 \notin R$，l为非负整数，则z_0，$\overline{z_0}$是$(2)^{\#}$的一对l重共轭复数解的充要条件是：$(z-z_0)^l(z-\overline{z_0})^l \mid a(z)$且$(z-z_0)^l(z-\overline{z_0})^l \mid b(z)$，但$(z-z_0)^{l+1}(z-\overline{z_0})^{l+1}$不能同时整除$a(z),b(z)$。

定理 2 设$z_0 \notin R$，l为非负整数，则 1) z_0，$\overline{z_0}$是$(2)^{\#}$的一对共轭复数解的充要条件是：z_0，$\overline{z_0}$是$d(z)=0$的一对共轭复根；2) z_0，$\overline{z_0}$是$(2)^{\#}$的一对l重共轭复数解的充要条件是：z_0，$\overline{z_0}$是$d(z)=0$的一对l重共轭复根。

证明 由定理 1 即得。】

推论 设$x_0 \in R$，$y_0 \in R$且$y_0 \neq 0$，l为非负整数，则 1) $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$是

$(2)^{\#}$ 的一对共轭复数解的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $d(z)=0$ 的一对共轭复根；2) $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $(2)^{\#}$ 的一对 l 重共轭复数解的充要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $d(z)=0$ 的一对 l 重共轭复根。

证明 由题意根据定理 2 即得。】

定理 3 设 $\begin{cases} a(z) = a^*(z)d(z) \\ b(z) = b^*(z)d(z) \end{cases}$，则 $\begin{cases} a^*(z) = 0 \\ b^*(z) = 0 \end{cases}$ 无解，$\left(a^*(z), b^*(z)\right) = 1$。

证明 $d(z)$ 是 $a(z), b(z)$ 的最大公因式，根据预章定理 5 即得。】

§3 原方程根与方程组解及最大公因式方程根的关系

定理 4 设 $x_0 \in R$，则 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$z_0 = x_0$ 是 $(2)^{\#}$ 的实数解。

证明 $a(z), b(z)$ 均为实系数多项式，$x_0 \in R$，$f(x_0)=a(x_0)+ib(x_0)$，$a(x_0)$ 和 $b(x_0)$ 均为实数，故 $f(x_0)=0$ 的充要条件是：$a(x_0)=0$ 且 $b(x_0)=0$。于是命题成立。】

若 $(2)^{\#}$ 有解，由定理 1 推论 2，则 $d(z)$ 的次数 $n_1 \geq 1$，$(a(z),b(z)) \neq 1$，可设 $\begin{cases} a(z)=a^*(z)d(z) \\ b(z)=b^*(z)d(z) \end{cases}$，由定理 3，则 $\begin{cases} a^*(z)=0 \\ b^*(z)=0 \end{cases}$ 无解，$(a^*(z),b^*(z))=1$。令 $f^*(z)=a^*(z)+ib^*(z)$，其中 $a^*(z), b^*(z)$ 均为实系数多项式，则有 $f(z)=a(z)+ib(z)=[a^*(z)+ib^*(z)]d(z)=f^*(z)d(z)$，即 $f(z)=f^*(z)d(z)$。

综上所述，若 $(2)^{\#}$ 有解，则 $d(z)$ 的次数 ≥ 1，$f(z)$ 就能分解成复系数多项式 $f^*(z)$ 与实系数多项式 $d(z)$ 的乘积，即 $f(z)=f^*(z)d(z)$。

$f^*(z)$ 性质 1 设 $f^*(z)=a^*(z)+ib^*(z)$，其中 $a^*(z), b^*(z)$ 为实系数多项式，且 $(a^*(z),b^*(z))=1$，则 $f^*(z)=0$ 没有实根，于是若 $x_0 \in R$，$z_0 = x_0$，则 $(z-z_0)$ 不能整除 $f^*(z)$。

证明 用反证法：假如 $f^*(z)=0$ 至少有一个实根，不妨设为 $z_0 = x_0$，其中 $x_0 \in R$，由定理 4，则 $z_0 = x_0$ 是 $\begin{cases} a^*(z)=0 \\ b^*(z)=0 \end{cases}$ 的解，于是 $(z-z_0) \mid a^*(z)$ 且 $(z-z_0) \mid b^*(z)$，与 $(a^*(z),b^*(z))=1$ 矛盾。于是命题成立。】

下面是定理 4 的推论

推论 1 设 $x_0 \in R$，$z_0 = x_0$，l 为非负整数，则 $(z-z_0)^l \mid f(z)$ 的充要条件是：

$$(z-z_0)^l \mid a(z) \text{ 且 } (z-z_0)^l \mid b(z)。$$

证明 当 $l=0$ 时，命题显然成立；当 $l \geq 1$ 时，由 $f(z)=a(z)+ib(z)$，充分性显然成立，再证必要性。若 $(z-z_0)^l \mid f(z)$，$l \geq 1$，$z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根，由定理 4，则 $z_0 = x_0$ 是 $(2)^{\#}$ 的实数解，于是有 $f(z)=f^*(z)d(z)$。

由 $f^*(z)$ 性质 1 则 $(z-z_0)$ 不能整除 $f^*(z)$，$((z-z_0)^l, f^*(z))=1$，故 $(z-z_0)^l \mid d(z)$。$d(z)$ 是 $a(z), b(z)$ 的最大公因式，于是 $(z-z_0)^l \mid a(z)$ 且 $(z-z_0)^l \mid b(z)$。】

推论 2 设 $x_0 \in R$，l 为非负整数，则 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重实根的充要条件是：$z_0 = x_0$ 是 $(2)^{\#}$ 的 l 重实数解。

证明 由题意根据推论 1 即得。】

定理 5 设 $x_0 \in R$，l 为非负整数，则

1) $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$z_0 = x_0$ 是 $d(z)=0$ 的实根。

2) $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重实根的充要条件是：$z_0 = x_0$ 是 $d(z)=0$ 的 l 重实根。

证明 根据定理 1 和定理 4 及其推论 2 即得。】

推论 将由 $f(z)=0$ 和由 $d(z)=0$ 的所有实根(含重根)组成的集合分别记为 A 和 B，则 $A=B$，于是 $d(z)=0$ 的所有实根就是 $f(z)=0$ 的所有实根。

证明 由题设则 A 和 B 是两个允许有重元的有限集合，不妨设 $x_0 \in R$，于是 $\forall$ $z_0 = x_0 \in A$，$x_0 = z_0(l) \in A$，则 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根，且是 l 重根，根据定理 5，则 $z_0 = x_0$ 是 $d(z)=0$ 的 l 重实根，$x_0 = z_0(l) \in B$。反过来，$\forall$ $z_0 = x_0 \in B$，则 $z_0 = x_0$ 是 $d(z)=0$ 的实根，根据定理 5，则 $z_0 = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根，$z_0 = x_0 \in A$。根据预 章定理 1，则 $A=B$，于是命题成立。】

$f(z)=a(z)+ib(z)$ 中的 $a(z),b(z)$ 在 z 平面上任意点 x 的泰勒展开式分别为

$$a(z)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n+\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\cdots+\frac{a'(x)}{1!}(z-x)+a(x)$$

$$b(z)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}(z-x)^{n-2}+\cdots+\frac{b'(x)}{1!}(z-x)+b(x)$$

设 $z-x=y$，则有

$$a(x+y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+\frac{a'(x)}{1!}y+a(x)$$

$$b(x+y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\cdots+\frac{b'(x)}{1!}y+b(x)$$

并记 $A_0(x,y)=\dfrac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\dfrac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{a^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$

$$A_1(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{a^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

$$B_0(x,y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{b^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

$$B_1(x,y)=\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\frac{b^{(n-6)}(x)}{(n-6)!}y^{n-6}+\cdots$$

于是 $a(x+y)=A_0(x,y)+A_1(x,y)$， $b(x+y)=B_0(x,y)+B_1(x,y)$，其中 $A_0(x,y)$， $A_1(x,y)$， $B_0(x,y)$， $B_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式。令 $A_0(x,iy)=i^n a_0(x,y)$， $A_1(x,iy)=i^{n-1}a_1(x,y)$； $B_0(x,iy)=i^{n-1}b_0(x,y)$， $B_1(x,iy)=i^{n-2}b_1(x,y)$，则

$$a_0(x,y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n-\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{a^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}-\cdots$$

$$a_1(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{a^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots$$

$$b_0(x,y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{b^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}-\cdots$$

$$b_1(x,y)=\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\frac{b^{(n-6)}(x)}{(n-6)!}y^{n-6}-\cdots$$

其中 $a_0(x,y)$， $a_1(x,y)$， $b_0(x,y)$， $b_1(x,y)$ 均为实系数二元多项式，为 y 的奇偶函数，并且

$$a(x+iy)=A_0(x,iy)+A_1(x,iy)=i^n a_0(x,y)+i^{n-1}a_1(x,y)=i^n\left[a_0(x,y)-ia_1(x,y)\right]$$

$$b(x+iy)=B_0(x,iy)+B_1(x,iy)=i^{n-1}b_0(x,y)+i^{n-2}b_1(x,y)=i^{n-1}\left[b_0(x,y)-ib_1(x,y)\right]$$

观察方程组 $\begin{cases} f_0(x,y)=0 \\ f_1(x,y)=0 \end{cases}$ (2)

其中 $\begin{cases} f_0(x,y)=\dfrac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\dfrac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots \\ f_1(x,y)=\dfrac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\dfrac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}-\dfrac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots \end{cases}$

可发现 $\begin{cases} f_0(x,y)=a_0(x,y)+b_0(x,y) \\ f_1(x,y)=a_1(x,y)+b_1(x,y) \end{cases}$

引理 设 $x_0\in R$， $y_0\in R$ 且 $y_0\neq 0$，则 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是： $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 既是 $a(z)=0$ 的一对共轭复根，又是 $b(z)=0$ 的一对共轭复根。

证明 1) 由题意根据第一章定理 6，则 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是： (x_0,y_0)， $(x_0,-y_0)$ 是方程组(2)的一对实数解。

又(x_0, y_0)，$(x_0,-y_0)$是方程组(2)的一对实数解的充要条件是：

$$\begin{cases} f_0(x_0, y_0)=0 \\ f_0(x_0,-y_0)=0 \\ f_1(x_0, y_0)=0 \\ f_1(x_0,-y_0)=0 \end{cases}$$

2) 由于$\begin{cases} f_0(x, y)=a_0(x, y)+b_0(x, y) \\ f_1(x, y)=a_1(x, y)+b_1(x, y) \end{cases}$，则

① 当$f(z)$的次数n为偶数时，有

$$a_0(x_0,-y_0)=a_0(x_0, y_0)\text{，}\quad a_1(x_0,-y_0)=-a_1(x_0, y_0)$$

$$b_0(x_0,-y_0)=-b_0(x_0, y_0)\text{，}\quad b_1(x_0,-y_0)=b_1(x_0, y_0)$$

则$\begin{cases} f_0(x_0, y_0)=a_0(x_0, y_0)+b_0(x_0, y_0) \\ f_0(x_0,-y_0)=a_0(x_0, y_0)-b_0(x_0, y_0) \\ f_1(x_0, y_0)=a_1(x_0, y_0)+b_1(x_0, y_0) \\ f_1(x_0,-y_0)=-a_1(x_0, y_0)+b_1(x_0, y_0) \end{cases}$

② 当$f(z)$的次数n为奇数时，有

$$a_0(x_0,-y_0)=-a_0(x_0, y_0)\text{，}\quad a_1(x_0,-y_0)=a_1(x_0, y_0)$$

$$b_0(x_0,-y_0)=b_0(x_0, y_0)\text{，}\quad b_1(x_0,-y_0)=-b_1(x_0, y_0)$$

则$\begin{cases} f_0(x_0, y_0)=a_0(x_0, y_0)+b_0(x_0, y_0) \\ f_0(x_0,-y_0)=-a_0(x_0, y_0)+b_0(x_0, y_0) \\ f_1(x_0, y_0)=a_1(x_0, y_0)+b_1(x_0, y_0) \\ f_1(x_0,-y_0)=a_1(x_0, y_0)-b_1(x_0, y_0) \end{cases}$

因此，无论n为偶数还是奇数，都有

$$\begin{cases} f_0(x_0, y_0)=0 \\ f_0(x_0,-y_0)=0 \\ f_1(x_0, y_0)=0 \\ f_1(x_0,-y_0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0(x_0, y_0)=0 \\ b_0(x_0, y_0)=0 \\ a_1(x_0, y_0)=0 \\ b_1(x_0, y_0)=0 \end{cases}$$

3) $a(x+iy)=i^n\left[a_0(x, y)-ia_1(x, y)\right]$，$b(x+iy)=i^{n-1}\left[b_0(x, y)-ib_1(x, y)\right]$

设 $x_0 \in R$， $y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，由 $a_0(x,y)$ 与 $a_1(x,y)$ 关于 y 的奇偶性，则 (x_0,y_0)，$(x_0,-y_0)$ 是 $\begin{cases} a_0(x,y)=0 \\ a_1(x,y)=0 \end{cases}$ 的一对实数解的充要条件是：(x_0,y_0) 是 $\begin{cases} a_0(x,y)=0 \\ a_1(x,y)=0 \end{cases}$ 的解，即 $\begin{cases} a_0(x_0,y_0)=0 \\ a_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$。再根据第一篇第二章定理 7 推论 3，则 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $a(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是：$\begin{cases} a_0(x_0,y_0)=0 \\ a_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$。同理可知， $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $b(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是：$\begin{cases} b_0(x_0,y_0)=0 \\ b_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$。所以 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 既是 $a(z)=0$ 的一对共轭复根，又是 $b(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是：

$$\begin{cases} a_0(x_0,y_0)=0 \\ b_0(x_0,y_0)=0 \\ a_1(x_0,y_0)=0 \\ b_1(x_0,y_0)=0 \end{cases}$$

综合 1) 2) 3)可知，引理成立。】

定理 6 设 $x_0 \in R$， $y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，则 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是： $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $(2)^{\#}$ 的一对共轭复数解。

证明 $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 既是 $a(z)=0$ 的一对共轭复根，又是 $b(z)=0$ 的一对共轭复根的充要条件是： $z_1=x_0+iy_0$， $z_2=x_0-iy_0$ 是 $(2)^{\#}$ 的一对共轭复数解。再由引理即得。】

$f^*(z)$ 性质 2 设 $f^*(z)=a^*(z)+ib^*(z)$，其中 $a^*(z)$, $b^*(z)$ 为实系数多项式，且 $(a^*(z),b^*(z))=1$，则 $f^*(z)=0$ 没有共轭复根，于是若 $x_0 \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 不能同时整除 $f^*(z)$。

证明 用反证法：假如 $f^*(z)=0$ 至少有一对共轭复根，不妨设为 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$（$x_0 \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$)，由定理 6 则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $\begin{cases} a^*(z)=0 \\ b^*(z)=0 \end{cases}$ 的一对共轭复数解，故 $(z-z_1)\mid a^*(z)$ 且 $(z-z_1)\mid b^*(z)$，$(z-z_2)\mid a^*(z)$ 且 $(z-z_2)\mid b^*(z)$，由于 $y_0 \neq 0$， $z_1 \neq z_2$， $((z-z_1),(z-z_2))=1$，于是 $(z-z_1)(z-z_2)\mid a^*(z)$ 且 $(z-z_1)(z-z_2)\mid b^*(z)$，与 $(a^*(z),b^*(z))=1$ 矛盾。于是命题成立。】

定理 7 设 $x_0 \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的一对共轭复根的充分必要条件是：$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $d(z)=0$ 的一对共轭复根。

证明 由定理 6 和定理 2 推论即得。】

定理 8 设 $f(z)= f^*(z)d(z)$，$x_0 \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，l_1, l_2 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，$(z-z_1) \mid f^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $f^*(z)$；2) $l_1 < l_2$ 时，$(z-z_2) \mid f^*(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $f^*(z)$；3) $l_1 = l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $f^*(z)$。

证明 由题设则 $(z-z_1)^{l_1} \mid f(z)$，但 $(z-z_1)^{l_1+1}$ 不能整除 $f(z)$；$(z-z_2)^{l_2} \mid f(z)$，但 $(z-z_2)^{l_2+1}$ 不能整除 $f(z)$；根据 $f^*(z)$ 性质 2，则 $(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 不能同时整除 $f^*(z)$，于是

1) $l_1 > l_2$ 时，$(z-z_1) \mid f^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $f^*(z)$。否则，假如 $(z-z_1)$ 不能整除 $f^*(z)$，则 $\left((z-z_1)^{l_1}, f^*(z)\right)=1$，故 $(z-z_1)^{l_1} \mid d(z)$，由 $d(z)=0$ 根的性质推论 3 则 $\left(z-\overline{z_1}\right)^{l_1} \mid d(z)$。又 $\overline{z_1} = z_2$，于是 $(z-z_2)^{l_1} \mid d(z)$，又 $l_1 \geq l_2 + 1$，故 $(z-z_2)^{l_2+1} \mid d(z)$，$(z-z_2)^{l_2+1} \mid f(z)$，矛盾。

2) $l_1 < l_2$ 时，与 1)同理可证。

3) $l_1 = l_2$ 时，$(z-z_1)$ 和 $(z-z_2)$ 都不能整除 $f^*(z)$。否则，① 假如 $(z-z_1) \mid f^*(z)$，但 $(z-z_2)$ 不能整除 $f^*(z)$，则 $\left((z-z_2)^{l_2}, f^*(z)\right)=1$，故 $(z-z_2)^{l_2} \mid d(z)$，由 $d(z)=0$ 根的性质推论 3 则 $\left(z-\overline{z_2}\right)^{l_2} \mid d(z)$。因 $\overline{z_2} = z_1$，$l_1 = l_2$，则 $(z-z_1)^{l_1} \mid d(z)$。再由 $(z-z_1) \mid f^*(z)$ 则 $(z-z_1)^{l_1+1} \mid f(z)$，矛盾。② 假如 $(z-z_2) \mid f^*(z)$，但 $(z-z_1)$ 不能整除 $f^*(z)$，则与①同理可得 $(z-z_2)^{l_2+1} \mid f(z)$，矛盾。】

定理 9 设 $(2)^{\#}$ 有解，$x_0 \in R$，$y_0 \in R$ 且 $y_0 \neq 0$，l_1, l_2 均为非负整数，若 $z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 1) $l_1 > l_2$ 时，$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $d(z)=0$ 的一对 l_2 重共轭复根，$z_1 = x_0 + iy_0$ 是 $f^*(z)=0$ 的 $l_1 - l_2$ 重根；2) $l_1 < l_2$ 时，$z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $d(z)=0$ 的一对 l_1 重共轭复根，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是方程 $f^*(z)=0$ 的 $l_2 - l_1$ 重根；3) $l_1 = l_2$ 时，记 $l_1 = l_2 = l$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$，$z_2 = x_0 - iy_0$ 是 $d(z)=0$ 的一对 l 重共轭复根，$z_1 = x_0 + iy_0$ 和 $z_2 = x_0 - iy_0$ 都不是 $f^*(z)=0$ 的根。

证明 由于$(2)^{\#}$有解，则有$f(z)=f^{*}(z)d(z)$。再由题意根据定理 8，那么

1) $l_1>l_2$时，则$(z-z_1)\mid f^{*}(z)$，但$(z-z_2)$不能整除$f^{*}(z)$，则z_2不是$f^{*}(z)=0$的根，于是$z_2=x_0-iy_0$是$d(z)=0$的l_2重根，因$\overline{z_2}=z_1$，由$d(z)=0$根的性质推论 4，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$d(z)=0$的一对l_2重的共轭复根。$z_1=x_0+iy_0$分别是$f(z)=0$的l_1重根，$d(z)=0$的l_2重根，于是$z_1=x_0+iy_0$是$f^{*}(z)=0$的l_1-l_2重根。

2) $l_1<l_2$时，与 1)同理可证。

3) $l_1=l_2$时，$(z-z_1)$和$(z-z_2)$都不能整除$f^{*}(z)$，则z_1和z_2都不是$f^{*}(z)=0$的根。又$l_1=l_2=l$，故$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$d(z)=0$的一对l重共轭复根。】

推论 设$(2)^{\#}$有解，$x_0\in R$，$y_0\in R$且$y_0\neq 0$，l_1,l_2,l均为非负整数，$z_1=x_0+iy_0$和$z_2=x_0-iy_0$分别是$f(z)=0$的l_1重和l_2重根，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$d(z)=0$的一对l重共轭复根的充要条件是：$l=\min(l_1,l_2)$。

证明 根据定理 9，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$是$d(z)=0$的一对l重共轭复根$\Leftrightarrow$ $l_1>l_2$时，$l=l_2$；$l_1<l_2$时，$l=l_1$；$l_1=l_2$时，$l=l_1=l_2 \Leftrightarrow l=\min(l_1,l_2)$。】

综合上述结论，我们称$a(z), b(z)$的最大公因式方程$d(z)=0$为复系数代数方程$f(z)=0$的实根和共轭复根方程。

§4 方程组的解和结式方程的根

对于方程 $d(z)=0$ 的求解方法，实系数代数方程统一解法原理已作全面介绍，不再赘述。本节仅就复系数代数方程 $f(z)=0$ 统一解法原理研究的需要，对与 $d(z)=0$ 相关问题作必要阐述。

设 $d(z)=d_0z^{n_1}+d_1z^{n_1-1}+\cdots+d_{n_1-1}z+d_{n_1}$，其中 $1\le n_1<n$，$d_0\ne 0$，$d_0,d_1,\cdots,d_{n_1}$ 均为实数。令 $d_0(x,y)=\dfrac{d^{(n_1)}(x)}{n_1!}y^{n_1}-\dfrac{d^{(n_1-2)}(x)}{(n_1-2)!}y^{n_1-2}+\dfrac{d^{(n_1-4)}(x)}{(n_1-4)!}y^{n_1-4}-\cdots$

$$d_1(x,y)=\frac{d^{(n_1-1)}(x)}{(n_1-1)!}y^{n_1-1}-\frac{d^{(n_1-3)}(x)}{(n_1-3)!}y^{n_1-3}+\frac{d^{(n_1-5)}(x)}{(n_1-5)!}y^{n_1-5}-\cdots$$

其中 $\dfrac{d^{(n_1)}(x)}{n_1!}=d_0\ne 0$，令 $z=x+iy$，则

$$d(x+iy)=i^{n_1}d_0(x,y)+i^{n_1-1}d_1(x,y)=i^{n_1}\left[d_0(x,y)-id_1(x,y)\right] \qquad (1)_d$$

可得实系数的二元多项式方程组

$$\begin{cases}d_0(x,y)=0\\ d_1(x,y)=0\end{cases} \qquad (2)_d$$

其中 $d_0(x,y),d_1(x,y)$ 一个为 y 的偶函数，另一个为 y 的奇函数。

将 $d_0(x,y),d_1(x,y)$ 关于 y 的结式，记为 $res(d_0,d_1,y)=Q_d(x)$，则

$$Q_d(x)=\begin{vmatrix}
\frac{d^{(n_1)}(x)}{n_1!} & 0 & -\frac{d^{(n_1-2)}(x)}{(n_1-2)!} & 0 & \frac{d^{(n_1-4)}(x)}{(n_1-4)!} & \cdots\cdots & & & \\
 & \frac{d^{(n_1)}(x)}{n_1!} & 0 & -\frac{d^{(n_1-2)}(x)}{(n_1-2)!} & 0 & \frac{d^{(n_1-4)}(x)}{(n_1-4)!} & \cdots\cdots & & \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
 & & & \frac{d^{(n_1)}(x)}{n_1!} & 0 & -\frac{d^{(n_1-2)}(x)}{(n_1-2)!} & 0 & \frac{d^{(n_1-4)}(x)}{(n_1-4)!} & \cdots \\
\frac{d^{(n_1-1)}(x)}{(n_1-1)!} & 0 & -\frac{d^{(n_1-3)}(x)}{(n_1-3)!} & 0 & \frac{d^{(n_1-5)}(x)}{(n_1-5)!} & \cdots\cdots & & & \\
 & \frac{d^{(n_1-1)}(x)}{(n_1-1)!} & 0 & -\frac{d^{(n_1-3)}(x)}{(n_1-3)!} & 0 & \frac{d^{(n_1-5)}(x)}{(n_1-5)!} & \cdots\cdots & & \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \\
 & & & \frac{d^{(n_1-1)}(x)}{(n_1-1)!} & 0 & -\frac{d^{(n_1-3)}(x)}{(n_1-3)!} & 0 & \frac{d^{(n_1-5)}(x)}{(n_1-5)!} & \cdots
\end{vmatrix}$$

这是一个 $2n_1-1$ 阶行列式，展开后是 x 的实系数多项式，次数为 n_1^2。可设

$$Q_d(x)=D_0x^{n_1^2}+D_1x^{n_1^2-1}+\cdots+D_{n_1^2-1}x+D_{n_1^2}$$

其中$D_0\neq 0$，$D_0,D_1,\cdots,D_{n_1^2}$均为实数。当$d(z)$的次数$n_1=1$时，$Q_d(x)=d(x)$；当$n_1\geq 2$时，不妨设$d(z)=0$所有成对复根的中点方程为

$$M_d(x)=E_0x^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}}+E_1x^{\frac{n_1(n_1-1)}{2}-1}+\cdots+E_{\frac{n_1(n_1-1)}{2}-1}x+E_{\frac{n_1(n_1-1)}{2}}=0$$

其中$E_0\neq 0$，$E_0,E_1,\cdots,E_{\frac{n_1(n_1-1)}{2}}$均为实数。根据第一篇第六章§1 定理 1 推论 1，则有

$Q_d(x)=\pm d(x)M_d^2(x)$，即$Q_d(x)=d(x)M_d^2(x)$或者$Q_d(x)=-d(x)M_d^2(x)$。

方程组$(2)_d$解的性质与第一篇第二章方程组(2)解的性质相同，不再赘述。

定理 10 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，若(x_0,y_0)是方程组$(2)_d$的解，则(x_0,y_0)也是方程组(2)的解。

证明 若(x_0,y_0)是$(2)_d$的解，则$(x_0,-y_0)$，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$，$(\overline{x_0},-\overline{y_0})$都是$(2)_d$的解，由第一篇第二章定理 5，则$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$都是$d(z)=0$的根，由定理 1，则它们都是$(2)^\#$的解，于是有$f(z)=f^*(z)d(z)$，于是$z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$，$\overline{z_1}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$都是$f(z)=0$的根。那么

1) 当$x_0\notin R$或$y_0\notin R$时，$z_1=x_0+iy_0$，$\overline{z_2}=\overline{x_0}+i\overline{y_0}$是$f(z)=0$的一对对偶复根，由第一章定理 7，则$(x_0,y_0)$，$(\overline{x_0},\overline{y_0})$是(2)的一对对偶复数解，于是命题成立。

2) 当$x_0\in R$且$y_0\in R$时，$z_1=x_0+iy_0$是$f(z)=0$在z平面直线$x=x_0$上的根，由第一章定理 6，则(x_0,y_0)是(2)的实数解。命题也成立。】

定义 设$x_0\in C$，$y_0\in C$，l为非负整数，若(x_0,y_0)是方程组$(2)_d$所有复数解(含相同解)组成的集合的一个l重元素，则称(x_0,y_0)是$(2)_d$的一个l重(复数)解。

定理 11 设$x_0\in C$，$Q_d(x_0)=0$，则由方程组$(2)_d$所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解(含相同解)组成的集合是由方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合$\{(x,y)\}$中$x=x_0$的全部解(含相同解)组成的集合的子集，即

$$\left\{(x_0,y)\,|\begin{cases}d_0(x,y)=0\\ d_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ \ (2)_d\right\}\subset\left\{(x_0,y)\,|\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

证明 由$x_0\in C$，$Q_d(x_0)=0$，根据第一篇第二章定理 15 和定理 5，则至少存在一个复数y_0，使(x_0,y_0)是方程组$(2)_d$的解，$z_0=x_0+iy_0$是$d(z)=0$的根，由定理 1，则z_0是

$(2)^{\#}$的解，于是有 $f(z)=f^{*}(z)d(z)$。记

$$A=\left\{(x_0,y)\mid\begin{cases}d_0(x,y)=0\\d_1(x,y)=0\end{cases}\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)_d\right\},$$

$$B=\left\{(x_0,y)\mid\begin{cases}f_0(x,y)=0\\f_1(x,y)=0\end{cases}\ (x\in C,y\in C)\ \ (2)\right\}$$

则 A 是由 $(2)_d$ 所有复数解组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解组成的集合，B 是由(2)所有复数解组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解组成的集合，A 和 B 都是允许有重元的有限集合。对 $\forall\left(x_0,y_{j_0}\right)\in A$，$\left(x_0,y_{j_0}\right)(l)\in A$，则 $l\geq 1$，$\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是 $(2)_d$ 的一个解，且 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是 $(2)_d$ 的 l 重解，那么

1. 当 $x_0\in R$ 且 $y_{j_0}\in R$ 时，1) 若 $y_{j_0}\neq 0$，则 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$，$\left(x_0,-y_{j_0}\right)$ 都是 $(2)_d$ 的解，$z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=x_0-iy_{j_0}$ 都是 $d(z)=0$ 的根，不妨设 $z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=x_0-iy_{j_0}$ 是 $d(z)=0$ 的一对 l_{j_0} 重共轭复根，且 $z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=x_0-iy_{j_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 $l_{j_0 1}$ 重和 $l_{j_0 2}$ 重根，则 $l_{j_0}\geq 1$。由于 $(2)^{\#}$ 有解，由定理 9 推论则 $l_{j_0}=\min\left(l_{j_0 1},l_{j_0 2}\right)$；由第一篇第二章定理 16 推论 5，则 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 和 $\left(x_0,-y_{j_0}\right)$ 都是 $(2)_d$ 的 $l_{j_0}^2$ 重解，于是 $l_{j_0}^2=l$。

由于 $z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的 $l_{j_0 1}$ 重根，由本篇第一章定理 16 推论 3，则 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是(2)的 $l_{j_0 1}^2$ 重实数解，故 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是(2)所有复数解组成的集合的 $l_{j_0 1}^2$ 重元素，因而也是 B 的 $l_{j_0 1}^2$ 重元素。由 $l_{j_0}=\min\left(l_{j_0 1},l_{j_0 2}\right)$，则 $l_{j_0 1}\geq l_{j_0}\geq 1$，$l_{j_0 1}^2\geq l_{j_0}^2=l$，故 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $\left(x_0,y_{j_0}\right)(\geq l)\in B$。

2) 若 $y_{j_0}=0$，则 $(x_0,0)$ 是 $(2)_d$ 的解，$z_0=x_0$ 是 $d(z)=0$ 的实根，不妨设 $z_0=x_0$ 是 $d(z)=0$ 的 l_{j_0} 重根，则 $l_{j_0}\geq 1$，由第一篇第二章定理 16 推论 3，则 $(x_0,0)$ 是 $(2)_d$ 的 $l_{j_0}^2$ 重解，于是 $l_{j_0}^2=l$；由本章定理 5，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l_{j_0} 重根，由本篇第一章定理 16 推论 3，则 $(x_0,0)$ 是(2)的 $l_{j_0}^2$ 重实数解，又 $l_{j_0}^2=l$，故 $(x_0,0)$ 是(2)所有复数解组成的集合的 l 重元素，因而 $(x_0,0)$ 也是 B 的 l 重元素，即 $(x_0,0)(l)\in B$。

2. 当 $x_0\notin R$ 或 $y_{j_0}\notin R$ 时，1) 若 $y_{j_0}\neq 0$，则 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$，$\left(x_0,-y_{j_0}\right)$，$\left(\overline{x_0},\overline{y_{j_0}}\right)$，$\left(\overline{x_0},-\overline{y_{j_0}}\right)$ 都是 $(2)_d$ 的解，$z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$，$z_{j_0 2}=x_0-iy_{j_0}$，$\overline{z_{j_0 2}}=\overline{x_0}+i\overline{y_{j_0}}$，$\overline{z_{j_0 1}}=\overline{x_0}-i\overline{y_{j_0}}$ 都是 $d(z)=0$

的根。不妨设 $z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$ 和 $\overline{z_{j_0 1}}=\overline{x_0}-i\overline{y_{j_0}}$ 都是 $d(z)=0$ 的 l_1 重根，$z_{j_0 2}=x_0-iy_{j_0}$ 和 $\overline{z_{j_0 2}}=\overline{x_0}+i\overline{y_{j_0}}$ 都是 $d(z)=0$ 的 l_2 重根，则 $l_1\ge 1$，$l_2\ge 1$。于是 $z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$ 和 $z_{j_0 2}=x_0-iy_{j_0}$ 分别是 $d(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，由第一篇第二章定理 16 推论 4，则 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 和 $\left(x_0,-y_{j_0}\right)$ 都是 $(2)_d$ 的 l_1l_2 重解，于是 $l_1l_2=l$。

又 $f(z)=f^*(z)d(z)$，不妨设 $z_{j_0 1}=x_0+iy_{j_0}$ 和 $\overline{z_{j_0 2}}=\overline{x_0}+i\overline{y_{j_0}}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 $l_{j_0 1}$ 重和 $l_{j_0 2}$ 重根，则 $l_{j_0 1}\ge l_1\ge 1$，$l_{j_0 2}\ge l_2\ge 1$，由本篇第一章定理 16 推论 4 则 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 和 $\left(\overline{x_0},\overline{y_{j_0}}\right)$ 都是(2)的 $l_{j_0 1}l_{j_0 2}$ 重解，故 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是(2)所有复数解组成的集合的 $l_{j_0 1}l_{j_0 2}$ 重元素，因而也是 B 的 $l_{j_0 1}l_{j_0 2}$ 重元素，$l_{j_0 1}l_{j_0 2}\ge l_1l_2=l$，故 $\left(x_0,y_{j_0}\right)$ 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $\left(x_0,y_{j_0}\right)(\ge l)\in B$。

2) 若 $y_{j_0}=0$，则 $x_0\notin R$，$(x_0,0)$ 和 $\left(\overline{x_0},0\right)$ 都是 $(2)_d$ 的解，$z_{j_0 1}=x_0$ 和 $\overline{z_{j_0 1}}=\overline{x_0}$ 都是 $d(z)=0$ 的根。不妨设 $z_{j_0 1}=x_0$ 和 $\overline{z_{j_0 1}}=\overline{x_0}$ 都是 $d(z)=0$ 的 l_0 重根，则 $l_0\ge 1$，由第一篇第二章定理 16 推论 3，则 $(x_0,0)$ 是 $(2)_d$ 的 l_0^2 重解，于是 $l_0^2=l$。

又 $f(z)=f^*(z)d(z)$，不妨设 $z_{j_0 1}=x_0$ 和 $\overline{z_{j_0 1}}=\overline{x_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_1\ge l_0\ge 1$，$l_2\ge l_0\ge 1$，由本篇第一章定理 16 推论 4，则 $(x_0,0)$ 和 $\left(\overline{x_0},0\right)$ 都是(2)的 l_1l_2 重解，故 $(x_0,0)$ 是(2)所有复数解组成的集合的 l_1l_2 重元素，因而也是 B 的 l_1l_2 重元素，$l_1l_2\ge l_0^2=l$，故 $(x_0,0)$ 是 B 的 l 重以上(含 l 重)元素，即 $(x_0,0)(\ge l)\in B$。

综合以上分析，$\forall\left(x_0,y_{j_0}\right)\in A$，$\left(x_0,y_{j_0}\right)(l)\in A\Rightarrow\left(x_0,y_{j_0}\right)(\ge l)\in B$，故 $A\subset B$，即 $\left\{(x_0,y)\middle|\begin{cases}d_0(x,y)=0\\ d_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ (2)_d\right\}\subset\left\{(x_0,y)\middle|\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ (2)\right\}$。】

推论 设 $x_0\in C$，$Q_d(x_0)=0$，方程组 $(2)_d$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L_d，方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L，则 $L_d\le L$。

证明 由题设，则 $\left\{(x_0,y)\middle|\begin{cases}d_0(x,y)=0\\ d_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ (2)_d\right\}$ 的元素个数为 L_d，$\left\{(x_0,y)\middle|\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ (2)\right\}$ 的元素个数为 L，由定理 11，则

$$\left\{(x_0,y)\middle|\begin{cases}d_0(x,y)=0\\ d_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ (2)_d\right\}\subset\left\{(x_0,y)\middle|\begin{cases}f_0(x,y)=0\\ f_1(x,y)=0\end{cases}(x\in C,y\in C)\ (2)\right\}。$$

于是 $L_d \le L$ 。】

定理 12 设 $x_0 \in C$，若 x_0 是 $Q_d(x)=0$ 的根，则 x_0 也是 $Q(x)=0$ 的根。

证明 若 x_0 是 $Q_d(x)=0$ 的根，由第一篇第二章定理 15，则至少存在一个复数 y_0，使 (x_0,y_0) 是方程组 $(2)_d$ 的解，由定理 10，则 (x_0,y_0) 是方程组(2)的解，由本篇第一章定理 15，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的根。】

推论 1 设 $x_0 \in C$，L_d 为正整数，若 x_0 是 $Q_d(x)=0$ 的 L_d 重根，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L_d 重以上根。

证明 由于 x_0 是 $Q_d(x)=0$ 的 L_d 重根，由第一篇第二章定理 16 推论 1，则方程组 $(2)_d$ 所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L_d 。

不妨设方程组(2)所有复数解(含相同解)组成的集合 $\{(x,y)\}$ 中 $x=x_0$ 的全部解的个数为 L，由定理 11 推论，则 $L_d \le L$；由第一章定理 16 推论 1，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L 重根，$L \ge L_d$，故 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 L_d 重以上根。】

推论 2 $\sqrt{Q_d(\ )} \subset \sqrt{Q(\ )}$。

证明 $\forall\ x_0 \in \sqrt{Q_d(\ )}$，$x_0(l) \in \sqrt{Q_d(\ )}$，则 x_0 是 $Q_d(x)=0$ 的任意一个根，且是 l 重根，由推论 1，则 x_0 是 $Q(x)=0$ 的 l 重以上根，于是 $x_0(\ge l) \in \sqrt{Q(\ )}$，即由

$$\forall\ x_0 \in \sqrt{Q_d(\ )},\quad x_0(l) \in \sqrt{Q_d(\ )} \Rightarrow x_0(\ge l) \in \sqrt{Q(\ )}$$

因此，$\sqrt{Q_d(\ )} \subset \sqrt{Q(\ )}$。】

定理 13 设 $\deg\ f(z)=n$，$\deg\ d(z)=n_1 \ge 1$，$n_1 < n$，则存在实系数 $n^2-n_1^2$ 次多项式 $h(x)$ 满足 $Q(x)=Q_d(x)h(x)$。

证明 由题设则 $Q(x)$ 和 $Q_d(x)$ 是次数分别为 n^2 和 n_1^2 实系数多项式，由定理 12 推论 2，则 $\sqrt{Q_d(\ )} \subset \sqrt{Q(\ )}$，由总根号性质 3，则命题成立。】

推论 设 $\deg\ d(z) \ge 1$，则存在次数 >1 的实系数多项式 $h(x)$ 满足 $Q(x)=Q_d(x)h(x)$，其中 $\deg\ d(z)=1$ 时，$Q(x)=d(x)h(x)$；$\deg\ d(z) \ge 2$ 时，$Q(x)=\pm d(x)M_d^2(x)h(x)$。

证明 设 $\deg\ d(z) \ge 1$，则 $\deg\ f(z) \ge 2$，其中 $\deg\ d(z)=1$ 时，$Q_d(x)=d(x)$；$\deg\ d(z) \ge 2$ 时，$Q_d(x)=\pm d(x)M_d^2(x)$，故由定理 13 即得。】

§5 原方程的共轭方程

复系数多项式 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ 和 $\overline{f}(z)=\overline{c_0}z^n+\overline{c_1}z^{n-1}+\cdots+\overline{c_{n-1}}z+\overline{c_n}$ 其中 $n\geq 1$，$c_0\neq 0$，$c_j\in C$，$c_j=a_j+ib_j$，$a_j\in R$，$b_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$，且 $b_0=0$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零，$a_0=c_0\neq 0$，i 为虚数单位，$\overline{c_j}$ 为 c_j 的共轭复数，则称 $f(z)$ 和 $\overline{f}(z)$ 互为共轭多项式，即 $\overline{f}(z)$ 是 $f(z)$ 的共轭多项式，$f(z)$ 是 $\overline{f}(z)$ 的共轭多项式；称 $f(z)=0$ 和 $\overline{f}(z)=0$ 互为共轭方程，即 $\overline{f}(z)=0$ 是 $f(z)=0$ 的共轭方程，$f(z)=0$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的共轭方程。

由于 $c_j=a_j+ib_j$，$\overline{c_j}=a_j-ib_j$，令

$$a(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n,\quad b(z)=b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}z+b_n$$

则 $a(z)$ 和 $b(z)$ 均为实系数多项式，且 $f(z)=a(z)+ib(z)$，$\overline{f}(z)=a(z)-ib(z)$

$d(z)$ 是 $a(z), b(z)$ 的最大公因式的充要条件是：$d(z)$ 是 $a(z), -b(z)$ 的最大公因式。于是 $f(z)=0$ 和 $\overline{f}(z)=0$ 具有相同的实根与共轭复根方程 $d(z)=0$，还有相同的方程组 $(2)^{\#}$。

若 $(2)^{\#}$ 有解，则 $d(z)$ 的次数 ≥ 1，$f(z)=f^*(z)d(z)$，$\overline{f}(z)=\overline{f^*}(z)d(z)$，其中 $f^*(z)$ 和 $\overline{f^*}(z)$ 互为共轭多项式，$f^*(z)=a^*(z)+ib^*(z)$，$\overline{f^*}(z)=a^*(z)-ib^*(z)$，$a^*(z), b^*(z)$ 为实系数多项式，且 $(a^*(z),b^*(z))=1$。

共轭多项式的**性质** 共轭多项式的导数仍然是共轭多项式。

证明 $f(z)=a(z)+ib(z)$ 和 $\overline{f}(z)=a(z)-ib(z)$ 互为共轭多项式，它们的导数分别为 $f'(z)=a'(z)+ib'(z)$ 和 $\overline{f}'(z)=a'(z)-ib'(z)$，仍然是互为共轭多项式。】

$\overline{f}(z)$，$a(z)$，$b(z)$ 在 z 平面上的任意点 x 的泰勒展开式分别为：

$$\overline{f}(z)=\frac{\overline{f}^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n+\frac{\overline{f}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\cdots+\frac{\overline{f}'(x)}{1!}(z-x)+\overline{f}(x);$$

$$a(z)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}(z-x)^n+\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\cdots+\frac{a'(x)}{1!}(z-x)+a(x);$$

$$b(z)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(z-x)^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}(z-x)^{n-2}+\cdots+\frac{b'(x)}{1!}(z-x)+b(x).$$

其中 $\dfrac{\overline{f}^{(n)}(x)}{n!}=\dfrac{a^{(n)}(x)}{n!}=a_0\neq 0$，$\dfrac{\overline{f}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}=\dfrac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}-i\dfrac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}$，…，$\dfrac{\overline{f}'(x)}{1!}=\dfrac{a'(x)}{1!}-i\dfrac{b'(x)}{1!}$，

$\overline{f}(x)=a(x)-ib(x)$，并且$\dfrac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}=b_1$。令$z-x=y$，则$\overline{f}(x+y)=a(x+y)-ib(x+y)$，其中

$$\overline{f}(x+y)=\frac{\overline{f}^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{\overline{f}^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+\frac{\overline{f}'(x)}{1!}y+\overline{f}(x);$$

$$a(x+y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\cdots+\frac{a'(x)}{1!}y+a(x);$$

$$b(x+y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\cdots+\frac{b'(x)}{1!}y+b(x)$$

记

$$A_0(x,y)=\frac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n+\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{a^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$$

$$A_1(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{a^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

$$B_0(x,y)=\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\frac{b^{(n-5)}(x)}{(n-5)!}y^{n-5}+\cdots$$

$$B_1(x,y)=\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\frac{b^{(n-6)}(x)}{(n-6)!}y^{n-6}+\cdots$$

于是$a(x+y)=A_0(x,y)+A_1(x,y)$；$b(x+y)=B_0(x,y)+B_1(x,y)$，其中$A_0(x,y)$，$A_1(x,y)$，$B_0(x,y)$，$B_1(x,y)$均为实系数二元多项式。

令$\overline{F_0}(x,y)=A_0(x,y)-iB_0(x,y)$；$\overline{F_1}(x,y)=A_1(x,y)-iB_1(x,y)$。

则有$\overline{F_0}(x,y)=\dfrac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n-i\dfrac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}+\dfrac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-i\dfrac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots$

$$\overline{F_1}(x,y)=\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-i\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}-i\frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$$

于是有$\overline{f}(x+y)=\overline{F_0}(x,y)+\overline{F_1}(x,y)$，再令$\begin{cases}\overline{F_0}(x,iy)=i^n f_{(0)}(x,y)\\ \overline{F_1}(x,iy)=i^{n-1}f_{(1)}(x,y)\end{cases}$

则$\begin{cases}f_{(0)}(x,y)=\dfrac{a^{(n)}(x)}{n!}y^n-\dfrac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}+\dfrac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots\\ f_{(1)}(x,y)=\dfrac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!}y^{n-3}+\dfrac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots\end{cases}$

其中$f_{(0)}(x,y),f_{(1)}(x,y)$均为实系数二元多项式，$\dfrac{a^{(n)}(x)}{n!}=a_0\neq 0$。令$z=x+iy$，则有

$$\overline{f}(z)=\overline{f}(x+iy)=\overline{F_0}(x,iy)+\overline{F_1}(x,iy)=i^n f_{(0)}(x,y)+i^{n-1}f_{(1)}(x,y)=i^n\left[f_{(0)}(x,y)-if_{(1)}(x,y)\right]$$

于是由关系式

$$\overline{f}(z)=\overline{f}(x+iy)=i^n\left[f_{(0)}(x,y)-if_{(1)}(x,y)\right] \tag{$\overline{1}$}$$

可得实系数二元多项式方程组

$$\begin{cases} f_{(0)}(x,y)=0 \\ f_{(1)}(x,y)=0 \end{cases} \tag{$\overline{2}$}$$

定理 14 设 $x_0\in C$，$y_0\in C$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{z_0}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的根。

证明 若 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根，则

$$f(x_0+iy_0)=f(z_0)=c_0z_0^n+c_1z_0^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_0+c_n=0$$

于是 $\overline{f}\left(\overline{x_0}-i\overline{y_0}\right)=\overline{f}\left(\overline{z_0}\right)=\overline{c_0}\left(\overline{z_0}\right)^n+\overline{c_1}\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{c_{n-1}}\left(\overline{z_0}\right)+\overline{c_n}=\overline{c_0}\,\overline{z_0^n}+\overline{c_1}\,\overline{z_0^{n-1}}+\cdots+\overline{c_{n-1}}\,\overline{z_0}+\overline{c_n}$
$=\overline{c_0z_0^n+c_1z_0^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_0+c_n}=\overline{f(z_0)}=\overline{0}=0$，故 $\overline{z_0}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的根。

反之，若 $\overline{z_0}=\overline{x_0}-i\overline{y_0}$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的根，则 $\overline{f}\left(\overline{x_0}-i\overline{y_0}\right)=\overline{f}\left(\overline{z_0}\right)=0$，即

$$\overline{f}\left(\overline{x_0}-i\overline{y_0}\right)=\overline{f}\left(\overline{z_0}\right)=\overline{c_0}\left(\overline{z_0}\right)^n+\overline{c_1}\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{c_{n-1}}\left(\overline{z_0}\right)+\overline{c_n}=0\text{。}$$

于是 $f(x_0+iy_0)=f(z_0)=c_0z_0^n+c_1z_0^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_0+c_n=\overline{\overline{c_0z_0^n+c_1z_0^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z_0+c_n}}$
$=\overline{\overline{c_0}\,\overline{z_0^n}+\overline{c_1}\,\overline{z_0^{n-1}}+\cdots+\overline{c_{n-1}}\,\overline{z_0}+\overline{c_n}}=\overline{\overline{c_0}\left(\overline{z_0}\right)^n+\overline{c_1}\left(\overline{z_0}\right)^{n-1}+\cdots+\overline{c_{n-1}}\left(\overline{z_0}\right)+\overline{c_n}}=\overline{\overline{f}\left(\overline{z_0}\right)}=\overline{0}=0$。

所以 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根。】

对于复系数多项式 $f(z)$，从上述证明可以发现公式 $\overline{f(z_0)}=\overline{f}\left(\overline{z_0}\right)$，$f(z_0)=\overline{\overline{f}\left(\overline{z_0}\right)}$。

推论 1 设 $x_0\in R$，$y_0\in R$，则 $z_0=x_0+iy_0$ 是 $f(z)=0$ 的根的充要条件是：$\overline{z_0}=x_0-iy_0$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的根。

证明 在定理 14 中令 $x_0\in R$，$y_0\in R$ 即得。】

推论 2 设 $x_0\in R$，则 $z_0=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$z_0=x_0$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的实根。

证明 在推论 1 中令 $y_0=0$ 即得。】

推论 3 设 $x_0\in R$，$y_0\in R$ 且 $y_0\neq0$，则 $z_1=x_0+iy_0$，$z_2=x_0-iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的一对共轭根的充要条件是：$z_2=x_0-iy_0$，$z_1=x_0+iy_0$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 在 z 平

面直线 $x = x_0$ 上的一对共轭根。

证明 根据推论 1 即得。】

推论 4 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则 $z_1 = x_0 + iy_0$， $z_2 = \overline{x_0} + i\overline{y_0}$ 是 $f(z)=0$ 的一对对偶复根的充要条件是：$\overline{z_1} = \overline{x_0} - i\overline{y_0}$， $\overline{z_2} = x_0 - iy_0$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的一对对偶复根。

证明 由定理 14 即得。】

方程组$\overline{(2)}$的解的**性质** $f_{(0)}(x,y), f_{(1)}(x,y)$ 均为实系数二元多项式，于是方程组$\overline{(2)}$解的性质及推论与本篇第一章方程组(2)解的性质及推论相同。

性质 $x_0 \in C$，$y_0 \in C$，若(x_0, y_0)是方程组$\overline{(2)}$的解，则$(\overline{x_0}, \overline{y_0})$也是方程组$\overline{(2)}$的解。

推论 设 $x_0 \in C$， $y_0 \in C$，则(x_0, y_0)是$\overline{(2)}$的解的充要条件是：$(\overline{x_0}, \overline{y_0})$是$\overline{(2)}$的解。

设 $a \in R$， $y_0 \in C$，则(a, y_0)是$\overline{(2)}$的解的充要条件是：$(a, \overline{y_0})$是$\overline{(2)}$的解。

$\overline{f}(z)=0$ 作为 $f(z)=0$ 的共轭方程，它也是复系数代数方程，因此本篇由 $f(z)=0$ 所推导出各种性质，定理及推论对 $\overline{f}(z)=0$ 都是适用的，只需对符号或标号作适当调整即可。

将 $f_{(0)}(x,y), f_{(1)}(x,y)$ 关于 y 的结式，记为 $res\left(f_{(0)}, f_{(1)}, y\right) = Q_-(x)$，则

$$
Q_-(x) = \left|\begin{array}{ccccccccc}
\frac{a^{(n)}(x)}{n!} & -\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & \frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \cdots & & & & \\
 & \frac{a^{(n)}(x)}{n!} & -\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & \frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \cdots & & & \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\
 & & & \frac{a^{(n)}(x)}{n!} & -\frac{b^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{a^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & \frac{b^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \cdots \\
\frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots & & & & \\
 & \frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots & & & \\
 & & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\
 & & & \frac{a^{(n-1)}(x)}{(n-1)!} & -\frac{b^{(n-2)}(x)}{(n-2)!} & -\frac{a^{(n-3)}(x)}{(n-3)!} & \frac{b^{(n-4)}(x)}{(n-4)!} & \cdots
\end{array}\right|
$$

这是一个 x 的实系数 n^2 次多项式。$Q_-(x)=0$ 也是结式方程。

对影中点的**性质推论 4** (见第一章)设 z_j 和 z_h 是 z 平面上的任意两点，若 x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点，则 x_{jh} 也是 $\overline{z_h}$ 对 $\overline{z_j}$ 的对影中点。

定理 15 设 $z_j = x_j + iy_j$ $(j = 1,2,\cdots,n)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的所有复根($x_j \in R$，

$y_j \in R$)， $z_j = x_{jh} + iy_{jh}$ ， $z_h = \overline{x_{jh}} + i\overline{y_{jh}}$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 是 $f(z)=0$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复根，则 $\overline{z_j} = x_j - iy_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 次方程 $\overline{f}(z)=0$ 的所有复根， $\overline{z_j} = \overline{x_{jh}} - i\overline{y_{jh}}$ ， $\overline{z_h} = x_{jh} - iy_{jh}$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 是 $\overline{f}(z)=0$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复根， 故 $(x_j,-y_j)$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是方程组 $\overline{(2)}$ 的 n 个实数解； $(\overline{x_{jh}},-\overline{y_{jh}})$， $(x_{jh},-y_{jh})$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 是方程组 $\overline{(2)}$ 的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 对对偶复数解； $x = x_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ ， $x = \overline{x_{jh}}$ ， $x = x_{jh}$ $(1 \le j < h, h = 2,3,\cdots,n)$ 都是 $Q_-(x)=0$ 的根，于是 $(x-x_j)$，$(x-\overline{x_{jh}})$，$(x-x_{jh})$ 都是 $Q_-(x)$ 的一次因式，而且

$$Q_-(x) = A_{0-}\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-\overline{x_{jh}})(x-x_{jh}) \qquad (A_{0-} \in R \text{ 且 } A_{0-} \ne 0)$$

方程组 $\overline{(2)}$ 有 n^2 个解， $Q_-(x)=0$ 有 n^2 个根， $\overline{(2)}$ 的一个解对应 $Q_-(x)=0$ 的一个根。

证明 根据定理 14 推论 1 和推论 4 以及第一章定理 16 即得。】

推论 1 设 $res(f_0, f_1, y) = Q(x)$， $res(f_{(0)}, f_{(1)}, y) = Q_-(x)$，则 $Q_-(x) = cQ(x)$，其中 $c \ne 0$， $c \in R$ 。

证明 不妨设 $z_j = x_j + iy_j$ $(j=1,2,\cdots,n)$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 的所有复根(其中 $x_j \in R$， $y_j \in R$)，x_{jh} 是 z_j 对 z_h 的对影中点 $(j<h)$，则 x_{jh} 也是 $\overline{z_h}$ 对 $\overline{z_j}$ 的对影中点，由定理 15，有

$$Q_-(x) = A_{0-}\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-\overline{x_{jh}})(x-x_{jh}) \qquad (A_{0-} \in R \text{ 且 } A_{0-} \ne 0)$$

由第一章定理 16，有 $Q(x) = A_0\prod_{j=1}^{n}(x-x_j)\prod_{1\le j<h,h=2}^{n}(x-x_{jh})(x-\overline{x_{jh}})$ ($A_0 \in R$ 且 $A_0 \ne 0$)。

$Q(x)$ 和 $Q_-(x)$ 均为实系数 n^2 次多项式。显然， $Q(x) \mid Q_-(x)$， $Q_-(x) \mid Q(x)$， 于是 $Q_-(x) = cQ(x)$ 其中 $c \ne 0$， $c \in R$ 。】

可见，结式方程 $Q(x)=0$ 和 $Q_-(x)=0$ 事实上是两个相同的方程。

例 1. 当 $n=2$ 时，

$$Q(x)=\begin{vmatrix} \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b'(x)}{1!} & -a(x) \\ \frac{a'(x)}{1!} & b(x) & 0 \\ 0 & \frac{a'(x)}{1!} & b(x) \end{vmatrix}$$

$$Q_-(x)=\begin{vmatrix} \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b'(x)}{1!} & -a(x) \\ \frac{a'(x)}{1!} & -b(x) & 0 \\ 0 & \frac{a'(x)}{1!} & -b(x) \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b'(x)}{1!} & -a(x) \\ \frac{a'(x)}{1!} & b(x) & 0 \\ 0 & -\frac{a'(x)}{1!} & -b(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b'(x)}{1!} & -a(x) \\ \frac{a'(x)}{1!} & b(x) & 0 \\ 0 & \frac{a'(x)}{1!} & b(x) \end{vmatrix}=Q(x)$$

2. 当$n=3$时，

$$Q(x)=\begin{vmatrix} \frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a'(x)}{1!} & -b(x) & 0 \\ 0 & \frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a'(x)}{1!} & -b(x) \\ \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b'(x)}{1!} & -a(x) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b'(x)}{1!} & -a(x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b'(x)}{1!} & -a(x) \end{vmatrix}$$

$$Q_-(x)=\begin{vmatrix} \frac{a^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a'(x)}{1!} & b(x) & 0 \\ 0 & \frac{a^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a'(x)}{1!} & b(x) \\ \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b'(x)}{1!} & -a(x) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b'(x)}{1!} & -a(x) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b'(x)}{1!} & -a(x) \end{vmatrix}$$

$$
=-\begin{vmatrix}
\frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a^{'}(x)}{1!} & b(x) & 0 \\
0 & -\frac{a^{(3)}(x)}{3!} & -\frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a^{'}(x)}{1!} & b(x) \\
\frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x) & 0 & 0 \\
0 & -\frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x) & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix}
\frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a^{'}(x)}{1!} & b(x) & 0 \\
0 & \frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & \frac{a^{'}(x)}{1!} & -b(x) \\
\frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x) & 0 & 0 \\
0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b^{'}(x)}{1!} & a(x) & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x)
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
\frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a^{'}(x)}{1!} & -b(x) & 0 \\
0 & \frac{a^{(3)}(x)}{3!} & \frac{b^{(2)}(x)}{2!} & -\frac{a^{'}(x)}{1!} & -b(x) \\
\frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x) & 0 & 0 \\
0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x) & 0 \\
0 & 0 & \frac{a^{(2)}(x)}{2!} & \frac{b^{'}(x)}{1!} & -a(x)
\end{vmatrix}=Q(x)
$$

于是有

推论 2 设 $res(f_0,f_1,y)=Q(x)$，$res(f_{(0)},f_{(1)},y)=Q_{-}(x)$，则 $Q_{-}(x)=\pm Q(x)$，即 $Q_{-}(x)=Q(x)$ 或者 $Q_{-}(x)=-Q(x)$。

第四章
方程同实部复根的统一解法原理

§1 复根的实部点与非实部点

定义 设$a \in R$，$Q(a)=0$，则a是复系数代数方程$f(z)=0$的非互素点，施图姆序列$(3)^a$内$f_m(y)$的次数$K \geq 1$，当$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上有根时，称a是$f(z)=0$复根的一个实部点；当$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根时，称a是$f(z)=0$复根的一个非实部点。

若$a \in R$，$Q(a)=0$，则a是$f(z)=0$复根的实部点或者非实部点，二者必居其一。

定理 1 设$a \in R$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上至少有一个根。

证明 必要性显然，证充分性。若$f(z)=0$在直线$x=a$上至少有一个根，根据第二章§2 定理 5 和定理 2，则$(4)^a$至少有一个实根，设它为y_0，则$Q(a)=0$，故a是$f(z)=0$复根的实部点。】

例 设$a \in R$，$f(a)=0$，则$z=a$就是$f(z)=0$在直线$x=a$上的根，由定理 1，则a是$f(z)=0$复根的实部点。

推论 1 设$a \in R$，若a是$f(z)=0$复根的非实部点，则$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根。

证明 由定理 1 即得。】

推论 2 设$a \in R$，$f(a) \neq 0$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上至少有一个非a根。

证明 由题意则a不是$f(z)=0$的根，再由定理 1 即得。】

定理 2 设$a \in R$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$(4)^a$至少有一个实根。

证明 根据定理 1 和第二章§2 定理 5 即得。】

推论 1 设$a \in R$，$Q(a)=0$，若a是$f(z)=0$复根的非实部点的充要条件是：$(4)^a$没有实根。

证明 由定理 2 即得。】

推论 2 设$a\in R$， $f(a)\neq 0$，则a是$f(z)=0$复根的实部点的充要条件是：$(4)^{a}$至少有一个非0实根。

证明 由题意根据第二章§2 定理 5 推论，则0不是$(4)^{a}$的根。再由定理 2 即得。】

$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的根均为以a为实部的同实部(复)根。由$f(z)=0$在z平面上以a为实部的若干个同实部根组成的集合就称为$f(z)=0$在z平面上以a为实部的一个同实部根集合。

显然，$f(z)=0$在直线$x=a$上的所有根(含重根)就是$f(z)=0$在z平面上以a为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合就称为$f(z)=0$在z平面上以a为实部的同实部根全集。

设$a\in R$，$Q(a)=0$，若a是$f(z)=0$复根的实部点，则$(4)^{a}$至少有一个实根。假设y_j $(j=1,2,\cdots,K')$是$(4)^{a}$的所有实根(含重根)，根据第二章§3 定理 11 则$z_j=a+iy_j$ $(j=1,2,\cdots,K')$是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上的所有根(含重根)，其解法具有统一性，方法详见§2。令

$$B'_a=\{z_j=a+iy_j \mid y_j\in R, j=1,2,\cdots,K'\}$$

则集合B'_a是$f(z)=0$在z平面上以a为实部的同实部根全集。

显然，$f(z)=0$在z平面上的一个以a为实部的同实部根全集与$f(z)=0$复根的一个实部点a对应，于是又被称为是$f(z)=0$复根的实部点a的同实部根全集。

若$f(z)=0$的所有复根有J个各不相同的实部点，则$f(z)=0$在z平面上就有J个各不相同的实部点的同实部根全集，其任意两个不相同的实部点的同实部根全集的交集必为空集。

§2 同实部复根的统一解法

解法一 设 $a\in R$， $Q(a)=0$，则 $(3)^a$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\geq 1$，写成规范形式

$$f_m(y)=y^l[a_{m0}y^k+a_{m1}y^{k-1}-a_{m2}y^{k-2}-a_{m3}y^{k-3}$$
$$+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}a_{m\ \ k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{mk}] \qquad (4)^a$$

其次数 $K=l+k\geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零， $a_{m0}\neq 0$， $a_{mk}\neq 0$，且 $a_{m0},a_{m1},\cdots,a_{mk}$ 均为实数。

作点 a 的以 $f_m(y),f_m^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 y $(y\in R)$ 的变号数分别记为 $V_y^{f_m}$ 和 $U_y^{f_m}$。于是 1. $V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=0$ 时， $(4)^a$ 没有实根，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点， $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有根。

2. $V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=k_1\geq 1$ 时， $(4)^a$ 共有 k_1 个各不相同的实根， a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点。这时，可在 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $(4)^a$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$，$[\varepsilon_2,\eta_2]$,$\cdots$, $[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\leq\varepsilon_2<\eta_2\leq\cdots\leq\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}$，且 $f_m(\varepsilon_j)\neq 0$， $f_m(\eta_j)\neq 0$， $V_{\varepsilon_j}^{f_m}-V_{\eta_j}^{f_m}=1$， $j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $(4)^a$ 的这 k_1 个各不相同的实根就可表示为

$$y_j=\sqrt[\lfloor\varepsilon_j,\eta_j\rfloor]{\left(a_{m0},a_{m1},\cdots,(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}a_{m\ \ k-1},(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

其中 y_j 是 $(4)^a$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}$ 重根。$(4)^a$ 的实根个数为

$$K'=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j \text{。}$$

于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 k_1 个各不相同的根就可表示为

$$z_j=a+i\sqrt[\lfloor\varepsilon_j,\eta_j\rfloor]{\left(a_{m0},a_{m1},\cdots,(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}a_{m\ \ k-1},(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

由第二章§2 定理 5，则 z_j 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}$ 重根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根个数为

$$K'=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{f_m}-U_{\eta_j}^{f_m}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j \text{。}$$

说明：若l，k均为正整数，由第一篇第一章§4 定理 4 推论 4，则当$\varepsilon_{j_0}<0<\eta_{j_0}$时，

$$\sqrt[\lfloor\varepsilon_{j0},\eta_{j0}\rfloor]{\left(a_{m0},a_{m1},\cdots,(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}a_{m\ \ k-1},(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)}=\sqrt[\left[\varepsilon_{j0},\beta_{j0}\right]]{(1,0)}=0\text{；}$$

当$\eta_{j_0}<0$或$\varepsilon_{j_0}>0$时，

$$\sqrt[\lfloor\varepsilon_{j0},\eta_{j0}\rfloor]{\left(a_{m0},a_{m1},\cdots,(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}a_{m\ \ k-1},(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{mk},\underbrace{0,\cdots,0}_{l}\right)}$$
$$=\sqrt[\lfloor\varepsilon_{j0},\eta_{j0}\rfloor]{\left(a_{m0},a_{m1},\cdots,(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}a_{m\ \ k-1},(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}a_{mk}\right)}\text{。}$$

这一解法的优点是便于作理论上的阐述，缺点是不能直观表达$z=a$是$f(z)=0$的l重根。要克服这一缺点，可用解法二。

解法二 设$a\in R$，$Q(a)=0$，则$(3)^a$内$f_m(y)$的次数$K\geq 1$，写成标准式

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \qquad (4)^a$$

其次数$K=l+k\geq 1$，其中l和k均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数，当$k=0$时，$\lambda_k=\lambda_0=1$。

我们先与第一篇第七章§2 解法二对比。由第二章§3 定理 3，则$f(z)=g(z)F_m(z-a)$其中$F_m(z-a)=F_m(iy)=i^Kf_m(y)=i^{l+k}f_m(y)$，于是

$$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^l[(z-a)^k+i\lambda_1(z-a)^{k-1}+\lambda_2(z-a)^{k-2}+i\lambda_3(z-a)^{k-3}$$
$$+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}i^{k-1}\lambda_{k-1}(z-a)+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}i^k\lambda_k]$$

0是$(4)^a$的l重根，$z_0=a$是$F_m(z-a)=0$的l重根，由第二章§3 定理 6 推论 1，则$z_0=a$是$f(z)=0$的l重根。若$l\geq 1$，则a是$f(z)=0$复根的实部点。若k为正整数，令

$$P(z-a)=(z-a)^k+i\lambda_1(z-a)^{k-1}+\lambda_2(z-a)^{k-2}+i\lambda_3(z-a)^{k-3}$$
$$+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}i^{k-1}\lambda_{k-1}(z-a)+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}i^k\lambda_k$$

则有$F_m(z-a)=a_{m0}(z-a)^lP(z-a)$。再令$s=z-a$，则

$$P(s)=s^k+i\lambda_1s^{k-1}+\lambda_2s^{k-2}+i\lambda_3s^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}i^{k-1}\lambda_{k-1}s+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}i^k\lambda_k$$

但 $P(s)$ 却是复系数多项式，此路显然走不通。于是

对于复系数代数方程，必须用自己独特的方法。解法二的方法如下：

由于 0 是 $(4)^a$ 的 l 重根，由第二章§2 定理 5 推论，则 $z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根。若 $l\geq 1$，则 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点。若 k 为正整数，令

$$p(y)=y^k+\lambda_1 y^{k-1}-\lambda_2 y^{k-2}-\lambda_3 y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k\text{，则}$$

$$f_m(y)=a_{m0}y^l p(y)$$

实系数 k 次多项式 $p(y)$ 为点 a 的 $p(y)$，并且 $p(-\infty)\neq 0$， $p(0)\neq 0$， $p(+\infty)\neq 0$。

作点 a 的以 $p(y),p^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 $y\ (y\in R)$ 的变号数分别记为 V_y^p 和 U_y^p，于是 1. $V_{-\infty}^p-V_{+\infty}^p=0$ 时， $p(y)=0$ 没有实根，由 $f_m(y)=a_{m0}y^l p(y)$ 且 $p(0)\neq 0$ 可知， $(4)^a$ 没有非 0 实根， $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上没有非 a 根，只有的一个 l 重实根 $z=a$ (若 $l=0$，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上没有根)。

2. $V_{-\infty}^p-V_{+\infty}^p=k_1\geq 1$ 时，则 $p(y)=0$ 共有 k_1 个各不相同的实根。由 $f_m(y)=a_{m0}y^l p(y)$ 且 $p(0)\neq 0$ 可知，这 k_1 个实根也是 $(4)^a$ 的 k_1 个各不相同的非 0 实根，故 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点。这时，可在 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $p(y)=0$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1]$，$[\varepsilon_2,\eta_2]$，$\cdots$，$[\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1<\eta_1\leq\varepsilon_2<\eta_2\leq\cdots\leq\varepsilon_{k_1}<\eta_{k_1}$，且 $p(\varepsilon_j)\neq 0$， $p(\eta_j)\neq 0$， $V_{\varepsilon_j}^p-V_{\eta_j}^p=1$， $j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $p(y)=0$ 的这 k_1 个各不相同的实根(也是 $(4)^a$ 的 k_1 个各不相同的非 0 实根)就可表示为

$$y_j=\sqrt[\lfloor\varepsilon_j,\eta_j\rfloor]{\left(1,\lambda_1,\cdots,(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1},(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

其中 y_j 是 $p(y)=0$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^p-U_{\eta_j}^p$ 重实根。由 $f_m(y)=a_{m0}y^l p(y)$ 且 $p(0)\neq 0$ 可知， y_j 也是 $(4)^a$ 的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^p-U_{\eta_j}^p$ 重非 0 实根。

于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的 k_1 个各不相同的非 a 根就可表示为

$$z_j=a+i\sqrt[\lfloor\varepsilon_j,\eta_j\rfloor]{\left(1,\lambda_1,\cdots,(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1},(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1\text{。}$$

由第二章§2 定理 5，则 z_j 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 $l_j=U_{\varepsilon_j}^{p}-U_{\eta_j}^{p}$ 重非 a 根，故 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上非 a 根的个数为

$$k^{(1)}=U_{-\infty}^{p}-U_{+\infty}^{p}=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{p}-U_{\eta_j}^{p}\right)=\sum_{j=1}^{k_1}l_j$$

$z=a$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的根的个数为

$$K'=l+k^{(1)}=l+(U_{-\infty}^{p}-U_{+\infty}^{p})=l+\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{p}-U_{\eta_j}^{p}\right)=l+\sum_{j=1}^{k_1}l_j$$

§3 同实部复根问题的进一步讨论

设 $x_j \in R$，则 x_j 是 $f(z)=0$ 的非互素点的充要条件是：$Q(x_j)=0$。如果 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{Q(\ )}$ $(j=1,2,\cdots,H)$ 是 $Q(x)=0$ 的所有各不相同的实根，那么 $z=x_j$ $(j=1,2,\cdots,H)$ 就是 $f(z)=0$ 的所有非互素点，于是理论上可以说，作点 x_j 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y)\cdots, f_m(y)\} \qquad (3)^{x_j}$$

则 $f_m(y)$ 的次数 ≥ 1，方程 $(4)^{x_j}$ 有实根时，x_j 是 $f(z)=0$ 复根的实部点；方程 $(4)^{x_j}$ 没有实根时，x_j 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点。由 $x_j = {}^{[\alpha_j,\beta_j]}\sqrt{Q(\ )}$，则 α_j，β_j 均为有限实数，且

$$\alpha_j < x_j < \beta_j，\ Q(\alpha_j)\neq 0，\ Q(x_j)=0，\ Q(\beta_j)\neq 0，\ V_{\alpha_j}^{Q} - V_{\beta_j}^{Q} = 1，\ j=1,2,\cdots,H。$$

根据第二章§2 定理 2 推论 3 和定理 7，则 α_j，β_j $(j=1,2,\cdots,H)$ 都是 $f(z)=0$ 的互素点，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=\alpha_j$ 上和直线 $x=\beta_j$ 上都没有根。

定理 1 设 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，若 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面带形区域 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内一定有根，而且所有这些根都在直线 $x=x_0$ 上。

证明 若 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，则 $(4)^{x_0}$ 至少有一个实根，设它为 y_0，由第二章§2 定理 5，则 $z_0 = x_0 + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的根，于是 $\operatorname{Re} z_0 = x_0$ 且 $f(z_0)=0$。由于 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，则 α，β 均为有限实数，且

$$\alpha < x_0 < \beta，\ Q(\alpha)\neq 0，\ Q(x_0)=0，\ Q(\beta)\neq 0，\ V_{\alpha}^{Q} - V_{\beta}^{Q} = 1。$$

故 $\alpha < \operatorname{Re} z_0 < \beta$，$f(z_0)=0$，即 $z_0 = x_0 + iy_0$ 就是 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内的根，于是 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内一定有根。下面证明 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内的所有根(含重根)都在直线 $x=x_0$ 上。

用反证法。假如 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内有一个根 $z_1 = x_1 + iy_1$ ($x_1 \in R$，$y_1 \in R$)不在直线 $x=x_0$ 上，那么 $\alpha < \operatorname{Re} z_1 = x_1 < \beta$ 且 $x_1 \neq x_0$，$f(z_1)=0$，$z_1 = x_1 + iy_1$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_1$ 上的根，由第二章§2 定理 5 和定理 2，则 y_1 是 $(4)^{x_1}$ 的实根，$Q(x_1)=0$。于是 $Q(x)=0$ 在 (α,β) 内至少有两个不相同的根 x_0 和 x_1，与 $V_{\alpha}^{Q} - V_{\beta}^{Q} = 1$ 矛盾。故命题成立。】

定理 2 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点的充要条件是：$f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内没有根。

证明 充分性由定理 1 即得，再证必要性。若 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，则 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上没有根。由于 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则 α，β 均为有限实数，且

$$\alpha < x_0 < \beta，\ Q(\alpha) \neq 0，\ Q(x_0) = 0，\ Q(\beta) \neq 0，\ V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1$$

用反证法。假设 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内至少有一个根设为 $z_1 = x_1 + iy_1$ ($x_1 \in R$，$y_1 \in R$)，那么它一定不在直线 $x = x_0$ 上，于是 $\alpha < \operatorname{Re} z_1 = x_1 < \beta$ 且 $x_1 \neq x_0$， $f(z_1) = 0$，$z_1 = x_1 + iy_1$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x = x_1$ 上的根，由第二章§2 定理 5 和定理 2，则 y_1 是 $(4)^{x_1}$ 的实根， $Q(x_1) = 0$ 。于是 $Q(x)=0$ 在 (α,β) 内至少有两个不相同的根 x_0 和 x_1，这与 $V_\alpha^Q - V_\beta^Q = 1$ 矛盾。所以 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内没有根。】

推论 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是：

$$f(z)=0 \text{ 在 } \alpha < \operatorname{Re} z < \beta \text{ 内至少有一个根。}$$

证明 由定理 2 即得。】

定理 3 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是： $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内一定有根，而且所有这些根都在直线 $x = x_0$ 上。

证明 由定理 1 和定理 2 推论即得。】

推论 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点的充要条件是： $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内一定有根，而且它们是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合即为实部点 x_0 的同实部根全集，

综上所述，设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 的非互素点。为了判断 x_0 是复根的实部点还是非实部点，必须弄清 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内究竟有根还是无根：若无根，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点；若有根，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，而且所有这些根都在直线 $x = x_0$ 上。下一章将研究 $f(z)=0$ 在 $\alpha < \operatorname{Re} z < \beta$ 内有没有根以及有几个根的问题，从而对复根的实部点和非实部点以及实部点的同实部根全集问题作进一步的阐述。

确定 $f(z)=0$ 复根的所有实部点的方法：就是先求出 $Q(x)=0$ 的所有各不相同的实

根 $x_j=\sqrt[{[\alpha_j,\beta_j]}]{Q(\ )}$ $(j=1,2,\cdots,H)$，则 $z=x_j$ $(j=1,2,\cdots,H)$ 就是 $f(z)=0$ 的所有非互素点，然后对它们逐个鉴别，不妨设 x_{j_0} 是其中任意一个，若 $f(z)=0$ 在 $\alpha_{j_0}<\mathrm{Re}z<\beta_{j_0}$ 内无根，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，舍去；若 $f(z)=0$ 在 $\alpha_{j_0}<\mathrm{Re}z<\beta_{j_0}$ 内有根，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，而且所有这些根都在直线 $x=x_{j_0}$ 上。

这个方法很重要，它也是判定 $f(z)=0$ 复根已完成隔离的方法，为下一章的同实部根全集根号的设立和复根隔离基本思想的形成创造了条件。

接下来，为 $f(z)=0$ 复根的统一近似解法寻找理论上的依据。

假设 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}=a$，即通过某种方法求得了 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$ 的精确值为 a，则 $a\in R$，$Q(a)=0$，a 是 $f(z)=0$ 的非互素点，可作点 a 的以 $f_0(y),f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_m(y)\} \tag{3^a}$$

$f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \tag{4^a}$$

其次数 $K=l+k\geq1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq0$，$\lambda_k\neq0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数。假如 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，那么求出 $(4)^a$ 的所有实根(含重根)，就可得到 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=a$ 上的所有根(含重根)。

但事实上，根据实根号计算方法，只有通过无限次的计算，才能确保求得 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$ 的精确值 a，仅靠有限多次的计算只能求得其充分好的近似值 r，即 $x_0=a\approx r$，其中 $\alpha<r<\beta$。

我们面临的新课题是：在只能求得 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$ 充分好的近似值 r 的情况下，如何求 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的每个根的虚部的近似值？

下面的定理 4 和定理 5 既为下一章讨论同实部根全集的分类判定与统一解法的关系打下基础，也为统一近似解法提供了重要的理论依据。

复系数多项式 $f(z)=a(z)+ib(z)$，其中 $a(z)$ 和 $b(z)$ 均为实系数多项式，设 $d(z)$ 是 $a(z),b(z)$ 的一个实系数最大公因式，$x\in R$，以 $d(z),d'(z)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点 x 的变号数分别记为 V_x^d 和 U_x^d，其中 $d(z)$ 是非零常数时，规定 $U_x^d=V_x^d=0$，

则有

定理 4 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则

$l \ge 1$ 时，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$ 且 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$；$l = 0$ 时，$l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$。总之，有 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$。

证明 $\deg f(z) \ge 1$，假如 $d(z)$ 是非零常数，则 $V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$，$U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$。由第三章定理 5，则 $z = x_0$ 不是 $f(z)=0$ 的根，由题设则 $l = 0$，故 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$，命题成立。

假如 $\deg d(z) \ge 1$，由第三章定理 13 推论，则存在次数 >1 的实系数多项式 $h(x)$ 满足 $Q(x) = Q_d(x)h(x)$，其中 $\deg d(z) = 1$ 时，$Q(x) = d(x)h(x)$；$\deg d(z) \ge 2$ 时，$Q(x) = \pm d(x)M_d^2(x)h(x)$。由题意根据第一篇第一章§4 定理 4 推论 3 或定理 9，则 $\alpha < x_0 < \beta$，$d(\alpha) \ne 0$，$d(\beta) \ne 0$，$1 \ge V_\alpha^d - V_\beta^d \ge 0$，其中 $V_\alpha^d - V_\beta^d = 1$ 的充要条件是 $d(x_0) = 0$。

由题意根据第三章定理 5，则 $z = x_0$ 是 $d(z)=0$ 的 l 重根，$l \ge 1$ 时，$d(x_0) = 0$，$V_\alpha^d - V_\beta^d = 1$，由第一篇第一章§3 定理 6 则 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$ 且 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$；$l = 0$ 时，$d(x_0) \ne 0$，$V_\alpha^d - V_\beta^d = 0$，$U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$，故 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$。

总之，有 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$。】

推论 1 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$，其中 $l = 0$ 时，$f(x_0) \ne 0$；$l \ge 1$ 时，$f(x_0) = 0$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$。

证明 由定理 4 即得。】

推论 2 设 $(f(z), f'(z)) = 1$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$ 或 1，其中 $l = 0$ 时，$f(x_0) \ne 0$；$l = 1$ 时，$f(x_0) = 0$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$。

证明 由题设则 $l = 0$ 或 1，再由推论 1 即得。】

例题 设 $x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q = 1$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，则 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 1$ 或 0，其中 $l = 1$ 时，$f(x_0) = 0$，$x_0 = \sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为 $f_m(y) = a_{m0}y$，其中 $a_{m0} \ne 0$，a_{m0} 为实数；$l = 0$ 时，$f(x_0) \ne 0$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为 $f_m(y) = a_{m0}[y + \lambda_1]$，其中 $a_{m0} \ne 0$，$\lambda_1 \ne 0$，a_{m0}, λ_1 均为实数。

证明 由题设则 $\alpha < x_0 < \beta$，$Q(x_0) = 0$，$x = x_0$ 是 $Q(x) = 0$ 的 L 重根，由第二章§2 定

理 2 推论 1 和定理 3，则 $(4)^{x_0}$ 的次数 $K \geq 1$，$K \leq L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q = 1$，于是 $K = 1$，不妨假设 $f_m(y)$ 的规范形式为 $f_m(y) = a_{m0}y + a_{m1}$，其中 $a_{m0} \neq 0$，a_{m0}, a_{m1} 均为实数。$z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 l 重根，由第二章§2 定理 5 推论，则 0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重根，于是 $l = 1$ 或 0，其中 $l = 1$ 时，$a_{m1} = 0$；$l = 0$ 时，$a_{m1} \neq 0$。再由定理 4 推论 1 即得】

定理 5 设 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y) = a_{m0}y^l[y^k + \lambda_1 y^{k-1} - \lambda_2 y^{k-2} - \lambda_3 y^{k-3} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数 $K = l + k \geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0} \neq 0$，$\lambda_k \neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 均为实数，则 1) $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$，其中 $l = 0$ 时，$f(x_0) \neq 0$；$l \geq 1$ 时，$f(x_0) = 0$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$。2) $K \leq L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$k \leq (U_\alpha^Q - U_\beta^Q) - (U_\alpha^d - U_\beta^d)$，其中 $(f(z), f'(z)) = 1$ 时，$K = L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$k = (U_\alpha^Q - U_\beta^Q) - (U_\alpha^d - U_\beta^d)$。

证明 1) 由题设则 0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重根，由第二章§2 定理 5 推论，则 $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 l 重根，再由定理 4 推论 1 即得。2) 由题设则 $\alpha < x_0 < \beta$，$Q(x_0) = 0$，$x = x_0$ 是 $Q(x) = 0$ 的 L 重根，$(4)^{x_0}$ 的次数为 K，由第二章§2 定理 3，则 $K \leq L$，其中 $(f(z), f'(z)) = 1$ 时，$K = L$。

又因 $L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$l = U_\alpha^d - U_\beta^d$，$K = l + k$，于是 $K \leq L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，

$$k = K - l \leq L - l = (U_\alpha^Q - U_\beta^Q) - (U_\alpha^d - U_\beta^d)$$

其中 $(f(z), f'(z)) = 1$ 时，$K = L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$k = K - l = L - l = (U_\alpha^Q - U_\beta^Q) - (U_\alpha^d - U_\beta^d)$。】

推论 1 设 $(f(z), f'(z)) = 1$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y) = a_{m0}y^l[y^k + \lambda_1 y^{k-1} - \lambda_2 y^{k-2} - \lambda_3 y^{k-3} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数 $K = l + k \geq 1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0} \neq 0$，$\lambda_k \neq 0$，且 a_{m0}，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 均为实数，则 $K = L = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$，$l = U_\alpha^d - U_\beta^d$，$k = (U_\alpha^Q - U_\beta^Q) - (U_\alpha^d - U_\beta^d)$。其中 $l = 0$ 或 1，$l = 0$ 时，$f(x_0) \neq 0$；$l = 1$ 时，$f(x_0) = 0$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$。

证明 由题设可知 $z = x_0$ 是 $f(z) = 0$ 的 l 重根，再由定理 4 推论 2 和定理 5 即得。】

设 $(f(z), f'(z)) = 1$，若无法求得 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 的精确值 a，可设 $(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准

式为$(4)^{x_0}$，根据推论 1，由$K=L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$l=U_\alpha^d-U_\beta^d$，$k=\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-\left(U_\alpha^d-U_\beta^d\right)$就可求得$f_m(y)$的次数$K=l+k$中$K$，$l$，$k$的具体数值，这就为$f(z)=0$的近似解法创造了有利条件。

推论 2 设$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$l=U_\alpha^d-U_\beta^d=1$，则$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$，$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y[y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k]$$

其中$k=\left(U_\alpha^Q-U_\beta^Q\right)-1\geq 0$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且$a_{m0}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数。

证明 在推论 1 中令$l=U_\alpha^d-U_\beta^d=1$即得。】

推论 3 设$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$，$l=U_\alpha^d-U_\beta^d=0$，则$f(x_0)\neq 0$，$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}[y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k]$$

其中$k=U_\alpha^Q-U_\beta^Q\geq 1$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且$a_{m0}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数。

证明 在推论 1 中令$l=U_\alpha^d-U_\beta^d=0$即得。】

第五章
方程复根隔离的基本思想与统一解法

§1 卢-金判别法与卢-金表格

设多项式 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$，其中 $n\geq 1$，$c_0>0$，$c_j\in C$，$c_j=a_j+ib_j$，$a_j\in R$，$b_j\in R$，$j=0,1,2,\cdots,n$，且 $b_0=0$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不全为零，$a_0=c_0>0$，i 为虚数单位。为便于阐述，本章 $f(z)$ 均为此式，且首项系数 $c_0>0$。若 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 是方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上的所有根，由总根号定义，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(c_1,c_2,\cdots,c_{n-1},c_n)}$。

在前几章基础上，本章用方程分根号和同实部根全集根号来解决 $f(z)=0$ 求复根问题。记 $a(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n$，$b(z)=b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_{n-1}z+b_n$，则 $a(z)$ 和 $b(z)$ 是实系数多项式，且有 $f(z)=a(z)+ib(z)$。

令 $a\in R$，$z=a+iy$，则由第二章可知

$$f(a+iy)=F_0(iy)+F_1(iy)=i^nf_0(y)+i^{n-1}f_1(y)=i^n\left[f_0(y)-if_1(y)\right] \qquad (1)^a$$

其中点 a 的 $f_0(y),f_1(y)$ 分别为

$$\begin{cases} f_0(y)=f_0(a,y)=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}y^n+\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{a^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{b^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots \\ f_1(y)=f_1(a,y)=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}y^{n-1}+\dfrac{b^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{a^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}y^{n-3}-\dfrac{b^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots \end{cases}$$

$f_0(y)$ 的首项系数 $\dfrac{a^n(a)}{n!}=a_0=c_0>0$。由 $(1)^a$ 可以得到实系数多项式方程组

$$\begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases} \qquad (2)^a$$

要设立分根号，必须先解决复根的隔离问题。为此作点 a 的以 $f_0(y),f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y),f_1(y),f_2(y),\cdots,f_m(y)\} \qquad (3)^a$$

$(3)^a$ 内均为实系数多项式，$f_m(y)$ 是 $f_j(y),f_{j+1}(y)$ 的最大公因式($j=0,1,2,\cdots,(m-1)$)。记

$$a_{00}=\frac{a^{(n)}(a)}{n!},\quad a_{01}=\frac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},\quad a_{02}=\frac{a^{(n-2)}(a)}{(n-2)!},\quad a_{03}=\frac{b^{(n-3)}(a)}{(n-3)!},\cdots$$

$$a_{10}=\frac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!},\quad a_{11}=\frac{b^{(n-2)}(a)}{(n-2)!},\quad a_{12}=\frac{a^{(n-3)}(a)}{(n-3)!},\quad a_{13}=\frac{b^{(n-4)}(a)}{(n-4)!},\cdots$$

其中 $a_{00}=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}=a_0=c_0>0$，从而将 $(3)^a$ 写成：

$$\begin{aligned}
&f_0(y)=a_{00}y^n+a_{01}y^{n-1}-a_{02}y^{n-2}-a_{03}y^{n-3}+\cdots\\
&f_1(y)=a_{10}y^{n-1}+a_{11}y^{n-2}-a_{12}y^{n-3}-a_{13}y^{n-4}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_m(y)=a_{m0}y^K+a_{m1}y^{K-1}-a_{m2}y^{K-2}-a_{m3}y^{K-3}+\cdots
\end{aligned}$$

最后的 K 次多项式 $f_m(y)$ 是 $f_0(y), f_1(y)$ 的最大公因式。

为了判断 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上有没有根以及有几个根，我们推导出的判别法就要用 $a=0$ 时的施图姆序列 $(3)^0$。该判别法与卢斯判别法类似，暂且把它叫做卢-金判别法。卢-金判别法的证明完全效仿卢斯判别法的证明，也要用到公式[6]

$$r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$$

该公式的证明方法也与实系数代数方程相同。

n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面上有 n 个根，可将它们表示为 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ (其中可能会有重根)，于是 $f(z)=c_0(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)$ $(c_0>0)$

设在虚轴上没有 $f(z)=0$ 的根，则

$$f(iy)\neq 0,\quad iy-z_j\neq 0,\quad -\infty<y<+\infty,\quad j=1,2,\cdots,n\text{。}$$

由于复数乘积的辐角等于各因子辐角的和，故 $\arg f(iy)=\sum\limits_{j=1}^{n}\arg(iy-z_j)$。

当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时，把 y 的角度函数 $\varphi(y)$ 的增量记作 $\Delta\varphi$，则

$$\Delta\varphi=\varphi(-\infty)-\varphi(+\infty),\quad \Delta\arg f(iy)=\sum_{j=1}^{n}\Delta\arg(iy-z_j)\text{。}$$

假如根 z_j 在虚轴的右半平面上，则矢量 $iy-z_j$ 是从 z_j 到虚轴上动点 iy 的矢量，当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$，它的辐角从 $\dfrac{\pi}{2}$ 增加到 $\dfrac{3}{2}\pi$，于是 $\Delta\arg(iy-z_j)=\pi$。

设 z_j 在虚轴的左半平面上，则 $\Delta\arg(iy-z_j)=-\pi$。

假如在虚轴的右半平面上有 r 个根，在虚轴的左半平面上有 l 个根，$l+r=n$，于是有

$$\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\pi}\Delta\arg\left(iy-z_j\right)=r-l=r-(n-r)=2r-n$$

在虚轴的右半平面上的根的个数为：$r=\frac{1}{2}[n+\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)]$

为求 r，记 $\delta f(z)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)$，$f(iy)=i^n[f_0(y)-if_1(y)]=i^n\omega(y)$，其中

$$f_0(y)=f_0(0,y)=\frac{a^{(n)}(0)}{n!}y^n+\frac{b^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}y^{n-1}-\frac{a^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}y^{n-2}-\frac{b^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots$$

$$=a_0y^n+b_1y^{n-1}-a_2y^{n-2}-b_3y^{n-3}+\cdots$$

$$f_1(y)=f_1(0,y)=\frac{a^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}y^{n-1}+\frac{b^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}y^{n-2}-\frac{a^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}y^{n-3}-\frac{b^{(n-4)}(0)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots$$

$$=a_1y^{n-1}+b_2y^{n-2}-a_3y^{n-3}-b_4y^{n-4}+\cdots$$

且 $a_0=c_0>0$，该 $f_0(y), f_1(y)$ 即为点 0 的 $f_0(y), f_1(y)$，而 $\omega(y)=f_0(y)-if_1(y)$。

由于 $\arg f(iy)=\arg\left(i^n\right)+\arg\omega(y)$，$i^n$ 为常数，$\Delta i^n=0$，故

$$\delta f(z)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg\omega(y)$$

当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时，研究 $\varphi(y)=\arg\omega(y)$ 的增量可改为研究 $\cot\varphi(y)=-\frac{f_0(y)}{f_1(y)}$ 的正负变化情况。设 $\cot\varphi$ 在虚轴上从正变到负共有 α 次，从负变到正共有 β 次，则

$$\delta f(z)=\alpha-\beta$$

当 $\cot\varphi$ 从正变到负时，$\{f_0(y), f_1(y)\}$ 从异号变为同号损失一次变号；当 $\cot\varphi$ 从负变到正时，$\{f_0(y), f_1(y)\}$ 增加一次变号。作点 0 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_m(y)\} \tag{3^0}$$

令 $V_y=V\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_m(y)\}$，则当 y 从 $+\infty$ 变到 $-\infty$ 时，施图姆序列 $(3)^0$ 损失的变号数是由 $f_0(y)$ 的实零点引起的，中间函数的实零点对于变号数的改变无影响，由于已设 $f(iy)\neq 0$，所以 $f_m(y)$ 没有实零点，于是有

$$V_{+\infty}-\alpha+\beta=V_{-\infty}，故 V_{+\infty}-V_{-\infty}=\alpha-\beta=\delta f(z)=\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)$$

将其代入 $r=\frac{1}{2}[n+\frac{1}{\pi}\Delta\arg f(iy)]$，则有 $r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$。

由该公式可得复系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 的**卢-金判别法**[6]

卢-金判别法之一：n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根的充要条件是：在施图姆序列 $(3)^0$ 内 $m=n$，每个多项式次数比前一个低一次，且首项系数都是正数。

证明 如果在 $(3)^0$ 内 $m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，那么首先，$f_m(y)=f_n(y)$ 是非零常数，$(f_0(y),f_1(y))=1$，因此 0 是 $f(z)=0$ 的互素点，由第二章§2 定理 2 推论 3 和定理 7，则 $Q(0)\neq 0$，$f(z)=0$ 在直线 $x=0$ (即虚轴)上没有根；其次，由于 $n+1$ 个首项系数都是正数，则 $V_{-\infty}=n$，$V_{+\infty}=0$，由 $r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$ 可得 $r=0$。所以 $f(z)=0$ 在虚轴及其右半平面上没有根。

反过来，如果 n 次方程 $f(z)=0$ 在虚轴及其右半平面上没有根，那么 $r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$ 中 $r=0$，可得 $V_{-\infty}-V_{+\infty}=n$。而 $0\le V_y\le n$，因此必有 $V_{-\infty}=n$，$V_{+\infty}=0$。于是在 $(3)^0$ 内必须满足 $m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数。】

卢-金判别法之二：n 次方程 $f(z)=0$ 在施图姆序列 $(3)^0$ 内 $m=n$，每个多项式的次数比前一个低一次，则 $f(z)=0$ 在 z 平面虚轴上没有根，在其右半平面上的根的个数等于 $n+1$ 个首项系数组成的序列的变号数。

证明 由题设则 $f_m(y)=f_n(y)$ 是非零常数，0 是 $f(z)=0$ 的互素点，$Q(0)\neq 0$，$f(z)=0$ 在虚轴上没有根；不妨设在 $(3)^0$ 内 $n+1$ 个多项式首项系数组成的序列的变号数为 V，则 $V_{+\infty}=V$，$V_{-\infty}=n-V$，$V_{+\infty}-V_{-\infty}=2V-n$，于是由 $r=\frac{1}{2}(n+V_{+\infty}-V_{-\infty})$ 可得 $r=V$。】

卢-金判别法之三：设 K 为正整数，则 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：在施图姆序列 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，最后的 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上的 K 个根的虚部。

证明 假如 $Q(0)=0$，则 0 是 $f(z)=0$ 的非互素点，$(3)^0$ 内 $f_m(y)$ 的次数 $K\ge 1$。$f_m(y)$

是 $f_j(y), f_{j+1}(y)$ 的最大公因式($j=0,1,2,\cdots,(m-1)$)，且 $f_{m+1}(y)\equiv 0$ ，于是可设

$$f_j(y)=g_j(y)f_m(y),\quad j=0,1,2,\cdots,(m+1)。$$

根据预章定理 2 推论 2 则 $\begin{cases} f_0(y)=0 \\ f_1(y)=0 \end{cases}$ 有解。又 $\begin{cases} f_0(y)=g_0(y)f_m(y) \\ f_1(y)=g_1(y)f_m(y) \end{cases}$ (即 $\begin{cases} f_0(0,y)=g_0(0,y)f_m(0,y) \\ f_1(0,y)=g_1(0,y)f_m(0,y) \end{cases}$)

根据预章定理 5，则 $\begin{cases} g_0(y)=0 \\ g_1(y)=0 \end{cases}$ 无解，$(g_0(y),g_1(y))=1$ ，于是

$$f(z)=f(iy)=i^n\left[f_0(y)-if_1(y)\right]=i^n[g_0(y)-ig_1(y)]f_m(y)$$

令 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$ ，$g(z)=g(iy)=i^{n-K}\left[g_0(y)-ig_1(y)\right]$ ，则有 $f(iy)=g(iy)F_m(iy)$ ，于是

$$f(z)=g(z)F_m(z)$$

其中 $g(z)$ 为点 0 的 $g(z)$ ，$F_m(z)=F_m(iy)=i^K f_m(y)$ ，$F_m(z)$ 为复系数 K 次多项式，$g(z)$ 为复系数 $n-K$ 次多项式。由于 $f_j(y)=q_j(y)f_{j+1}(y)-f_{j+2}(y)$ ，即 $f_{j+2}(y)=-rem\left(f_j(y),f_{j+1}(y)\right)$ ，$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$ ，$f_{m+1}(y)\equiv 0$ 。又 $f_j(y)=g_j(y)f_m(y)$ ，$j=0,1,2,\cdots,(m+1)$ ，故

$$g_j(y)f_m(y)=q_j(y)g_{j+1}(y)f_m(y)-g_{j+2}(y)f_m(y)。$$

又 $f_m(y)\not\equiv 0$ ，于是 $g_j(y)=q_j(y)g_{j+1}(y)-g_{j+2}(y)$ ，即 $g_{j+2}(y)=-rem\left(g_j(y),g_{j+1}(y)\right)$ ，$j=0,1,2,\cdots,(m-1)$ ，$g_m(y)=1$ ，$g_{m+1}(y)\equiv 0$ 。因此

$$\{g_0(y),g_1(y),g_2(y),\cdots,g_m(y)\} \qquad (3)^0$$

即为方程 $g(z)=0$ 在点 0 的以 $g_0(y),g_1(y)$ 为基的施图姆序列，其中 $g_m(y)=1$ 。

证充分性。如果 n 次方程 $f(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$ ，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，最后的 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上的 K 个根的虚部，其中 K 为正整数，那么 $Q(0)=0$ ，于是由

$$f_j(y)=g_j(y)f_m(y),\quad j=0,1,2,\cdots,(m+1)。$$

可知，$n-K$ 次方程 $g(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$ ，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，根据卢-金判别法之一，则 $g(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根。而 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$ ，K 次方程 $F_m(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，由 $f(z)=g(z)F_m(z)$ 可知，$f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根。

再证必要性。如果 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根，其中 K 为正整数，那么 0 是 $f(z)=0$ 复根的最大实部点，$Q(0)=0$ ，$f(z)=0$ 在

z 平面上关于直线 $x=0$ (虚轴)严格对称的根的个数为 K，由第二章§4 定理 2 推论，则 $(4)^0$ 的次数为 K。由第二章§3 定理 11，则 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上的 K 个根的虚部。又 $F_m(iy)=i^K f_m(y)$，故 K 次方程 $F_m(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，由 $f(z)=g(z)F_m(z)$ 可知，$n-K$ 次方程 $g(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根，根据卢-金判别法之一，则 $g(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数。由

$$f_j(y)=g_j(y)f_m(y),\quad j=0,1,2,\cdots,(m+1)$$

(其中 $f_0(y)$ 的首项系数 $a_0=c_0>0$)可知，$f(z)=0$ 在其 $(3)^0$ 内 $m=n-K$，每个多项式的次数比前一个低一次，且首项系数都是正数，于是命题成立。】

根据除法规则，除去施图姆序列 $(3)^a$ 的 $++--$ 交替的正负号，可以得到复系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 在点 a 的**卢-金表格**：

$$\begin{array}{cc|cccccccc}
f_0 & y^n & a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{04} & a_{05} & \cdots \\
f_1 & y^{n-1} & a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \cdots \\
f_2 & y^{n-2} & a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \\
f_{n-2} & y^2 & a_{n-2\ 0} & a_{n-2\ 1} & a_{n-2\ 2} & & & & \\
f_{n-1} & y^1 & a_{n-1\ 0} & a_{n-1\ 1} & & & & & \\
f_0 & y^0 & a_{n\ 0} & & & & & &
\end{array}$$

其中

$$a_{js}=\frac{1}{a_{j-1\ 0}^2}\begin{vmatrix} a_{j-2\ 0} & a_{j-2\ 1} & a_{j-2\ s+2} \\ a_{j-1\ 0} & a_{j-1\ 1} & a_{j-1\ s+2} \\ 0 & a_{j-1\ 0} & (-1)^{s+1}a_{j-1\ s+1} \end{vmatrix}$$

特别当 $a=0$ 时，该表格为 $f(z)=0$ 在点 0 的卢-金表格。

只要将卢-金判别法的序列表述方式改为表格表述方式，我们就可得到复系数 n 次代数方程 $f(z)=0$ 的**卢-金表格判别法**。

卢-金表格判别法之一：n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴及其右半平面上没有根的充要条件是：在点 0 的卢-金表格最左列的 $n+1$ 个系数均为正数。

卢-金表格判别法之二：n 次方程 $f(z)=0$ 在点 0 的卢-金表格最左列的 $n+1$ 个系数都不等于零，则 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上没有根，在其右半平面上的根的个数等于最

左列 $n+1$ 个系数的变号数。

卢-金表格判别法之三：设 K 为正整数，则 n 次方程 $f(z)=0$ 在 z 平面的虚轴上有 K 个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：在点 0 的卢-金表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-K$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系数所代表的 K 次方程 $(4)^0$ 有 K 个实根，这 K 个实根就是 $f(z)=0$ 在虚轴上 K 个根的虚部。

§2 复平面的水平平移变换

设 $a\in R$ ，则 $s=z-a$ 是复平面的平移量为 a 的水平平移变换。在该变换下 $\operatorname{Re}s=\operatorname{Re}z-a$ ， $\operatorname{Im}s=\operatorname{Im}z$ ， z 平面的直线 $x=a$ 即为 s 平面的虚轴 $x=0$ ，于是 $a>0$ 时，s 平面可看作是 z 平面在该变换的作用下向右水平平移了 a 单位所得到的新平面；$a<0$ 时， s 平面可看作是 z 平面在该变换的作用下向左水平平移 $|a|$ 单位所得到的新平面。

为了能够运用卢-金表格判别法，判断 $f(z)=0$ 在 z 平面与虚轴平行的直线及其右半平面上有没有根以及有几个根，我们需要作复平面的水平平移变换。

复系数 n 次多项式 $f(z)$ 在 z 平面实轴上点 a 的泰勒展开式为：

$$f(z)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(a)}{1!}(z-a)+f(a)$$

其中 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=a_0=c_0>0$ ，令 $t(s)=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}s^n+\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\dfrac{f^{'}(a)}{1!}s+f(a)$，则 $t(s)$ 为复系数 n 次多项式，其首项系数 $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=c_0>0$ 。于是在水平平移变换 $s=z-a$ 下，有

$$t(s)=t(z-a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1}+\cdots+\frac{f^{'}(a)}{1!}(z-a)+f(a)=f(z)$$

即 $t(s)=t(z-a)=f(z)$ 。$t(s)$ 在点 0 的泰勒展开式可写成

$$t(s)=\frac{t^{(n)}(0)}{n!}s^n+\frac{t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\frac{t^{'}(0)}{1!}s+t(0)$$

其中 $t^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)=n!a_0>0$ ， $t^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(a)$,$\cdots$, $t^{'}(0)=f^{'}(a)$， $t(0)=f(a)$

设 $t(s)=a_t(s)+ib_t(s)$，其中 $a_t(s)$ 和 $b_t(s)$ 均为实系数多项式，令 $s=iy$ ，并记

$$\begin{cases} t_0(y)=t_0(0,y)=\dfrac{a_t^{(n)}(0)}{n!}y^n+\dfrac{b_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}y^{n-1}-\dfrac{a_t^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{b_t^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}y^{n-3}+\cdots \\ t_1(y)=t_1(0,y)=\dfrac{a_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}y^{n-1}+\dfrac{b_t^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}y^{n-2}-\dfrac{a_t^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}y^{n-3}-\dfrac{b_t^{(n-4)}(0)}{(n-4)!}y^{n-4}+\cdots \end{cases}$$

则相应有

$$t(iy)=i^n[t_0(0,y)-it_1(0,y)]=i^n[t_0(y)-it_1(y)] \qquad (1)^0$$

该 $t_0(y),t_1(y)$ 即为点 0 的 $t_0(y),t_1(y)$，作点 0 的以 $t_0(y),t_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{t_0(y),t_1(y),t_2(y)\cdots,t_m(y)\} \qquad (3)^0$$

而 $f(z)=a(z)+ib(z)$，其中 $a(z)$ 和 $b(z)$ 均为实系数多项式，则由本篇第一章§1 可知

$\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$ ， $\dfrac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+i\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$,…, $\dfrac{f'(a)}{1!}=\dfrac{a'(a)}{1!}+i\dfrac{b'(a)}{1!}$ ，

$f(a)=a(a)+ib(a)$，并且 $\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}=b_1$。同样

$\dfrac{t^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{a_t^{(n)}(0)}{n!}=a_0>0$， $\dfrac{t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}=\dfrac{a_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+i\dfrac{b_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}$,…, $\dfrac{t'(0)}{1!}=\dfrac{a_t'(0)}{1!}+i\dfrac{b_t'(0)}{1!}$,

$t(0)=a_t(0)+ib_t(0)$。由于 $t^{(n)}(0)=f^{(n)}(a)=n!a_0>0$， $t^{(n-1)}(0)=f^{(n-1)}(a)$,…, $t'(0)=f'(a)$，

$t(0)=f(a)$，故 $\dfrac{a_t^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}=a_0>0$， $\dfrac{a_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$， $\dfrac{b_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}=\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}=b_1$

,…, $\dfrac{a_t'(0)}{1!}=\dfrac{a'(a)}{1!}$， $\dfrac{b_t'(0)}{1!}=\dfrac{b'(a)}{1!}$， $a_t(0)=a(a)$， $b_t(0)=b(a)$。记 $a_{00}=\dfrac{a_t^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{a^{(n)}(a)}{n!}$，

$a_{01}=\dfrac{b_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}=\dfrac{b^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$， $a_{02}=\dfrac{a_t^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}=\dfrac{a^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$， $a_{03}=\dfrac{b_t^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}=\dfrac{b^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}$,…

$a_{10}=\dfrac{a_t^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}=\dfrac{a^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$， $a_{11}=\dfrac{b_t^{(n-2)}(0)}{(n-2)!}=\dfrac{b^{(n-2)}(a)}{(n-2)!}$， $a_{12}=\dfrac{a_t^{(n-3)}(0)}{(n-3)!}=\dfrac{a^{(n-3)}(a)}{(n-3)!}$,

$a_{13}=\dfrac{b_t^{(n-4)}(0)}{(n-4)!}=\dfrac{b^{(n-4)}(a)}{(n-4)!}$,…

于是点 a 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列 $(3)^a$ 可以写成

$$\begin{aligned}
&f_0(y)=a_{00}y^n+a_{01}y^{n-1}-a_{02}y^{n-2}-a_{03}y^{n-3}+\cdots\\
&f_1(y)=a_{10}y^{n-1}+a_{11}y^{n-2}-a_{12}y^{n-3}-a_{13}y^{n-4}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_m(y)=a_{m0}y^K+a_{m1}y^{K-1}-a_{m2}y^{K-2}-a_{m3}y^{K-3}+\cdots
\end{aligned}$$

点 0 的以 $t_0(y),t_1(y)$ 为基的施图姆序列 $(3)^0$ 可以写成

$$\begin{aligned}
&t_0(y)=a_{00}y^n+a_{01}y^{n-1}-a_{02}y^{n-2}-a_{03}y^{n-3}+\cdots\\
&t_1(y)=a_{10}y^{n-1}+a_{11}y^{n-2}-a_{12}y^{n-3}-a_{13}y^{n-4}+\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&t_m(y)=a_{m0}y^K+a_{m1}y^{K-1}-a_{m2}y^{K-2}-a_{m3}y^{K-3}+\cdots
\end{aligned}$$

可以看出：$f(z)=0$ 的施图姆序列 $(3)^a$ 和 $t(s)=0$ 的施图姆序列 $(3)^0$ 实际上是同一个序列，

即$t_j(y)=f_j(y)$， $j=0,1,2,\cdots,m$ 。于是有

性质 设$a\in R$，$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$f(z)=0$的施图姆序列$(3)^a$和$t(s)=0$的施图姆序列$(3)^0$是同一个序列，于是$f(z)=0$在点a的卢-金表格就是$t(s)=0$在点0的卢-金表格。

定理 1 设$a\in R$，利用卢-金表格可以对n次方程$f(z)=0$的根的位置做出如下判断：

1) $f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列的$n+1$个系数均为正数的充要条件是：$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$及其右半平面上没有根；

2) $f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，则$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上没有根，在其右半平面上根的个数等于最左列$n+1$个系数的变号数。

证明 不妨设$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$t(s)=0$也是n次方程，由性质，$f(z)=0$在点a的卢金表格就是$t(s)=0$在点0的卢金表格，于是 1) $f(z)=0$在点a的卢金表格最左列的$n+1$个系数均为正数的充要条件是：$t(s)=0$在点0的卢-金表格最左列的$n+1$个系数均为正数。

根据预章定理 6 推论 9，$t(s)=0$在s平面的虚轴及其右半平面上没有根的充要条件是：$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$及其右半平面上没有根。再由卢-金表格判别法之一即得。

2) $f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列的$n+1$个系数都不等于零就是$t(s)=0$在点0的卢-金表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，由卢-金表格判别法之二，则$t(s)=0$在s平面的虚轴上没有根，在其右半平面上根的个数等于($t(s)=0$在点0的卢-金表格)最左列$n+1$个系数的变号数。根据预章定理 6 推论 6 和 7，则$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上没有根，在其右半平面上根的个数等于($f(z)=0$在点a的卢-金表格)最左列$n+1$个系数的变号数。】

推论 设$a\in R$，若n次方程$f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，且变号数为W_a，则$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上没有根，在其右半平面上的根的个数为W_a。

证明 由定理 1 即得。】

定理 2 设$a\in R$，K为正整数，则n次方程$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上有K个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：在点a的卢-金表格最左列自上而下的前

$m+1$个数均为正数，$m=n-K$，从第$m+2$行开始往下的每一行系数均为零，第$m+1$行系数所代表的K次方程$(4)^a$有K个实根，这K个实根就是$f(z)=0$在直线$x=a$上K个根的虚部。

证明 不妨设$t(s)=t(z-a)=f(z)$，则$t(s)=0$也是n次方程，由性质，$f(z)=0$在点a的卢-金表格就是$t(s)=0$在点0的卢-金表格，于是

$f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列自上而下的前$m+1$个数均为正数，$m=n-K$，从第$m+2$行开始往下的每一行系数均为零，第$m+1$行系数所代表的K次方程$(4)^a$有K个实根，这K个实根就是$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上K个根的虚部的充要条件是：$t(s)=0$在点0的卢-金表格最左列自上而下的前$m+1$个数均为正数，$m=n-K$，从第$m+2$行开始往下的每一行系数均为零，第$m+1$行系数所代表的K次方程$(4)^0$有K个实根，这K个实根就是$t(s)=0$在s平面虚轴上K个根的虚部。

根据预 章定理 6 推论 10，则$t(s)=0$在s平面的虚轴上有K个根，在其右半平面上没有根的充要条件是：$f(z)=0$在z平面的直线$x=a$上有K个根，在其右半平面上没有根。

再由卢-金表格判别法之三即得。】

§3 分根号与同实部根全集根号

定理 1 设$\alpha<\beta$，若n次方程$f(z)=0$在点α和点β的卢-金表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，且变号数分别为W_α和W_β，则$f(z)=0$在z平面直线$x=\alpha$上和直线$x=\beta$上都没有根，在带形区域$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-W_\beta$个根。

证明 根据§2 定理 1 推论，则$f(z)=0$在直线$x=\alpha$上和直线$x=\beta$上都没有根，在直线$x=\alpha$和直线$x=\beta$右半平面上根的个数分别为W_α和W_β，于是$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-W_\beta$个根。】

$f(z)=0$在复平面上的所有根(含重根)组成的集合用总根号表示，而其在与虚轴平行的一个带形区域内的所有根(含重根)组成的集合可用一个**分根号**表示。

定义 1 设$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，$\alpha<\beta$，$f(z)=0$在点α和点β的卢-金表格最左列的$n+1$个系数都不等于零，且变号数分别为W_α和W_β，则将$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内的$W_\alpha-W_\beta=q$个根所组成的集合记作

$$\sideset{^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}}\quad (\text{简写成}\ \sideset{^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}{}{\sqrt{f(\ )}})$$

其中$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$在$\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$左上方记为$(\alpha,\ \beta)$；$W_\alpha-W_\beta$记在左下方。于是

1) $q=0$时，$\sideset{^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}}=\phi$

2) $q\ge1$时，若这q个根为$z_1,z_2,\cdots,z_q$，则$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sideset{^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}}$。

这时$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$称为根$z_1,z_2,\cdots,z_q$的存在区域。假如$W_\alpha=n$，$W_\beta=0$，则有

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\sideset{^{(\alpha\ ,\ \beta)}_{n\ -\ 0}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}}$$

我们的新课题是：设$a\in R$，若n次方程$f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列的$n+1$个系数中有零系数，该如何计算它在直线$x=a$上及其右半平面上的根的个数。为此，可将最左列的$n+1$个系数中有零系数分为以下两种情况：

(A)最左列有零系数，但在零系数所在的行中其它系数不全为零；

(B)卢-金表格的某一行系数均为零。

然后对两种情况分别进行讨论。

1. 出现情况(A)时，可用一个无穷小的正数ε来代替这个零，从而使点a的卢-金表格可以继续运算下去(否则下一行会出现∞)。由此得到的卢-金表格最左列的$n+1$个

系数都不等于零，其变号数W_a即为$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上的根的个数，而求直线$x=a$上根的个数则需要作点a的以$f_0(y), f_1(y)$为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_m(y)\} \qquad (3)^a$$

设$f_m(y)$的次数为K，于是

1) 若$K=0$，则a是$f(z)=0$的互素点，$Q(a)\neq 0$，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根。

2) 若$K\geq 1$，则a是$f(z)=0$的非互素点，$Q(a)=0$，点a的以$f_m(y), f_m^{'}(y)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点y $(y\in R)$的变号数分别记为$V_y^{f_m}$和$U_y^{f_m}$，于是$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=0$时，$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=0$，$(4)^a$没有实根，$a$是$f(z)=0$复根的非实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根；$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=k_1\geq 1$时，设$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=k_a$，则$(4)^a$有$k_1$个各不相同的实根，包含重根则有$k_a$个实根，$a$是$f(z)=0$复根的实部点，$f(z)=0$直线$x=a$上有$k_1$个各不相同的根，包含重根则有$k_a$个根。

2. 出现情况(B)时，从该行开始往下的每一行系数均为零，利用点a的卢-金表格不仅可以判断$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上根的个数，还可计算其在直线$x=a$上根的个数，方法如下：

设卢-金表格从第$m+2$行开始往下的每一行系数均为零，则第$m+1$行系数所代表的多项式$f_m(y)$是$f_0(y), f_1(y)$的一个最大公因式，其次数$K\geq 1$，a是$f(z)=0$的非互素点，$Q(a)=0$。我们将$f_m(y)$作为辅助多项式，先求$f_m(y)$对y的导数$f_m^{'}(y)$，并用$f_m^{'}(y)$的系数替换第$m+2$行的零系数，再继续计算卢-金表格。若又出现某行系数均为零的情况，则照此办理。这样得到的点a的卢-金表格的最左列的$n+1$个系数都不等于零，其最左列系数的变号数W_a即为$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上根的个数。

这样做事实上是在构建点a的以$f_m(y), f_m^{'}(y)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型：点a的卢-金表格从第$m+1$行开始往下的每一行系数都相应代表标准型或扩展型序列中的一个多项式，于是与1. 2)相同，$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=0$时，$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=0$，$a$是$f(z)=0$复根的非实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根；$V_{-\infty}^{f_m}-V_{+\infty}^{f_m}=k_1\geq 1$时，设$U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=k_a$，则$a$是$f(z)=0$复根的实部点，$f(z)=0$在直线$x=a$上有$k_1$个各不相同的根，包含重根则有$k_a$个根。

假如出现情况(B)按上述方法处理又出现情况(A)，则用无穷小正数ε来代替这个

零，使表格可继续运算下去。由此得到的卢-金表格，其最左列系数的变号数W_a即为$f(z)=0$在直线$x=a$的右半平面上根的个数。然后作点a的以$f_m(y), f_m'(y)$为基的施图姆序列的标准型和扩展型，计算$f(z)=0$在直线$x=a$上根的个数。

对实轴上的任意点a，上述讨论解决了$f(z)=0$在点a的卢-金表格最左列系数中有零系数的情况下如何继续计算表格的问题。在以后的表述中不再提起最左列系数原来是否有零系数，而只说最左列系数的变号数为W_a，相信不会引起混淆。

由点a的卢-金表格和$(3)^a$内的$f_m(y)$可分别求得与$f(z)=0$复根有关的两个数：一个是W_a，另一个是k_a。W_a反映的是$f(z)=0$在直线$x=a$右半平面上根的个数，当且仅当$W_a=0$时，$f(z)=0$在直线$x=a$的右半平面上没有根。k_a表示$f(z)=0$在直线$x=a$上根的个数(包含重根)，当且仅当$k_a=0$时，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根，其中$Q(a)=0$时，a是$f(z)=0$的非互素点，$f_m(y)$的次数$K\geq 1$，则$k_a=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$；$Q(a)\neq 0$时，$a$是$f(z)=0$的互素点，$f_m(y)$的次数$K=0$，$f(z)=0$在直线$x=a$上没有根，即$k_a=0$。

于是找到了判定$f(z)=0$在z平面与虚轴平行的任意一条直线上及其右半平面上有没有根以及有几个根的方法，写成命题则有

引理 设$a\in R$，则$f(z)=0$在z平面直线$x=a$上根的个数为k_a，在其右半平面上根的个数为W_a。

定理 2 设$\alpha<\beta$，则$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)$个根。

证明 根据引理，则$f(z)=0$在直线$x=\alpha$的右半平面上根的个数为W_a，在直线$x=\beta$上及其右半平面上根的个数合计为$W_\beta+k_\beta$，于是在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)$个根。】

定理2给出了判定$f(z)=0$在z平面与虚轴平行的任意一个带形区域内有没有根以及有几个根的方法，于是有

定义 2 设$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$），则将$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内的$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)=q$个根组成的集合记作

$$\underset{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}{\overset{(\alpha\ ,\quad \beta)}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\ \left(\text{简写成}\ \underset{W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}{\overset{(\alpha\ ,\quad \beta)}{}}\sqrt{f(\ )}\right)$$

其中$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$在$\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$左上方记为$(\alpha,\ \ \beta)$；$W_\alpha-\left(W_\beta+k_\beta\right)$记在左下方，于

是

1) $q=0$时，$\sqrt[\substack{(\alpha\ ,\quad \beta)\\ W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}]{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ ($=\sqrt[\substack{(\alpha\ ,\quad \beta)\\ W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}]{f(\ )}$) $=\phi$

2) $q\geq 1$时，若这q个根为$z_1,z_2,\cdots,z_q$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sqrt[\substack{(\alpha\ ,\quad \beta)\\ W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}]{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\ (=\sqrt[\substack{(\alpha\ ,\quad \beta)\\ W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)}]{f(\ )})$$

这时$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$为根$z_1,z_2,\cdots,z_q$的存在区域，若$k_\beta=0$，则$W_\alpha-(W_\beta+k_\beta)$中的$k_\beta$可以不写，即$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sqrt[\substack{(\alpha,\ \beta)\\ W_\alpha-W_\beta}]{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ ($=\sqrt[\substack{(\alpha,\ \beta)\\ W_\alpha-W_\beta}]{f(\ )}$)

定理 3 设$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，若$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，则$k_\alpha=0$，$k_\beta=0$，$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-W_\beta$个根。若$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，则$V_\alpha^Q-V_\beta^Q\geq 1$，$f(z)=0$复根在区间$(\alpha,\beta)$内至少有一个实部点，将这$q$个根设为$z_1,z_2,\cdots,z_q$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}=\sqrt[\substack{(\alpha,\ \beta)\\ W_\alpha-W_\beta}]{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\ (=\sqrt[\substack{(\alpha,\ \beta)\\ W_\alpha-W_\beta}]{f(\ )})$$

证明 由题设则α和β都是$f(z)=0$的互素点，故$k_\alpha=0$，$k_\beta=0$，由定理 2，则$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$W_\alpha-W_\beta$个根。若$W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，则$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内至少有一个根，设为$z_1=x_1+iy_1$，其中$x_1\in R$，$y_1\in R$且$\alpha<\operatorname{Re}z_1=x_1<\beta$，于是$z_1=x_1+iy_1$是$f(z)=0$在直线$x=x_1$上的根，由第二章§2 定理 5 和定理 2，则$y_1$是$(4)^{x_1}$的实根，$Q(x_1)=0$，又$\alpha<x_1<\beta$，故$V_\alpha^Q-V_\beta^Q\geq 1$，$x_1$是$f(z)=0$复根在$(\alpha,\beta)$内的一个实部点，再由定义 2 即得。】

推论 设$\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，若$V_\alpha^Q-V_\beta^Q=0$，则$W_\alpha-W_\beta=0$。

证明 由定理 3 即得。】

由推论，若$Q(x)=0$在(α,β)内没有根，则$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内没有根。

定理 4 设$f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，若$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，则$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内共有$q$个根，于是$q=0$时，$x_0$是$f(z)=0$复根的非实部点，且

$$\sqrt[\substack{(\alpha,\ \beta)\\ W_\alpha-W_\beta}]{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\ (=\sqrt[\substack{(\alpha,\ \beta)\\ W_\alpha-W_\beta}]{f(\ )})=\phi\text{。}$$

$q\geq 1$时，x_0是$f(z)=0$复根的实部点，$f(z)=0$在$\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$内的$q$个根都在直线$x=x_0$

上，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ ($={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$)，其中 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合 ${}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 即为实部点 x_0 的同实部根全集。

证明 由题设则 $\alpha<\beta$，$Q(\alpha)\neq 0$，$Q(\beta)\neq 0$，再由定理 3，第四章§3 定理 2 和 3 及其推论即得。】

下面给出同实部根**全集根号**定义

定义 3 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，若 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，$q\geq 1$，则将 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内直线 $x=x_0$ 上的 q 个根组成的集合记作

$${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\quad(\text{简写成}\ {}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )})$$

它是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集，其中 $|(\alpha,\ \beta)|$ 表示带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的 q 个根的隔离区域，竖在 $(\alpha,\ \beta)$ 外边的“| |”表示实部点 x_0 的同实部根已经与其它实部点的同实部根隔离的意思，于是也称 $|(\alpha,\ \beta)|$ 是实部点 x_0 的同实部根的隔离区域，记在 $\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 左上方；$W_\alpha-W_\beta$ 记在左下方。若这 q 个根为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ ($={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$)。

推论 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的共有 q 个根，于是 $q\geq 1$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根都在直线 $x=x_0$ 上，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

$$(\text{简写成}\ \{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{(\alpha,\ \beta)}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )})$$

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 即为实部点 x_0 的同实部根全集。

证明 由定理 4 和定义 3 即得。】

全集根号还有另一定义

定义 4 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，点 x_0 的以 $f_m(y), f_m^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点 y $(y\in R)$ 的变号数分别记为 $V_{,y}^{f_m}$ 和 $U_y^{f_m}$，$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$。若 $k_{x_0}\ge 1$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，将 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上的 k_{x_0} 个根组成的集合记作

$$ {}^{x_0}_{k_{x_0}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\ (\text{简写成}\ {}^{x_0}_{k_{x_0}}\sqrt{f(\ )}) $$

它是实部点 x_0 的同实部根全集，直线 $x=x_0$ 称为根的存在线，在 $\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 左上方记为 x_0；k_{x_0} 为根的个数，记在 $\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 左下方。若这 k_{x_0} 个根为 $z_1,z_2,\cdots,z_{k_{x_0}}$，则

$$ \{z_1,z_2,\cdots,z_{k_{x_0}}\}={}^{x_0}_{k_{x_0}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\ (={}^{x_0}_{k_{x_0}}\sqrt{f(\ )}) $$

定义 4 中，$\alpha<x_0<\beta$，$Q(x_0)=0$，若 $f(x_0)=0$，则 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的实根，否则 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的 k_{x_0} 个根的实部。若 $(f(z),f^{'}(z))=1$，根据第二章§7 定理 5 推论 2 则 $(4)^{x_0}$ 的所有复根各不相等，即 $(4)^{x_0}$ 没有重根，$(f_m(y),f_m^{'}(y))=1$，故点 x_0 的以 $f_m(y),f_m^{'}(y)$ 为基的施图姆序列的扩展型 = 标准型，在点 y $(y\in R)$ 的变号数有 $U_y^{f_m}=V_y^{f_m}$。

定理 5 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$ 个根，则

1) $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q$；

2) $q\ge 1$ 时，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则有 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$

$$ (\text{简写成}\ \{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}) $$

其中 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 是 $f(z)=0$ 在 z 平面上以 x_0 为实部的所有同实部根，由它们全体所组成的集合是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集，它既可用 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 表示，也可用 ${}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 表示。

证明 1) 由题意根据定理 4，则 $q=0$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，于是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上没有根，$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=0$，故 $k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q=0$。$q\ge 1$ 时，x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根都在直线 $x=x_0$ 上，故 $W_\alpha-W_\beta=q=k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}$。总之，$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q$。

2) $q\ge 1$ 时，由 1)则 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，由定义 4，则 $\{z_1,z_2,\cdots,z_{k_{x_0}}\}=\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$。

再由定理 4 推论，就有 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$，于是命题成立。】

综上所述，设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q$，$q\ge 1$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，将这 q 个根设为 $z_1,z_2,\cdots,z_q$，则

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

$$(\text{简写成}\ \{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )})$$

根据第二章§3 定理 11，则 $(4)^{x_0}$ 共有 q 个实根，这 q 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的 q 个根的虚部。

定理 6 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，b 为有限实数，结式 $Q(x)=A_0x^{n^2}+A_1x^{n^2-1}+\cdots+A_{n^2-1}x+A_{n^2}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，令 $s=z-b$，

$$t(s)=\frac{f^{(n)}(b)}{n!}s^n+\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!}s^{n-1}+\cdots+\frac{f'(b)}{1!}s+f(b)$$

$t(s)=0$ 在点 $\alpha-b$ 和点 $\beta-b$ 的卢-金表格最左列系数的变号数分别记为 $W_{\alpha-b}^t$ 和 $W_{\beta-b}^t$，则

1) $W_\alpha-W_\beta=W_{\alpha-b}^t-W_{\beta-b}^t$；

2) $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 的充要条件是：

$$\{z_1-b,z_2-b,\cdots,z_q-b\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}=$$
$${}^{|(\alpha-b,\ \beta-b)|}_{W_{\alpha-b}^t-W_{\beta-b}^t}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}={}^{x_0-b}_{q}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f'(b)}{1!},f(b)\right)}$$

证明 由题设则 $t(s)=t(z-b)=f(z)$。又 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，根据第一篇第一章§3 定理 1，则 $x_0-b=s_0={}^{[\alpha-b,\beta-b]}\sqrt{\left(\frac{Q^{(n^2)}(b)}{n^2!},\frac{Q^{(n^2-1)}(b)}{(n^2-1)!},\cdots,\frac{Q^{'}(b)}{1!},Q(b)\right)}$

1) 根据预章定理 6 推论 3，则 $f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内根的个数等于 $t(s)=0$ 在 $\alpha-b<\operatorname{Re}s<\beta-b$ 内根的个数。根据定理 4，即 $W_\alpha-W_\beta=W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}$。

2) 证必要性。若 $\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，由定理 4 推论，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 都在直线 $x=x_0$ 上。由 1)，则 $W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}=q\geq 1$，由定理 4 推论及预章定理 6 推论 3，则 $s_0=x_0-b$ 是 $t(s)=0$ 复根的实部点，$t(s)=0$ 在 $\alpha-b<\operatorname{Re}s<\beta-b$ 内的 q 个根 $s_1=z_1-b$，$s_2=z_2-b$，$\cdots$，$s_q=z_q-b$ 都在直线 $x=x_0-b$ 上，根据定理 5，$t(s)=0$ 在 s 平面直线 $x=x_0-b$ 上共有 $k_{x_0-b}=q$ 个根，而且

$$\{z_1-b,z_2-b,\cdots,z_q-b\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}=$$
$$ {}^{|(\alpha-b,\ \beta-b)|}_{W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{'}(b)}{1!},f(b)\right)}={}^{x_0-b}_{q}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{'}(b)}{1!},f(b)\right)}$$

再证充分性。若 $\{z_1-b,z_2-b,\cdots,z_q-b\}=\{s_1,s_2,\cdots,s_q\}=$
$$ {}^{|(\alpha-b,\ \beta-b)|}_{W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{'}(b)}{1!},f(b)\right)}={}^{x_0-b}_{q}\sqrt{\left(\frac{f^{(n)}(b)}{n!},\frac{f^{(n-1)}(b)}{(n-1)!},\cdots,\frac{f^{'}(b)}{1!},f(b)\right)}$$

则 $W^t_{\alpha-b}-W^t_{\beta-b}=q\geq 1$，由定理 4 推论，则 $s_0=x_0-b$ 是 $t(s)=0$ 复根的实部点，$t(s)=0$ 在 $\alpha-b<\operatorname{Re}s<\beta-b$ 内的 q 个根 $s_1=z_1-b$，$s_2=z_2-b$，$\cdots$，$s_q=z_q-b$ 都在直线 $x=x_0-b$ 上。由 1)，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，由定理 4 推论及预章定理 6 推论 3，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 内的 q 个根 $z_1,z_2,\cdots,z_q$ 都在直线 $x=x_0$ 上，根据定理 5，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，而且

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_q\}={}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_0}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}\text{。】}$$

§4 复根隔离的基本思想和系列根号的同步计算

设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$ ($c_0>0$)，在 z 平面的实轴上任意取一点 a，结式 $Q(x)=A_0x^{n^2}+A_1x^{n^2-1}+\cdots+A_{n^2-1}x+A_{n^2}$，若 a 是 $Q(x)=0$ 的实根，则 a 是 $f(z)=0$ 的非互素点,否则 a 是 $f(z)=0$ 的互素点。假设 $Q(x)=0$ 各不相同的实根个数为 H，那么 $f(z)=0$ 的非互素点个数也为 H ($H\le n^2$)，在实轴上除了这 H 个非互素点外，其余都是 $f(z)=0$ 的互素点。于是在实轴上任取一点 a，则 a 恰好是 $f(z)=0$ 的非互素点的可能性极低(几乎为零)，而 a 是 $f(z)=0$ 的互素点的可能性却极高(几乎是百分之百)。

在 z 平面上，我们称实轴上的区间 (α,β) 是与带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 相对应的区间，而带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 是与区间 (α,β) 相对应的区域。

复根隔离的**基本思想**：首先，找到 n 次方程 $f(z)=0$ 的 n 个复根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的存在区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$，其中 α,β 均为有限实数，$Q(\alpha)\ne0$，$Q(\beta)\ne0$，$W_\alpha=n$，$W_\beta=0$，于是有

$$\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{(\alpha\ \ ,\ \ \beta)}_{\ n\ \ -\ \ 0}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其次，对带形区域 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 进行分割及判断，假设在区间 (α,β) 内取到的分割点都是 $f(z)=0$ 的互素点，计算其相应的卢-金表格，就可将 $\alpha<\operatorname{Re}z<\beta$ 分割成若干个带形的子区域，在每个子区域内 $f(z)=0$ 根的个数可以简单计算。若在某个子区域内 $f(z)=0$ 根的个数为零，则把该子区域舍去，剩下的每个子区域内都含有 $f(z)=0$ 若干个根，组成的集合可用分根号表示。然后在剩下区域相对应的区间内，判断 $Q(x)=0$ 各不相同的实根个数。

1. 若为 1，则 $Q(x)=0$ 在该区间内只有一个实根，它是 $f(z)=0$ 复根的实部点，该区域内 $f(z)=0$ 的复根都在通过该实部点并且与虚轴平行的直线上，它们具有相同的实部，因此该区域为 $f(z)=0$ 复根的该实部点的同实部根的隔离区域；

2. 若大于 1，则对该区域继续进行这种分割判断工作，直到每个子区域(都含有 $f(z)=0$ 若干个根)相对应的区间内，$Q(x)=0$ 各不相同的实根个数都为 1 为止，其各区域都是 $f(z)=0$ 复根各实部点的同实部根的隔离区域。

利用卢-金表格和 $Q(x)=0$ 以及施图姆定理，对 $f(z)=0$ 的 n 个复根的存在区域所进行的这种分割判断工作，其实际效果是将 $f(z)=0$ 的所有复根按实部大小进行分割、分

类，并不断地将实部相等的复根归为一类的过程，而且只要经过有限多次的分割判断就能找到 $f(z)=0$ 复根所有实部点的同实部根的隔离区域 $\left|\left(\alpha_j,\ \ \beta_j\right)\right|$， $j=1,2,\cdots,J$，其中 $J\le H$ 且 $J\le n$， $\alpha_1<\beta_1\le\alpha_2<\beta_2\le\cdots\le\alpha_J<\beta_J$，使得

$$\left\{z_1,z_2,\cdots,z_n\right\}=\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{(\alpha\ ,\ \beta)}_{n\ -\ 0}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\bigcup_{j=1}^{J}{}^{\left|\left(\alpha_j\ \ \beta_j\right)\right|}_{W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其中 $Q\left(\alpha_j\right)\ne 0$， $Q\left(\beta_j\right)\ne 0$， $V_{\alpha_j}^{Q}-V_{\beta_j}^{Q}=1$， $W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}=q_j\ge 1$， $j=1,2,\cdots,J$ 。于是 $f(z)=0$ 复根的所有实部点为

$$x_j={}^{\left[\alpha_j,\beta_j\right]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\ \left(={}^{\left[\alpha_j,\beta_j\right]}\sqrt{Q(\ )}\right),\quad j=1,2,\cdots,J$$

其中 x_j 是 $Q(x)=0$ 的 $L_j=U_{\alpha_j}^{Q}-U_{\beta_j}^{Q}$ 重根。 $f(z)=0$ 复根的非实部点的个数为 $H-J$ 。

在实部点 x_j 的同实部根全集 ${}^{\left|\left(\alpha_j,\ \ \beta_j\right)\right|}_{W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 中， $f(z)=0$ 复根(含重根)的个数 $q_j=W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}$， $j=1,2,\cdots,J$ 。这 q_j 根都在 z 平面直线 $x=x_j$ 上；由§3 定理 5，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_j$ 上共有 $k_{x_j}=q_j$ 个根，且 ${}^{\left|\left(\alpha_j,\ \ \beta_j\right)\right|}_{W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}={}^{x_j}_{q_j}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$ 。由第二章§3 定理 11，则 $(4)^{x_j}$ 共有 q_j 个实根，这 q_j 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_j$ 上 q_j 个根的虚部，且 $\sum_{j=1}^{J}q_j=\sum_{j=1}^{J}\left(W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}\right)=n$ 。

设 $(4)^{x_j}$ 的次数为 K_j，则 $K_j\le L_j$，其中 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 时， $K_j=L_j$， $j=1,2,\cdots,J$ 。

如果继续对隔离区域 $\left|\left(\alpha_j,\ \ \beta_j\right)\right|$ 用中点分割法进行不断地分割及判断，就能得到 x_j 充分好的近似值， $j=1,2,\cdots,J$ 。

上述为隔离的基本思想，但要找到 $f(z)=0$ 复根所有实部点的同实部根的隔离区域，还有便捷方法：

1. 先求出 $Q(x)=0$ 的所有各不相同的实根

$$x_j={}^{\left[\alpha_j,\beta_j\right]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\ \left(={}^{\left[\alpha_j,\beta_j\right]}\sqrt{Q(\ )}\right),\quad j=1,2,\cdots,H\ 。$$

2. 对 x_j $(j=1,2,\cdots,H)$ 进行鉴别，不妨设 x_{j_0} 是其中任意一个，于是

1) 若 $W_{\alpha_{j_0}}-W_{\beta_{j_0}}=0$，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的非实部点，舍去；

2) 若 $W_{\alpha_{j_0}}-W_{\beta_{j_0}}=q_{j_0}\ge 1$，则 x_{j_0} 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$\alpha_{j_0}<\operatorname{Re}z<\beta_{j_0}$ 是 $f(z)=0$ 在

z 平面直线 $x=x_{j_0}$ 上的 q_{j_0} 个根的隔离区域，即该区域为 $f(z)=0$ 复根实部点 x_{j_0} 的同实部根的隔离区域。

3. 将 2. 中找到的 $f(z)=0$ 复根所有实部点的同实部根的隔离区域重新排序记为：$\left|\left(\alpha_j,\ \ \beta_j\right)\right|$，$j=1,2,\cdots,J$，其中 $J\le H$ 且 $J\le n$，$\alpha_1<\beta_1\le\alpha_2<\beta_2\le\cdots\le\alpha_J<\beta_J$，且 $Q\left(\alpha_j\right)\ne 0$，$Q\left(\beta_j\right)\ne 0$，$V_{\alpha_j}^Q-V_{\beta_j}^Q=1$，$W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}=q_j\ge 1$，$j=1,2,\cdots,J$。于是 $f(z)=0$ 复根的所有实部点为

$$x_j={}^{\left[\alpha_j,\beta_j\right]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}\ (={}^{\left[\alpha_j,\beta_j\right]}\sqrt{Q(\ )}),\quad j=1,2,\cdots,J\ 。$$

其中 x_j 是 $Q(x)=0$ 的 $L_j=U_{\alpha_j}^Q-U_{\beta_j}^Q$ 重根。n 次方程 $f(z)=0$ 的 n 个复根 $z_1,z_2,\cdots,z_n$ 的所组成的集合 $\{z_1,z_2,\cdots,z_n\}=\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\bigcup_{j=1}^{J}{}^{\left|\left(\alpha_j\ \ \beta_j\right)\right|}_{W_{\alpha_j}-W_{\beta_j}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$。

分析最大实部根问题

性质 设 $x_J={}^{\left[\alpha_J,\beta_J\right]}\sqrt{Q(\ )}$ 是 n 次方程 $f(z)=0$ 复根的最大实部点($W_{\alpha_J}-W_{\beta_J}=q_J\ge 1$)，则 $W_{\beta_J}=0$，$W_{\alpha_J}=q_J$。

证明 由题设则 $f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=\beta_J$ 及其右半平面上没有根，根据§2 定理 1，则 $f(z)=0$ 在点 β_J 的卢-金表格最左列的 $n+1$ 个系数均为正数，$W_{\beta_J}=0$，于是 $W_{\alpha_J}=q_J$。】

若 $x_J={}^{\left[\alpha_J,\beta_J\right]}\sqrt{Q(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根的最大实部点($W_{\alpha_J}-W_{\beta_J}=q_J\ge 1$)，由性质，则 $W_{\beta_J}=0$，$W_{\alpha_J}=q_J$，于是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_J$ 上有 $k_{x_J}=q_J=W_{\alpha_J}$ 个根，在其右半平面上没有根，故 $f(z)=0$ 在 z 平面上关于直线 $x=x_J$ 严格对称的根的个数为 W_{α_J}，由第二章§4 定理 2 推论和§3 定理 11，则 $(4)^{x_J}$ 的次数为 W_{α_J}，$(4)^{x_J}$ 有 W_{α_J} 个实根，这 W_{α_J} 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_J$ 上的 W_{α_J} 个根的虚部。

另一方面，根据§2 定理 2，则 $f(z)=0$ 在点 x_J 的卢-金表格最左列自上而下的前 $m+1$ 个数均为正数，$m=n-W_{\alpha_J}$，从第 $m+2$ 行开始往下的每一行系数均为零，第 $m+1$ 行系数所代表的 W_{α_J} 次方程 $(4)^{x_J}$ 有 W_{α_J} 个实根，这 W_{α_J} 个实根就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_J$ 上 W_{α_J} 个根的虚部。

下面研究系列根号的**同步计算**

定理 1 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$W_\alpha-W_\beta=q\ge 1$，于是

1. 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2. 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，则 $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 或 V^Q_β，其中

1) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|}{\underset{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{|(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2})|}{\underset{W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

证明 由 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，则 α,β 均为有限实数，且 $\alpha<x_0<\beta$，$Q(\alpha)\ne 0$，$Q(x_0)=0$，$Q(\beta)\ne 0$，$V^Q_\alpha-V^Q_\beta=1$。根据第一篇第一章§2 定理 1，有

1. 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$。

$W_\alpha-W_\beta=q\ge 1$，由§3 定理 5，则 $f(z)=0$ 在直线 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$ 上共有 $k_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=q$ 个根，且

$$\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{\underset{W_\alpha-W_\beta}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2. 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，则 $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 或 V^Q_β，其中

1) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$。

而 $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}$，$Q(\alpha)\ne 0$，$Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，$V^Q_\alpha-V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=0$，由§3 定理 3 推论，则 $W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=0$，

$W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta=W_\alpha-W_\beta=q\ge 1$，故 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{_{W_\alpha-W_\beta}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\sqrt[|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|]{_{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$

2) $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$ 时，与 1)同理可证。】

若 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$W_\alpha-W_\beta=q\ge 1$，由定理 1 就可用中点变号数分割法同步计算 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$ 和 $\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{_{W_\alpha-W_\beta}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$，方法如下：

1. 用中点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 把闭区间 $[\alpha,\beta]$ 分成两半

1) 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{_{W_\alpha-W_\beta}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\sqrt[\frac{\alpha+\beta}{2}]{_q(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}。$$

2) 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne 0$，则计算以 $Q(x),Q^{'}(x)$ 为基的施图姆序列标准型在点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的变号数 $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}$。$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$ 时，记 $\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\beta_1=\beta$；$V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$ 时，记 $\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，由定理 1，则 $x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\alpha_1,\beta_1]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，

$$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{_{W_\alpha-W_\beta}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\sqrt[|(\alpha_1,\ \beta_1)|]{_{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$，$\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

2. 以 $[\alpha_1,\beta_1]$ 作为 x_0 的新的隔离区间，重复上述做法

1) 若 $Q(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})=0$，则 $x_0=\sqrt[[\alpha_1,\beta_1]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$

$$\sqrt[|(\alpha_1,\ \beta_1)|]{_{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\sqrt[\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}]{_q(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2) 若 $Q(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})\ne 0$，则有 $x_0=\sqrt[[\alpha_1,\beta_1]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\alpha_2,\beta_2]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

$$\sqrt[|(\alpha_1,\ \beta_1)|]{_{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\sqrt[|(\alpha_2,\ \beta_2)|]{_{W_{\alpha_2}-W_{\beta_2}}(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_2,\beta_2)\subset(\alpha_1,\beta_1)$，$\beta_2-\alpha_2=\frac{1}{2^2}(\beta-\alpha)$。

3. 如此重复 N 次，可得 $x_0=\sqrt[[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\sqrt[[\alpha_N,\beta_N]]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$

$$\sideset{^{|(\alpha_{N-1},\ \beta_{N-1})|}_{W_{\alpha_{N-1}}-W_{\beta_{N-1}}}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}} = \sideset{^{|(\alpha_N,\ \beta_N)|}_{W_{\alpha_N}-W_{\beta_N}}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}}$$

其中 $x_0\in(\alpha_N,\beta_N)\subset(\alpha_{N-1},\beta_{N-1})\subset\cdots\subset(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$， $\beta_N-\alpha_N=\frac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。若以 α_N 或 β_N 作为 x_0 的近似值，则误差小于 $\frac{1}{2^N}(\beta-\alpha)$。

若继续这种构造区间的步骤，将得到闭区间序列，后一个闭区间包含在前一个闭区间中，它是一递缩的闭区间套：$[\alpha,\beta]\supset[\alpha_1,\beta_1]\supset[\alpha_2,\beta_2]\supset\cdots\supset[\alpha_N,\beta_N]\supset\cdots\cdots$

由于 $\lim\limits_{N\to\infty}(\beta_N-\alpha_N)=\lim\limits_{N\to\infty}\frac{\beta-\alpha}{2^N}=0$，所以两变量 α_N 和 β_N 趋向于共同的极限，设为 a，则 $\lim\limits_{N\to\infty}\alpha_N=\lim\limits_{N\to\infty}\beta_N=a$ 且 $\alpha<a<\beta$， 于是 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=a$

$$\sideset{^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}} = \sideset{^{a}_{q}}{}{\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}}。$$

引理　设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$）， $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，且 $f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$W_\alpha-W_\beta=q\ge1$，且有 1. $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$ 的充要条件是 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$。

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne0$，则 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne0$， $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 或 V^d_β， 其中

1) $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 时， $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\alpha$； 2) $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\beta$ 时， $V^Q_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^Q_\beta$。

证明　由题设则 $\alpha<x_0<\beta$， $f(x_0)=0$， $z=x_0$ 就是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的根，由第四章§1 定理 1 和§3 定理 2 推论，则 x_0 是 $f(z)=0$ 复根的实部点，$f(z)=0$ 在 $\alpha<\mathrm{Re}\,z<\beta$ 内至少有一个根，于是 $W_\alpha-W_\beta=q\ge1$。

由 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$ 则 $d(z)$ 的次数 ≥1，由第三章定理 13 推论则存在次数 >1 的实系数多项式 $h(x)$ 满足 $Q(x)=Q_d(x)h(x)$，其中 $d(z)$ 的次数 $=1$ 时，$Q(x)=d(x)h(x)$；$d(z)$ 的次数 ≥2 时， $Q(x)=\pm d(x)M_d^2(x)h(x)$， 于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$， 则 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$； 反过来， 若 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$， 根据第一篇第一章§2 定理 1，则 $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$， 于是 $x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$， $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$。

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne0$，由 1。则 $Q(\frac{\alpha+\beta}{2})\ne0$，再由第一篇第一章§2 定理 1 则 $V^d_{\frac{\alpha+\beta}{2}}=V^d_\alpha$ 或

V_{β}^{d}；$V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=V_{\alpha}^{Q}$ 或 V_{β}^{Q}，其中

1) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{d}=V_{\alpha}^{d}$ 时，$x_0={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，$x_0\in(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)$。假如 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=V_{\beta}^{Q}$，则 $x_0={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，$x_0\in$（$\alpha$,$\frac{\alpha+\beta}{2}$)，矛盾。故 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{Q}=V_{\alpha}^{Q}$。

2) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{d}=V_{\beta}^{d}$ 时，与 1)同理可证。】

定理 2 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，且 $f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，则 $W_{\alpha}-W_{\beta}=q\geq 1$，于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_{\alpha}-W_{\beta}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{\underset{q}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{d}=V_{\alpha}^{d}$ 或 V_{β}^{d}，其中

1) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{d}=V_{\alpha}^{d}$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_{\alpha}-W_{\beta}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \ \beta)|}{\underset{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_{\beta}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2) $V_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{d}=V_{\beta}^{d}$ 时，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$\overset{|(\alpha,\ \ \beta)|}{\underset{W_{\alpha}-W_{\beta}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\overset{|(\alpha,\ \ \frac{\alpha+\beta}{2})|}{\underset{W_{\alpha}-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

证明 根据引理和定理 1 及第一篇第一章§2 定理 1 即得。】

定理 3 设 $f(z)=c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_{n-1}z+c_n$（$c_0>0$），$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$，

且 $f(x_0)=0$， $x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，以 $d(z),d'(z)$ 为基的施图姆序列标准型的最后多项式没有实根，则 $W_\alpha-W_\beta=q\geq 1$，于是

1. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=^{\frac{\alpha+\beta}{2}}_{q}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}。$$

2. 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 1) $d(\alpha)d(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$ 时，有

$$x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})},$$

$$x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=^{[\frac{\alpha+\beta}{2},\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=^{|(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \beta)|}_{W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}。$$

2) $d(\alpha)d(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$ 时，有 $x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=^{[\alpha,\frac{\alpha+\beta}{2}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})},$$

$$^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=^{|(\alpha,\ \frac{\alpha+\beta}{2})|}_{W_\alpha-W_{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}。$$

证明 根据定理 2 及第一篇第一章§2 定理 3 即得。】

当 $(f(z),f'(z))=1$ 时， $f(z)=0$ 没有重根，若方程组 $(2)^{\#}$ 有解，则 $a(z),b(z)$ 的最大公因式 $d(z)$ 的次数 ≥ 1， $f(z)=f^*(z)d(z)$，因此 $d(z)=0$ 也没有重根，$(d(z),d'(z))=1$，于是以 $d(z),d'(z)$ 为基的施图姆序列标准型的最后多项式是非零常数，它当然没有实根。如果标准型的最后多项式没有实根，由定理 3 就可用普通二分法来同步计算 $d(z)=0$ 的单实根 $x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$ 和 $x_0=^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$ 及 $^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$，方法如下：

1. 用中点 $\frac{\alpha+\beta}{2}$ 把闭区间 $[\alpha,\beta]$ 分成两半

1) 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha+\beta}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha+\beta}{2}，$$

$$\underset{W_\alpha-W_\beta}{\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\underset{q}{\overset{\frac{\alpha+\beta}{2}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2) 若 $d(\frac{\alpha+\beta}{2})\neq 0$，则 $d(\alpha)d(\frac{\alpha+\beta}{2})>0$ 时，记 $\alpha_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$，$\beta_1=\beta$；$d(\alpha)d(\frac{\alpha+\beta}{2})<0$ 时，记 $\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\frac{\alpha+\beta}{2}$。由定理 3，则

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$$

$$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}$$

$$\underset{W_\alpha-W_\beta}{\overset{|(\alpha,\ \beta)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\underset{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{\overset{|(\alpha_1,\ \beta_1)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$，$\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$。

2. 以 $[\alpha_1,\beta_1]$ 作为新的隔离区间，重复上述做法

1) 若 $d(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})=0$，则 $x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}$，

$$x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}=\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}，$$

$$\underset{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{\overset{|(\alpha_1,\ \beta_1)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\underset{q}{\overset{\frac{\alpha_1+\beta_1}{2}}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

2) 若 $d(\frac{\alpha_1+\beta_1}{2})\neq 0$，则有 $x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\alpha_2,\beta_2]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0={}^{[\alpha_1,\beta_1]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_2,\beta_2]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}，$$

$$\underset{W_{\alpha_1}-W_{\beta_1}}{\overset{|(\alpha_1,\ \beta_1)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\underset{W_{\alpha_2}-W_{\beta_2}}{\overset{|(\alpha_2,\ \beta_2)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其中 $x_0\in(\alpha_2,\beta_2)\subset(\alpha_1,\beta_1)$，$\beta_2-\alpha_2=\frac{1}{2^2}(\beta-\alpha)$。

3. 如此重复 N 次，可得 $x_0={}^{[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{(d_0,d_1,\cdots,d_{n_1-1},d_{n_1})}$，

$$x_0={}^{[\alpha_{N-1},\beta_{N-1}]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}={}^{[\alpha_N,\beta_N]}\sqrt{(A_0,A_1,\cdots,A_{n^2-1},A_{n^2})}，$$

$$\underset{W_{\alpha_{N-1}}-W_{\beta_{N-1}}}{\overset{|(\alpha_{N-1},\ \beta_{N-1})|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}=\underset{W_{\alpha_N}-W_{\beta_N}}{\overset{|(\alpha_N,\ \beta_N)|}{}}\sqrt{(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1},c_n)}$$

其中 $x_0 \in (\alpha_N, \beta_N) \subset (\alpha_{N-1}, \beta_{N-1}) \subset \cdots \subset (\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$， $\beta_N - \alpha_N = \frac{1}{2^N}(\beta - \alpha)$。若以 α_N 或 β_N 作为 x_0 的近似值，则误差小于 $\frac{1}{2^N}(\beta - \alpha)$。

若继续这种构造区间的步骤，将得到闭区间序列，后一个闭区间包含在前一个闭区间中，它是一递缩的闭区间套：$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \cdots \supset [\alpha_N, \beta_N] \supset \cdots\cdots$

由于 $\lim\limits_{N\to\infty}(\beta_N - \alpha_N) = \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\beta - \alpha}{2^N} = 0$，所以两变量 α_N 和 β_N 趋向于共同的极限，设为 a，则 $a \in (\alpha, \beta)$，于是 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(d_0, d_1, \cdots, d_{n_1-1}, d_{n_1})} = a$

$$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{(A_0, A_1, \cdots, A_{n^2-1}, A_{n^2})} = a$$

$$\substack{|(\alpha,\quad\beta)| \\ W_\alpha - W_\beta}\sqrt{(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n)} = \substack{a \\ q}\sqrt{(c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}, c_n)}\text{。}$$

§5 同实部根全集的分类判定与统一解法的关系

定义 设 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha - W_\beta = q \geq 1$，则 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的同实部根全集，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x = x_0$ 上共有 $k_{x_0} = q$ 个根，且 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )} = {}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}$，于是 1. 当直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根全是 $f(z)=0$ 的实根时，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 q 重实根，则称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全实根类型的同实部根全集。

2. 当直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根不全是 $f(z)=0$ 的实根时，则称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有虚根类型的同实部根全集，其中 1) $f(x_0)=0$ 时，称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集；2) $f(x_0) \neq 0$ 时，称 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全虚根类型的同实部根全集。

定理 设 $x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha - W_\beta = q \geq 1$，$l$ 为非负整数，$z = x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根实部点 x_0 的同实部根全集，则

1. ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全实根类型的同实部根全集的充要条件是：

$$l = U_\alpha^d - U_\beta^d = W_\alpha - W_\beta = q \text{。}$$

2. ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有虚根类型的同实部根全集的充要条件是：

$$l = U_\alpha^d - U_\beta^d < W_\alpha - W_\beta = q \text{。}$$

其中 1) ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集的充要条件是：

$$1 \leq l = U_\alpha^d - U_\beta^d < W_\alpha - W_\beta = q \text{；}$$

2) ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全虚根类型的同实部根全集的充要条件是：$l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 0$。

证明 由题设，则 $f(z)=0$ 在直线 $x = x_0$ 上共有 q 个根；根据第四章§3 定理 4，则有 $l = U_\alpha^d - U_\beta^d$，于是 1. 直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根全是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$l = U_\alpha^d - U_\beta^d = W_\alpha - W_\beta = q$。2. 直线 $x = x_0$ 上的这 q 个根不全是 $f(z)=0$ 的实根的充要条件是：$l = U_\alpha^d - U_\beta^d < W_\alpha - W_\beta = q$。其中 1) $f(x_0)=0$ 的充要条件是：$l \geq 1$；2) $f(x_0) \neq 0$ 的

充要条件是：$l=0$。再由定义即得。】

推论 设$\left(f(z),f^{'}(z)\right)=1$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha - W_\beta = q \ge 1$，$l$为非负整数，$z=x_0$是$f(z)=0$的$l$重根，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$是$f(z)=0$复根实部点$x_0$的同实部根全集，则$l=U_\alpha^d - U_\beta^d$，$l=1$或$0$，其中 1. $l=1$时，$f(x_0)=0$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，$z=x_0$是$f(z)=0$的单实根，于是 1) 若$q=1$，则${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$；2) 若$q \ge 2$，则${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$为有实根虚根类型的同实部根全集，这个实根就是$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$。

2. $l=0$时，$f(x_0)\ne 0$，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$为全虚根类型的同实部根全集。

证明 由题设则$f(z)=0$在直线$x=x_0$上q个根均为单根；由第四章§3 定理 4 推论 2，则$l=U_\alpha^d - U_\beta^d$，$l=1$或0，其中 1. $l=1$时，$f(x_0)=0$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，$z=x_0$是$f(z)=0$的单实根，再由定理即得；2. $l=0$时，$f(x_0)\ne 0$，再由定理即得。】

例题 设$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$L=U_\alpha^Q - U_\beta^Q = 1$，$l$为非负整数，$z=x_0$是$f(z)=0$的$l$重根，根据第四章§3 例题，则$l=U_\alpha^d - U_\beta^d$，$l=1$或$0$，其中$l=1$时，$f(x_0)=0$，$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为$f_m(y)=a_{m0}y$，其中$a_{m0}\ne 0$，$a_{m0}$为实数；$l=0$时，$f(x_0)\ne 0$，$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为$f_m(y)=a_{m0}[y+\lambda_1]$，其中$a_{m0}\ne 0$，$\lambda_1 \ne 0$，$a_{m0},\lambda_1$均为实数。

总之，$(4)^{x_0}$只有一个单实根，$f(z)=0$在z平面直线$x=x_0$上只有一个单根，于是$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m} - U_{+\infty}^{f_m} = 1$个根。不妨设$W_\alpha - W_\beta = q$，由§3 定理 5，则

$$k_{x_0}=U_{-\infty}^{f_m} - U_{+\infty}^{f_m} = W_\alpha - W_\beta = q = 1,$$

${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$是$f(z)=0$复根实部点$x_0$的同实部根全集，且${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )} = {}^{x_0}_{1}\sqrt{f(\ )}$，由定理则$l=1$时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是$x_0 = {}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，无须再求解；$l=0$时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha - W_\beta}\sqrt{f(\ )}$为全虚根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是$f(z)=0$在直线$x=x_0$上的一个非$x_0$单根，需要具体求出。

下面讨论同实部根全集的分类判定与统一解法的关系

设 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$，$W_\alpha-W_\beta=q\geq1$，则 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 复根实部点 x_0 的同实部根全集，$f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=x_0$ 上共有 $k_{x_0}=q$ 个根，且 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}$，$(3)^{x_0}$ 内 $f_m(y)$ 的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数 $K=l+k\geq1$，其中 l 和 k 均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq0$，$\lambda_k\neq0$，且 a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 均为实数，则 0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重根，于是 $z=x_0$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重根，由第四章§3 定理 4 推论 1，则 $l=U_\alpha^d-U_\beta^d$，其中 $l=0$ 时，$f(x_0)\neq0$；$l\geq1$ 时，$f(x_0)=0$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$。若 k 为正整数，令 $p(y)=y^k+\lambda_1y^{k-1}-\lambda_2y^{k-2}-\lambda_3y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k$，则

$$f_m(y)=a_{m0}y^lp(y)$$

实系数 k 次多项式 $p(y)$ 为点 x_0 的 $p(y)$，并且 $p(-\infty)\neq0$，$p(0)\neq0$，$p(+\infty)\neq0$。

点 x_0 的以 $p(y),p'(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型在点 y $(y\in R)$ 的变号数分别记为 V_y^p 和 U_y^p，则 $p(y)=0$ 共有 $U_{-\infty}^p-U_{+\infty}^p$ 个实根，$(4)^{x_0}$ 共有 $l+\left(U_{-\infty}^p-U_{+\infty}^p\right)$ 个实根，$f(z)=0$ 在 z 平面的直线 $x=x_0$ 上共有 $l+\left(U_{-\infty}^p-U_{+\infty}^p\right)$ 个根，由§3 定理 5，则 $l+\left(U_{-\infty}^p-U_{+\infty}^p\right)$ $=U_{-\infty}^{f_m}-U_{+\infty}^{f_m}=W_\alpha-W_\beta=q$，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}={}^{x_0}_{q}\sqrt{f(\ )}$。又 $l=U_\alpha^d-U_\beta^d$，于是

$$U_{-\infty}^p-U_{+\infty}^p=\left(W_\alpha-W_\beta\right)-\left(U_\alpha^d-U_\beta^d\right)=q-l。$$

根据定理，则

1. $l=U_\alpha^d-U_\beta^d=W_\alpha-W_\beta=q$ 时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全实根类型的同实部根全集，且

$$U_{-\infty}^p-U_{+\infty}^p=\left(W_\alpha-W_\beta\right)-\left(U_\alpha^d-U_\beta^d\right)=q-l=0，\quad l=q\geq1。$$

$p(y)=0$ 无实根，$(4)^{x_0}$ 没有非 0 实根，0 是 $(4)^{x_0}$ 的 q 重实根，$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上没有非 x_0 根，$z=x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 的 q 重实根，于是这 q 个 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$ 就是同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的全部元素。

2. $1\leq l=U_\alpha^d-U_\beta^d<W_\alpha-W_\beta=q$ 时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为有实根虚根类型的同实部根全集。

这时

$$U_{-\infty}^{p}-U_{+\infty}^{p}=\left(W_{\alpha}-W_{\beta}\right)-\left(U_{\alpha}^{d}-U_{\beta}^{d}\right)=q-l\ \geq 1$$

$p(y)=0$ 共有 $q-l$ 个实根，由 $f_m(y)=a_{m0}y^l p(y)$ 且 $p(0)\neq 0$ 可知，$(4)^{x_0}$ 共有 $q-l$ 个非 0 实根，0 是 $(4)^{x_0}$ 的 l 重实根；$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上共有 $q-l$ 个非 x_0 的根，$z=x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$ 是 $f(z)=0$ 的 l 重实根，于是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的这 q 个根就是同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的全部元素。

3. $l=U_{\alpha}^{d}-U_{\beta}^{d}=0$ 时，${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 为全虚根类型的同实部根全集。这时

$$U_{-\infty}^{p}-U_{+\infty}^{p}=W_{\alpha}-W_{\beta}=q$$

$p(y)=0$ 共有 q 个实根，由 $f_m(y)=a_{m0}p(y)$ 且 $p(0)\neq 0$ 可知，$(4)^{x_0}$ 有 q 个非 0 的实根，0 不是 $(4)^{x_0}$ 的根；$f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上有 q 个非 x_0 根，$z=x_0$ 不是 $f(z)=0$ 的根，于是 $f(z)=0$ 在直线 $x=x_0$ 上的这 q 个非 x_0 根就是同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的全部元素。

从以上讨论可以看出 1) 全实根类型的同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的 q 个元素就是 q 个 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，无须再求解；2) 对有实根虚根类型的同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$，若能求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$ 的精确值 a，则 $a\in R$，$Q(a)=0$，就可以用第四章的统一解法求出 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，它们就是 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的所有元素；3) 对全虚根类型的同实部根全集 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$，若能求得 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 的精确值 a，也可以用第四章的统一解法求出 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的所有根，它们就是 ${}^{|(\alpha,\ \beta)|}_{W_\alpha-W_\beta}\sqrt{f(\ )}$ 的所有元素。

要通过实根号运算或者计算求出 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 的精确值 a 是有难度的，但也不是绝无可能。假如 $x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{d(\ )}$ 是 $d(z)=0$ 所有复根中重数最大的根，那么通过以 $d(z),d'(z)$ 为基的施图姆序列扩展型内部的实根号运算，是可以求得 x_0 的精确值 a 的，$x_0={}^{[\alpha,\beta]}\sqrt{Q(\ )}$ 也同样如此。

如此不便就有必要探求 $\left(f(z),f'(z)\right)=1$ 条件下，$f(z)=0$ 的统一近似解法。

§6 方程复根统一近似解法

设$\left(f(z), f^{'}(z)\right)=1$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$，$L=U_{\alpha}^{Q}-U_{\beta}^{Q}$，$W_{\alpha}-W_{\beta}=q\geq 1$，则$\sqrt[{W_{\alpha}-W_{\beta}}]{f(\ )}^{|(\alpha,\ \beta)|}$是$f(z)=0$复根实部点$x_0$的同实部根全集，$f(z)=0$在$z$平面直线$x=x_0$上共有$k_{x_0}=q$个根，且$\sqrt[{W_{\alpha}-W_{\beta}}]{f(\ )}^{|(\alpha,\ \beta)|}=\sqrt[q]{f(\ )}^{x_0}$。在无法求得$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{Q(\ )}$的精确值$a$的情况下可以设$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y^l[y^k+\lambda_1 y^{k-1}-\lambda_2 y^{k-2}-\lambda_3 y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \qquad (4)^{x_0}$$

其次数$K=l+k$，其中l和k均为非负整数但不能同时为零，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且a_{m0}，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数，则0是$(4)^{x_0}$的$l$重根，$z=x_0$是$f(z)=0$的$l$重根，由第四章§3定理5推论1，则有$K=L=U_{\alpha}^{Q}-U_{\beta}^{Q}$，$l=U_{\alpha}^{d}-U_{\beta}^{d}$，$k=\left(U_{\alpha}^{Q}-U_{\beta}^{Q}\right)-\left(U_{\alpha}^{d}-U_{\beta}^{d}\right)$，其中$l=0$或1，$l=0$时，$f(x_0)\neq 0$；$l=1$时，$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$。于是可求得$f_m(y)$的次数$K=l+k$中$K$，$l$，$k$的具体数值，这就为$f(z)=0$的近似解法创造了有利条件。

下面介绍近似解法，根据§5定理推论，则

1. $l=1$时，则$f(x_0)=0$，$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$，$z=x_0$是$f(z)=0$在直线$x=x_0$上的单实根，于是 1) 若$q=1$，则$\sqrt[{W_{\alpha}-W_{\beta}}]{f(\ )}^{|(\alpha,\ \beta)|}$为全实根类型的同实部根全集，它只有一个元素就是$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$，无须再求解。

2) 若$q\geq 2$，则$\sqrt[{W_{\alpha}-W_{\beta}}]{f(\ )}^{|(\alpha,\ \beta)|}$为有实根虚根类型的同实部根全集，这个实根就是$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$。根据第四章§3定理5推论2，$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}y[y^k+\lambda_1 y^{k-1}-\lambda_2 y^{k-2}-\lambda_3 y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k]$$

其中$k=\left(U_{\alpha}^{Q}-U_{\beta}^{Q}\right)-1\geq 0$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且$a_{m0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数。

我们说$k\neq 0$，否则假如$k=0$，则$L=U_{\alpha}^{Q}-U_{\beta}^{Q}=1$，$f_m(y)=a_{m0}y$，$(4)^{x_0}$只有1个实根，$f(z)=0$在直线$x=x_0$只有1个根，矛盾。于是$k$为正整数。

若无法求得$x_0=\sqrt[{[\alpha,\beta]}]{d(\ )}$的精确值$a$，而通过根号计算求得其充分好的近似值$r$，

即

$$x_0 = a \approx r\text{，其中}\alpha < r < \beta\text{，}\ d(r)\approx 0\text{，但}\ d(r)\neq 0\text{，}\ Q(r)\neq 0$$

r 是 $f(z)=0$ 的互素点，作点 r 的以 $f_0(y), f_1(y)$ 为基的施图姆序列

$$\{f_0(y), f_1(y), f_2(y), \cdots, f_{m_r}(y)\} \tag{3}^r$$

其最后多项式 $f_{m_r}(y)$ 是非零常数。由于 $r\in R$，$d(r)\approx 0$，根据第三章定理 5，则 $f(r)\approx 0$，我们称 $z_0 \approx r$ 是 $f(z)=0$ 的一个近似的单实根。

由多项式函数的连续性，可取 $(3)^r$ 内次数为 $K = U_\alpha^Q - U_\beta^Q$ 的 $f_{m_0}(y)= f_{m_0}(r, y)$（$m_0 < m_r$），作为 $(3)^a$ 内 $f_m(y)= f_m(a, y)$ 的近似函数，并依据

$$l = U_\alpha^d - U_\beta^d = 1\text{，}\ k = \left(U_\alpha^Q - U_\beta^Q\right) - 1$$

对 $f_{m_0}(y)$ 中有关系数作适当的修改，并改称为点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$。假设点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 的标准式为

$$f_{m_0}(y) = a_{m_0 0}y[y^k + \lambda_1 y^{k-1} - \lambda_2 y^{k-2} - \lambda_3 y^{k-3} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \tag{4}^r$$

其中 k 为正整数，$a_{m_0 0}\neq 0$，$\lambda_k \neq 0$，且 $a_{m_0 0}, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 均为实数。令

$$p(y) = y^k + \lambda_1 y^{k-1} - \lambda_2 y^{k-2} - \lambda_3 y^{k-3} + \cdots + (-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y + (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k\text{，则}$$

$$f_{m_0}(y) = a_{m_0 0}\,y\,p(y)$$

实系数 k 次多项式 $p(y)$ 称为点 r 近似的 $p(y)$，且 $p(-\infty)\neq 0$，$p(0)\neq 0$，$p(+\infty)\neq 0$。

作点 r 以近似的 $p(y), p'(y)$ 为基的施图姆序列的标准型和扩展型，标准型和扩展型在点 y $(y\in R)$ 的变号数分别记为 V_y^p 和 U_y^p。

必须说明：由于 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$，若 a 是 $f(z)=0$ 复根的实部点 x_0 的精确值，$Q(a)=0$，则点 a 的 $p(y)$ 没有重根，$\left(p(y), p'(y)\right)=1$，作点 a 以 $p(y), p'(y)$ 为基的施图姆序列只有标准型，没有扩展型，按约定：点 a 的以 $p(y), p'(y)$ 为基的施图姆序列的扩展型=标准型，在点 y $(y\in R)$ 的变号数有 $U_y^p = V_y^p$。

事实上，$Q(a)=0$，假如点 a 的 $p(y)$ 有 2 重以上根，不妨设 y_0 是 $p(y)=0$ 的 l_0 重根，且 $l_0\geq 2$，由 $f_m(y)=a_{m0}y^l p(y)$ 且 $p(0)\neq 0$，则 $y_0\neq 0$，y_0 是 $(4)^a$ 的 l_0 重非 0 根，于是 1) 当 $y_0\in R$ 时，$z_0 = a + iy_0$ 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=a$ 上的 l_0 重非 a 根，$l_0\geq 2$，与 $\left(f(z), f'(z)\right)=1$

矛盾；2) 当 $y_0 \notin R$ 时，y_0，$\overline{y_0}$ 是 $(4)^a$ 的一对 l_0 重共轭复根，假设 $z_1 = a + iy_0$ 和 $z_2 = a + i\overline{y_0}$ 分别是 $f(z)=0$ 的 l_1 重和 l_2 重根，则 $l_0 = \min(l_1, l_2)$，$l_1 \ge l_0 \ge 2$，$l_2 \ge l_0 \ge 2$，与 $\left(f(z), f^{'}(z)\right)=1$ 矛盾。所以，点 a 的 $p(y)$ 没有重根。

但是，r 作为实部点 x_0 的近似值，作点 r 以近似的 $p(y), p^{'}(y)$ 为基的施图姆序列却可能既有标准型又有扩展型。点 r 近似的 $p(y)$ 必须满足的**条件**是：

$$U_{-\infty}^{p} - U_{+\infty}^{p} = \left(W_\alpha - W_\beta\right) - \left(U_\alpha^d - U_\beta^d\right) = q-1\ (\ge 1)\text{。}$$

若不满足该条件，必须对点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 有关系数再作适当修改，直到满足该条件为止。

根据该条件，则 $U_{-\infty}^{p} - U_{+\infty}^{p} \ge 1$，设 $V_{-\infty}^{p} - V_{+\infty}^{p} = k_1$，则 $k_1 \ge 1$。否则，假设 $V_{-\infty}^{p} - V_{+\infty}^{p} = 0$，则 $U_{-\infty}^{p} - U_{+\infty}^{p} = 0$，矛盾。$V_{-\infty}^{p} - V_{+\infty}^{p} = k_1 \ge 1$，$p(y)=0$ 共有 k_1 个各不相同的实根，由 $f_{m_0}(y) = a_{m_0 0}\, y p(y)$ 且 $p(0)\ne 0$ 可知，则这 k_1 个实根也是 $(4)^r$ 的 k_1 个各不相同的非 0 实根，从而 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上有 k_1 个各不相同的非 r 近似根。

我们可在 $(-\infty,+\infty)$ 内找到 $p(y)=0$ 实根的 k_1 个隔离区间 $[\varepsilon_1,\eta_1], [\varepsilon_2,\eta_2], \cdots, [\varepsilon_{k_1},\eta_{k_1}]$，其中 $\varepsilon_1 < \eta_1 \le \varepsilon_2 < \eta_2 \le \cdots \le \varepsilon_{k_1} < \eta_{k_1}$，且 $p(\varepsilon_j)\ne 0$，$p(\eta_j)\ne 0$，$V_{\varepsilon_j}^{p} - V_{\eta_j}^{p} = 1$，$j=1,2,\cdots,k_1$。于是 $p(y)=0$ 的这 k_1 个各不相同的实根(同时也是 $(4)^r$ 的 k_1 个各不相同的非 0 实根)就可表示为

$$y_j = \sqrt[\lfloor \varepsilon_j,\eta_j \rfloor]{\left(1,\lambda_1,\cdots,(-1)^{\left\lceil \frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1},(-1)^{\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

其中 y_j 是 $p(y)=0$ 的 $l_j = U_{\varepsilon_j}^{p} - U_{\eta_j}^{p}$ 重实根。由 $f_{m_0}(y) = a_{m_0 0}\, y p(y)$ 且 $p(0)\ne 0$ 可知，y_j 是 $(4)^r$ 的 $l_j = U_{\varepsilon_j}^{p} - U_{\eta_j}^{p}$ 重非 0 实根。

于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上的 k_1 个各不相同的非 r 近似根就可表示为

$$z_j \approx r + i\sqrt[\lfloor \varepsilon_j,\eta_j \rfloor]{\left(1,\lambda_1,\cdots,(-1)^{\left\lceil \frac{k-1}{2}\right\rceil}\lambda_{k-1},(-1)^{\left\lceil \frac{k}{2}\right\rceil}\lambda_k\right)},\quad j=1,2,\cdots,k_1$$

由第二章§2 定理 5，则 z_j 是 $f(z)=0$ 在直线 $x=r$ 上的 $l_j = U_{\varepsilon_j}^{p} - U_{\eta_j}^{p}$ 重非 r 近似根。$z_0 \approx r$ 是 $f(z)=0$ 近似的单实根，于是 $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上的近似根的个数为

$$1+\sum_{j=1}^{k_1} l_j = 1+\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{p} - U_{\eta_j}^{p}\right) = 1+\left(U_{-\infty}^{p} - U_{+\infty}^{p}\right) = W_\alpha - W_\beta = q$$

值得注意：由于$\left(f(z), f'(z)\right)=1$，如果出现近似根$z_{j_0}$的重数

$$l_{j_0}=U_{\varepsilon_{j_0}}^{p}-U_{\eta_{j_0}}^{p}\geq 2$$

并不说明$f(z)=0$有 2 重以上根，仅表明它有l_{j_0}个复根的近似表达式相同，而且若用另一个比r更好的r_1作为x_0的近似值，作点r_1的以$f_0(y), f_1(y)$为基的施图姆序列，用同样方法所求出的这l_{j_0}个近似的根就会有不同的表达式。

2. $l=0$时，$f(x_0)\neq 0$，$\sqrt[|(\alpha,\ \beta)|]{f(\ )}_{W_\alpha-W_\beta}$为全虚根类型的同实部根全集。根据第四章§3 定理 5 推论 3，$(3)^{x_0}$内$f_m(y)$的标准式为

$$f_m(y)=a_{m0}[y^k+\lambda_1 y^{k-1}-\lambda_2 y^{k-2}-\lambda_3 y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k]$$

其中$k=U_\alpha^Q-U_\beta^Q\geq 1$，$a_{m0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且$a_{m0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数。

若无法求得$x_0=\sqrt[[\alpha,\beta]]{Q(\ )}$的精确值$a$，而通过根号计算求得其充分好的近似值$r$，即$x_0=a\approx r$，其中$\alpha<r<\beta$，$Q(r)\approx 0$，但$Q(r)\neq 0$。

r是$f(z)=0$的互素点，作点r的以$f_0(y), f_1(y)$为基的施图姆序列

$$\left\{f_0(y), f_1(y), f_2(y),\cdots, f_{m_r}(y)\right\} \qquad (3)^r$$

其最后多项式$f_{m_r}(y)$是非零常数 我们称r是$f(z)=0$复根一个近似的实部点。

由多项式函数的连续性，可取$(3)^r$内次数为$K=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$的$f_{m_0}(y)=f_{m_0}(r,y)$（$m_0<m_r$），作为$(3)^a$内$f_m(y)=f_m(a,y)$的近似函数，并依据

$$l=U_\alpha^d-U_\beta^d=0,\quad k=U_\alpha^Q-U_\beta^Q$$

对$f_{m_0}(y)$中有关系数作适当的修改，并改称为点r近似的$f_{m_0}(y)$。假设点r近似的$f_{m_0}(y)$的标准式为

$$f_{m_0}(y)=a_{m_0 0}[y^k+\lambda_1 y^{k-1}-\lambda_2 y^{k-2}-\lambda_3 y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k] \qquad (4)^r$$

其中k为正整数，$a_{m_0 0}\neq 0$，$\lambda_k\neq 0$，且$a_{m_0 0},\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$均为实数。令

$$p(y)=y^k+\lambda_1 y^{k-1}-\lambda_2 y^{k-2}-\lambda_3 y^{k-3}+\cdots+(-1)^{\left[\frac{k-1}{2}\right]}\lambda_{k-1}y+(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}\lambda_k\text{，则}$$

$$f_{m_0}(y)=a_{m_0 0}p(y)$$

实系数k次多项式$p(y)$称为点r近似的$p(y)$，且$p(-\infty)\neq 0$，$p(0)\neq 0$，$p(+\infty)\neq 0$。

余下部分与 1. 2)相同的不再赘述，所不同的是：

1) 点 r 近似的 $p(y)$ 必须满足的**条件**是：$U_{-\infty}^{p}-U_{+\infty}^{p}=W_{\alpha}-W_{\beta}=q$ 。

若不满足该条件，必须对点 r 近似的 $f_{m_0}(y)$ 有关系数再作适当修改，直到满足该条件为止。

2) $f(z)=0$ 在 z 平面直线 $x=r$ 上的近似根的个数为

$$\sum_{j=1}^{k_1} l_j=\sum_{j=1}^{k_1}\left(U_{\varepsilon_j}^{p}-U_{\eta_j}^{p}\right)=U_{-\infty}^{p}-U_{+\infty}^{p}=W_{\alpha}-W_{\beta}=q$$

参考文献

[1] 王祖樾. 方程与多项式[M]. 杭州: 浙江人民出版社, 1979: 28-29, 75, 101-105.

[2] 王东明, 牟晨琪, 李晓亮, 等. 多项式代数[M]. 北京: 高等教育出版社, 2011.

[3] 王则柯, 同伦方法纵横谈[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011.

[4] 方嘉琳, 点集拓扑学[M]. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1983.

[5] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编. 高等代数[M]. 北京: 人民教育出版社, 1978: 4-28, 147-148.

[6] 现代应用数学手册编委会. 计算与数值分析卷[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005 §5 方程的求根, 5. 12 复根的隔离(297-301).

$5.00
ISBN 978-1-64997-803-5
50500
9 781649 978035