

Study on the Magnetic Property of Low Dimension Topological Insulator

Pinglan Yan, Xiaojing Li

College of Physics and Energy, Fujian Normal University, Fuzhou Fujian
Email: xjli@fjnu.edu.cn

Received: May 1st, 2015; accepted: May 16th, 2015; published: May 19th, 2015

Copyright © 2015 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Quantum spin hall effect (QSHE) is intrinsic phenomena in the topological insulator (HgTe). We investigate the energy spectrum of low dimension HgTe topological insulator with different structure under the magnetic field. Then we find that the square topological insulator quantum dot (TIQD) and disk-like TIQD both have edge states without magnetic field, and these edge states is very stable structure property. But there is quantum hall effect in the presence of external magnetic field; namely the edge states of HgTe QD all will be affected under magnetic field; especially the electrons will move toward the same direction along the edge of disk-like HgTe QD under magnetic field. The main reason of all these physical phenomena is that the magnetic field breaks the time reversal symmetry.

Keywords

Topological Insulator, Edge State, Magnetic Field

低维拓扑绝缘体磁特性研究

严萍兰, 李晓静

福建师范大学物理与能源学院, 福建 福州
Email: xjli@fjnu.edu.cn

收稿日期: 2015年5月1日; 录用日期: 2015年5月16日; 发布日期: 2015年5月19日

摘要

量子自旋霍尔效应是拓扑绝缘体(HgTe)中固有的现象,我们研究了不同结构的低维HgTe拓扑绝缘体材料在磁场下的能谱,经研究发现无论是方形量子点还是盘状量子点都有边缘态的存在,并且这些无需磁场存在的边缘态是一个很稳定的结构性质。但是在其施加外磁场时出现的是量子霍尔效应,即在磁场下HgTe量子点的边缘态都将受到影响,尤其是盘状的HgTe量子点在磁场下其边沿处电子都往同一方向运动。所有这些物理现象主要是由于磁场破坏了时间反演对称性而导致。

关键词

拓扑绝缘体, 边缘态, 磁场

1. 绪论

拓扑绝缘体是最近发现新型的量子态物质[1]-[4],由于拓扑绝缘体独特的物理特征,不管是在理论上还是实验上都引起了人们很大的关注。拓扑绝缘体由于受到时间反演对称性的保护,在其能谱结构中是一个在内部电子能态是具有能隙的绝缘体,但是在表面却是无间隙的边界态或边缘态,故拓扑绝缘体的能带结构可由Z2拓扑不变量来刻画。同时拓扑绝缘体中的边缘态在背散射中是受保护的,所以其产生电流沿着边沿通道上运动是会产生耗散的。故在拓扑绝缘体是一种本身就存有量子自旋霍尔效应的物质,这在电子自旋学领域产生了很大的兴趣。由于理论方面上的发展,首次在HgTe系统上发现了拓扑绝缘体的特征,并在实验上也得到了证实,从此以后许多拓扑绝缘体得到急剧的发展。二维(CdTe/HgTe/CdTe)量子阱中发现随着HgTe量子阱阱宽 d_{QW} 的不断变化,其能带结构也发生了变化[5],即 $d_{QW} < d_c$ 时,其能带结构是s-型 Γ_8 带所在位置是低于p-型 Γ_6 带,这与常规的绝缘体的性质没有区别;但是 $d_{QW} < d_c$ 时,在HgTe量子阱中的能带结构出现了翻转的现象,s-型 Γ_8 反而是位于p-型 Γ_6 之上[6]-[8],所以也常常将拓扑绝缘体材料称为反常带隙半导体材料,其中 d_c 是临界厚度。在反常带隙半导体材料中,由于导带和价带的强烈混合,将导致极强的自旋轨道耦合。这样强的自旋轨道耦合将导致强烈的自旋劈裂和拓扑边缘态的出现。HgTe拓扑绝缘体在其内部是绝缘体同时在其表面显示的却是导体特性,故HgTe量子阱边界处的能带结构表现出的是一种无带隙的特点,又由于时间反演对称性的保护,在拓扑绝缘体的表面稳定地存在贯穿带隙的边缘态或表面态[9]。

在均匀磁掺杂或者施加磁场能够使受时间反演对称性保护的无间隙边缘态变成具有能隙的态[10]。Bi₂Se₃拓扑绝缘体的纳米带在轴对称的磁场将表现出Aharonov-Bohm(AB)震荡[11]。这些反常AB震荡特征是考虑到拓扑绝缘体的表面态和磁通量之间耦合作用而出现的[12][13]。此外在理论上研究已经表示在磁场下的HgTe/CdTe量子阱从量子霍尔效应到量子反常霍尔效应拓扑绝缘体的相位也发生了转变[14][15]。同时在二维拓扑系统通过AB效应模型理论模拟显示出磁通量同样影响着无间隙边界的输运性质[16]。高限制系统里如盘状拓扑绝缘体量子点,无间隙边缘态随着角动量变成了离散的能态形式,同时电子态密度分布呈现的是环状,利用量子点的这些特征有望观测到AB效应来检测边缘态的存在[17]。而对于不同形状在磁场下的输运特性如方形量子点和盘状量子点具有许多一致的特征,其透射系数随着磁场的变化呈周期性的变化[18]。因此对于磁场下的拓扑绝缘体表现出的许多特性值得我们进一步的研究。

本文从理论上研究了低维拓扑绝缘体在磁场下的边缘态特性,HgTe量子阱中子能量随着波矢 k 变化的分布成线性关系,我们发现方形的和盘状的HgTe量子点都是具有边缘态存在。当通过施加外磁场的

时候,能够破坏拓扑绝缘体的时间反演对称性,量子阱中的能量随着波矢 k 变化的分布失去了线性关系。同时发现磁场使盘状 HgTe 量子点和磁性的盘状 HgTe 量子点的边缘态都失去了对称性,即在边界处的沿顺时针和逆时针两个方向运动的电子将被过滤掉其中一个方向的电子,从而实现量子霍尔效应。此研究能够为微电子器件的制造提供有利的物理条件。

2. 理论基础

本文采用的拓扑绝缘体有效哈密顿量是由微扰理论而推导出的,该有效哈密顿量可以精确的描述能带结构。我们先从 6-带体 Kane 模型开始推演,它主要包括以下六个原子基态且每个单元胞都包括六部分的自旋量即:

$$\Psi = \left(\left| \Gamma_6, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \Gamma_6, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \Gamma_8, \frac{3}{2} \right\rangle, \left| \Gamma_8, \frac{1}{2} \right\rangle, \left| \Gamma_8, -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| \Gamma_8, -\frac{3}{2} \right\rangle \right) \quad (1)$$

这六带中包含三个子带: E_1, H_1 和 L_1 , L_1 子带离 E_1, H_1 较远,我们忽略掉它,于是就剩下一个有效 4-带模型。在 Γ 点处平行的动量 $k_{\parallel} = 0$, m_j 还是好量子数,在这一点 $|E_1, m_j\rangle$ 的子能带的态是由 $\left| \Gamma_6, m_j = \pm \frac{1}{2} \right\rangle$ 和 $\left| \Gamma_8, m_j = \pm \frac{1}{2} \right\rangle$ 两个态线性结合而形成的,而 $|H_1, m_j\rangle$ 子带态是由 $\left| \Gamma_8, m_j = \pm \frac{3}{2} \right\rangle$ 态组成的。由于 $\left| \Gamma_6, m_j = \pm \frac{1}{2} \right\rangle$ 态是偶宇称,而 $\left| \Gamma_8, m_j = \pm \frac{3}{2} \right\rangle$ 态是奇宇称,这两种态之间的耦合矩阵元必须是关于平行动量 k 的奇函数。考虑到这些对称性,我们得到了有效哈密顿量的一般形式,以 $\left| E_1, m_j = \frac{1}{2} \right\rangle, \left| H_1, m_j = \frac{3}{2} \right\rangle, \left| E_1, m_j = -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| H_1, m_j = -\frac{3}{2} \right\rangle$ 为四个基可以表示为:

$$H_{\text{eff}}(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} H(k) & 0 \\ 0 & H^*(-k) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$H(k) = \varepsilon(k) + d_i(k)\sigma_i.$$

其中 σ_i 为泡利矩阵, $H^*(-k)$ 是厄米矩阵,它的形式是由时间反演对称决定的,从上式的对称性可知, $d_3(k)$ 是关于 k 的偶数函数,而 $d_1(k)$ 和 $d_2(k)$ 是关于 k 的奇数函数,因此我们一般将它们按下面形式展开:

$$d_1 + id_2 = A(k_x + ik_y) \equiv Ak_+ \quad (3)$$

$$d_3 = M - B(k_x^2 + k_y^2) \quad (4)$$

$$\varepsilon_k = C - D(k_x^2 + k_y^2) \quad (5)$$

其中 k_x, k_y 为二维平面内的动量, A, B, C, D 为材料参数,它们都是取决于材料的结构,而 M 则是狄拉克质量参数,它是一个重要的参量,因为对于不同的 M 值则表现出不同的能带结构:当 $M > 0$, s 型的 E_1 带在 p 型的 HH_1 带上,即一般常见的半导体材料(如 GdTe)的能带结构;当 $M < 0$, s 型的轨道在 p 型轨道下面即出现了反常带隙的半导体[6]。

若在方形量子点沿着 Z 方向施加外磁场的时,其二维平面内的动量为

$$\pi_x = k_x + eA_x/\hbar, \quad \pi_y = k_y + eA_y/\hbar \quad (6)$$

其中 A_x 和 A_y 分别是 x, y 量方向的磁矢势,它们分别可以表示为 $A_x = -\frac{B_o y}{2}$ 和 $A_y = \frac{B_o x}{2}$, B_o 为施

加外磁场的磁感应强度。

对于有限深势阱的电子分布情况我们可以将其用无限深的量子阱来拟合，同样对于方形的拓扑量子点的模型主要是用二维的无限深量子阱，分别在 x, y 两方向进行拟合。我们要探究方形 HgTe 量子点的特性用的有效哈密顿量仍是(2)，但其本征值和本征矢 $\varphi_{nm} = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin \frac{n\pi(2x+L_x)}{2L_x} \sqrt{\frac{2}{L_y}} \sin \frac{n\pi(2y+L_y)}{2L_y}$ 可以通过 $\Psi_{nm} = \sum_{nm} C_{nm} \varphi_{nm}$ 求得，其中 φ_{nm} 为二维无限深势阱波函数，而无限深势阱的 x, y 方向上的阱宽度分别为 $2L_x, 2L_y$ 。对于电势 V 应满足：有限深的二维量子阱的电势 $V = 1 \text{ eV}$ ，而在无限深量子阱内 $V = 0$ ，其中有限深量子阱在 x, y 两方向的宽度分别为 $2a_x, 2a_y$ 。现将空间直角坐标系中 x, y, z 在 z 方向无限缩小，而 x, y 两方向上的尺寸也缩小到小于 100 nm ，即形成方形量子点。

对于盘状的拓扑量子点主要在 HgTe 的异质结构中利用蚀刻技术形成的。而低能电子态是由四带具有横向限制 $|e \uparrow\rangle, |hh \uparrow\rangle, |e \downarrow\rangle, |hh \downarrow\rangle$ 四个基态的有效哈密顿量来描述的，其形式与方程(2)式是完全相同的[2]。该结构形成类似于在圆面半径为 R 的圆柱体在 Z 圆柱高方向上无限缩小的结果。故本文对于盘状拓扑量子点的研究采用的是柱坐标，而量子点的限制电势 $V(\rho)$ ： $\rho < R$ 时， $V(\rho) = 0$ ，而 $\rho \geq R$ 时 $V(\rho) = \infty$ ，其中 R 为底面圆的半径。其本征函数和本征矢可以通过波函数 $\Psi_i = \sum_{nm} C_{nm}^{(i)} \varphi_{nm}$ 展开式而得到， $C_{nm}^{(i)}$ 展开系数，基函数 φ_{nm} 能够展开成 $\varphi_{nm} = N_C J_m(k_n^m \rho/R) e^{im\varphi}$ ， k_n^m 是圆柱形贝塞尔函数 $J_m(x)$ 的第一类中第 n 个零点， $N_C = 1/\left[\sqrt{\pi R} J_{m+1}(k_n^m)\right]$ $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 是角动量的好量子数。而盘状(HgTe)拓扑量子点在 Z 轴方向上加磁场，波矢 k 则写成：

$$k = -i\nabla + eA/\hbar \quad (7)$$

$$k_{\pm} = (k_r \pm ik_{\varphi}) e^{\pm i\varphi} \quad (8)$$

其中：

$$k_r = -i \frac{\partial}{\partial r}, \quad k_{\varphi} = -i \frac{\partial}{r \partial \varphi} + \frac{Br}{2\hbar} \quad (9)$$

A 是磁矢势，磁感应强度 $B = \nabla \times A$ ，故(7)式和(8)式带入矩阵(2)中，再利用不加任何外在条件的拓扑量子点的相关函数，可得加磁场之后拓扑量子点的电子能量随着角量子数变化的能谱图及相应的电子分布情况。本文在计算拓扑量子点采用的参数则是 $A = -0.342 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ ， $B = -0.169 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$ ， $C = -0.0363 \text{ eV}$ ， $D = 0.00514 \text{ eV} \cdot \text{nm}^2$ ， $M = -0.03 \text{ eV}$ 。

3. 结果讨论

为了研究外磁场对拓扑绝缘体材料的边缘态特征的影响，首先在图 1 中给出了 HgTe 拓扑量子阱基态能谱图，其子能带中的 E_1 主要是电子为主的而 H_1 则主要成份是空穴，它们的能量分布随着波矢 k 变化的关系图由图 1(a)中可以知道，在没有施加磁场的情况下它们成的是线性关系，这是 Dirac 能谱的特性。但是在有外磁场存在的情况下由图 1(b)可以看出其能量和波矢 k 失去了线性关系，即拓扑量子阱的边缘态遭到了破坏，这主要是由于外磁场破坏了拓扑量子阱中的时间反演对称性。同时由于外加磁场情况下拓扑量子阱发生了巨 Zeeman 效应作用，空穴和电子的能量也相应的变大。

图 2 是在无施加任何外界条件下的方形 HgTe 量子点的能谱图和电子分布图。狄拉克质量 $M < 0$ 时方形量子点的能谱图如图 2(a)所示，而图 2(b)是在图 2(a)中红色箭头所指点相应的电子分布图，而图 2(c)是与图 2(a)相同的方形量子点，不同的是 $M < 0$ 情况，同样的图 2(d)指的是在图 2(c)中红色箭头所指点相应的电子分布图。由图 2(b)可以看出方形的量子点在 $M < 0$ 时候，电子也是主要是位于边沿处，并且趋

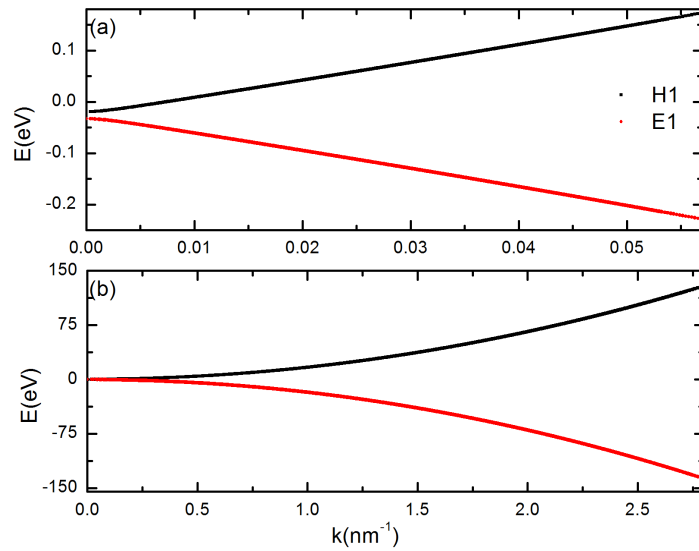


Figure 1. The dispersion relations for the E1 (red) and H1 (black) subbands of the HgTe quantum well (QW) as a function of wave vector k . (a) case magnetic field $B = 0$ T; (b) case $B = 0.5$ T. The width of QW $d = 7$ nm

图 1. HgTe 量子阱中子能带 E1(红色)和 H1(黑色)随着波矢 k 变化的关系图。(a) 磁场 $B = 0$ T; (b) $B = 0.5$ T。其中量子阱的阱宽 $d = 7$ nm

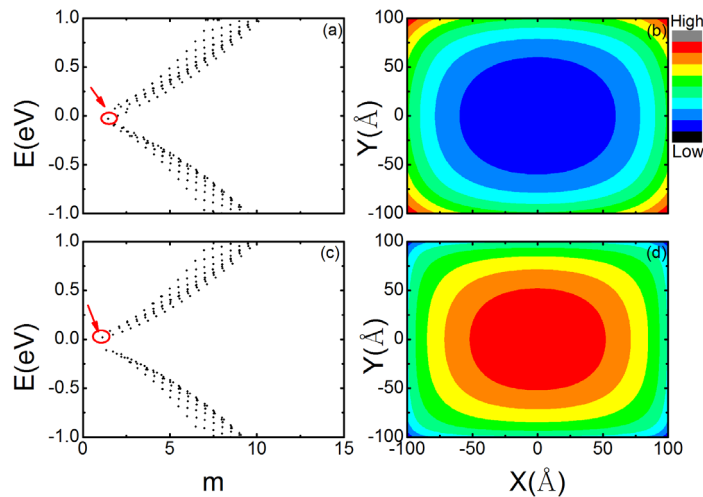


Figure 2. The energy spectrum of square HgTe QD (a) case $M < 0$ (c) case $M > 0$ (b) the density distribution of the electron state marked by the red arrow in Figure 2(a). (d) The density distribution of the electron state marked by the red arrow in Figure 2(c). Here the width of quantum well $L_x = 3a_x$, $L_y = 3a_y$ and $a_x = a_y = 10$ nm

图 2. 方形 HgTe 量子点的能谱图(a) $M < 0$ (c) $M > 0$ (b)在图 2(a)中红色箭头所指点的电子分布图(d)则是在图 2(c)中红色箭头所指点的电子分布图。其中 $L_x = 3a_x$, $L_y = 3a_y$, 且 $a_x = a_y = 10$ nm

向于方形量子点的四个角，这跟一维的拓扑量子线的电子是跑向两端的即集中到分离的两个点上情况是一样的，这也就说在低维下拓扑量子点的电子不仅向边沿处集中还更加喜欢往边缘较尖锐的地方集中。这主要是由于在较为尖锐的位置其能量较低，所以图 2(b)电子分布图主要集中在四个角上。而盘状的拓

扑量子点因为其边沿的曲率是一样的, 所以电子是均匀的分配在边沿上, 从 Z 轴方向看, 就如绕着盘中心而成的环形电子流。而由图 2(d)可知在 $M > 0$ 的情况, 方形量子点的电子则主要是分布在量子点的中心处, 与一般半导体量子点相似。故对于方形 HgTe 量子点, 在无任何外加条件下, 它们具有相同的特性, 即 $M < 0$ 时具有边缘态, $M > 0$ 时不再具有边缘态。

图 3 所示的是盘状 HgTe 量子点(即无掺杂也无施加外场的情况)的能谱图及相应的电子分布情况图, 我们发现盘状量子点的能谱图是无间隙的且跟角动量 m 的关系成近似线性关系, 这主要由于在二维拓扑绝缘体材料的边缘态是呈线性分布的, 并且沿着量子点边界处的边缘态是量子化的。此外由于在二维拓扑绝缘体材料中的边缘态能量分布也是线性分布, 因此量子化的离散态也与 $1/L$ 成线性关系, 其中 L 是拓扑量子点的周长。这些特征使得在拓扑量子点中的边缘态(已在图 3(a)中用红色的小方框标出)相应的能级几乎是等间距的。为了更加清楚的表示这点, 我们在图 3(b)中给出了边缘态的电子分布我们也可以看出在拓扑量子点中呈现的密度分布是环状的。而在拓扑量子点中的其它的点的能态为量子点的体态, 因为它们的性质与常规的半导体是相同的。

由此从图 2 和图 3 可以知道, 方形拓扑量子点与盘状拓扑量子点一样都是具有边缘态的。而且方形量子点和盘状量子点的边缘态与角动量 m 成线性分布, 那是因为这样结构中的哈密顿量受到时间反演对称性的保护, 所以边缘态不受量子点的结构影响, 这样在利用边缘态的特性来构造零维拓扑结构量子器件的时候会比较容易实现。而对于体态而言, 方形和盘状量子点由于结构对称性不同, 体内的电子态能谱是不相同, 但也都呈绝缘态。

盘状拓扑量子点的边缘态在磁场下的特性研究, 首先在垂直于盘状拓扑量子点的盘面方向上施加外磁场之后, 其量子点的能谱就不再对称了如图 4(a)。发现只有在角量子数小于零的部分保持存在边缘态的情况, 而角动量 $m > 0$ 对应的部分不再有边缘态存在。这是由于磁场破坏了时间反演对称性, 使得在拓扑量子点的边界处沿着顺时针方向转的电子消失不见了, 只剩下了沿着逆时针方向转的电子了[17], 反之要是外磁场是沿着 Z 轴的负方向, 拓扑量子点中的电子也就变成只有沿着顺时针方向的。由此通过改变外磁场的方向能够筛选出不同方向运动的电子。其中边缘态的电子的自旋态已在图 4(a)中分别用红色方框框出(自旋向上)和蓝色圈圈圈出(自旋向下)。可见外磁场对自旋向上与自旋向下的边缘态的作用是一样的。由图 4(b)电子分布图, 发现外加磁场对狄拉克点的电子分布图产生的影响并不大。那是由于磁场的方向只影响了 $m > 0$ 的边缘态, 而对 $m < 0$ 的边缘态没有产生影响。此外经研究发现不同大小的量子点外加磁场要破坏拓扑量子点的时间反演对称性, 半径越大的拓扑量子点所需的外加磁场越小, 反之半径越小的则所需的磁场就越大, 即与拓扑量子点的半径成反比关系其因为磁场产生洛伦磁力与半径成反比。

我们继续研究了掺入磁离子的拓扑量子点对边缘态的影响。图 5 给出的是掺杂磁离子在拓扑量子点的中央位置时的能谱图及相应的电子分布图, 从图 5(a)中可以看出, 掺杂磁离子在拓扑量子点的边缘态基本没有变化但是在能谱的中间位置 $m = 0$ 处的边缘态产生了变化, 角动量 $m = 0$ 处量子点的能级出现了简并态, 该处的能量由于量子点的体态和磁性离子的 sp-d 相互交换作用而产生的影响。这是由于 $m = 0$ 的电子态主要集中在磁离子的附近, 因此 sp-d 交换作用比较大。图 5(b)中给出的掺杂单个磁性离子的拓扑量子点在磁场下的能谱图可以知道, 施加外磁场对磁性拓扑量子点的边缘态的电子同样是可以起到筛选的作用。即从图 5(b)中可以知道在角动量 $m > 0$ 时其边缘态已消失不见了, 只有在角动量 $m < 0$ 部分边缘态依然存在着。由此可知此时的拓扑量子点存在量子霍尔效应。除此之外, 分别在图 5(a), 图 5(b)中被绿色圈出的部分可知磁场不仅对边缘态发生了作用, 还影响了磁性拓扑量子点的体态, 即在角动量 $m = 0$ 处的体态能级与无施加外磁场时的相同磁性拓扑量子点图 5(a)中显示的有很大的不同。这主要是由于外磁场存在时, 使其拓扑量子点的相位在角动量 $m > 0$ 和 $m < 0$ 的两部分是不一样的, 故这两部分的体态也是不对称。对于掺杂磁离子的量子点, 角动量 $m \neq 0$ 的边缘态是不受影响的, 只对 $m = 0$ 附近的边缘态产生

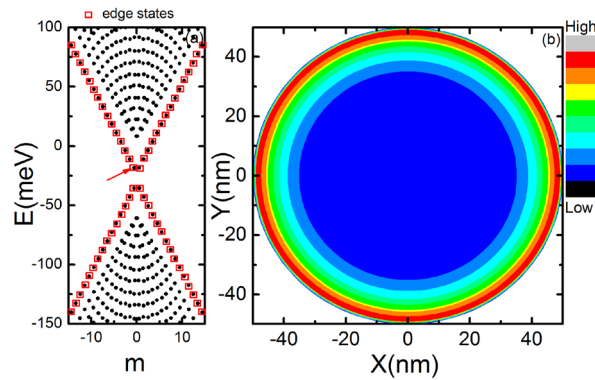


Figure 3. The energy spectrum of the disk-like shaped HgTe QD without magnetic field as a function of the angular momentum m , the quantum states denoted by the red square are edge states; (b) The density distribution of the electron state marked by the red arrow in (a). Here the QD radius $R = 50$ nm

图 3. 盘状 HgTe 量子点在没有外磁场的情况下能谱随着角动量变化的关系图(a), 其中用红色的小方块标出的是边缘态; (b)是(a)中红色箭头所对应点的电子分布图情况, 量子点的半径 $R = 50$ nm

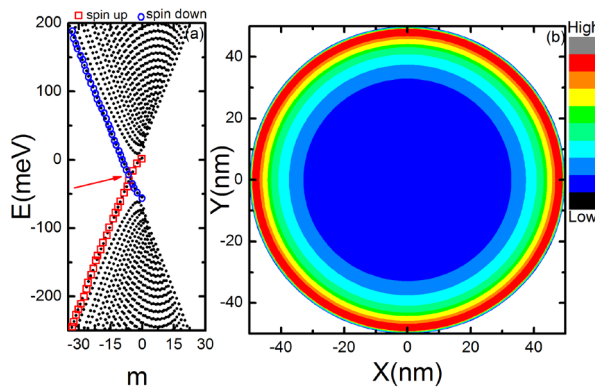


Figure 4. The same as Figure 2, but for the energy spectrum of the HgTe QD under the magnetic field $B = 2$ T (a); (b) the density distributions of electrons of state marked by the red arrow in (a)

图 4. 与图 2 相同的 HgTe 量子点, 但是存在磁场 $B = 2$ T 的情况下的能谱图(a); (b)为(a)中红色箭头所指点的相应电子分布图

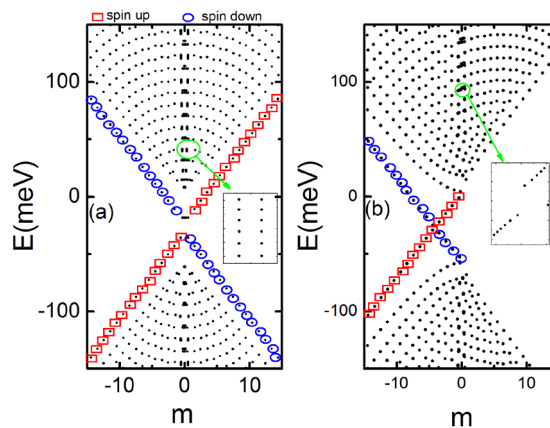


Figure 5. (a) the energy spectrum of HgTe QD with the magnetic ion located at the center of HgTe QD. The edge states are denoted by the red square and blue circle indicating the spin up and spin down states; (b) is the same with Figure 5(a), but with the magnetic field $B = 2$ T

图 5. (a)掺杂磁离子在 HgTe 量子点中央位置的能谱图, (b)是和图 5(a)相同的, 不同的是存有磁场 $B = 2$ T. 其中在边缘态处被红色方块标出和蓝色圈圈出的分别表示自旋向上和自旋向下态

作用。所以掺杂磁离子的拓扑量子点的边缘态仍然很好地保持了边缘性质不受影响。磁场仍然可以筛选不同 m 的边缘态。

4. 结论

我们从理论上研究了磁场对 HgTe 量子阱和量子点的边缘态特征的影响。研究发现由于施加的磁场破坏了时间反演对称性，在磁场下拓扑量子阱的电子和空穴的能量与波矢 k 失去了线性关系。同时边缘态的磁特性对不同结构的低维拓扑材料是没有很大的区别的，即边缘态是很稳定的材料特性。更有趣的是不管是盘状 HgTe 量子点还是掺杂磁离子的盘状 HgTe 量子点在磁场下能够实现由量子自旋霍尔效应向量子霍尔效应的转化，此时盘状 HgTe 量子点的边缘态也都失去了对称性，即施加外磁场能够对沿着量子点边界两个不同方向运动的电子进行了筛选，存在拓扑绝缘体表面通道上电子都是往同一方向运动掺杂磁的量子点的边缘态受到部分影响，这与磁离子的位置有关系。这些结果不仅能够为边缘态的控制提供途径同时还有可能应用于拓扑微电子选择器的制作。

基金项目

本项目由国家青年基金项目(No.60525405)，福建省科技厅创新基金项目(no.2009J05006)和福建省教育厅 B 类项目(no.JB14019)资助。

参考文献 (References)

- [1] Qi, X.L. and Zhang, S.C. (2010) The quantum spin Hall effect and topological insulators. *Physics Today*, **63**, 33-38.
- [2] Qi, X.L. and Zhang, S.C. (2011) Topological insulators and superconductors. *Reviews of Modern Physics*, **83**, 1057-1110.
- [3] Hasan, M.Z and Kane, C.L. (2010) *Colloquium*: Topological insulators. *Reviews of Modern Physics*, **82**, 3045-3067.
- [4] Moore, J. (2010) The birth of topological insulators. *Nature*, **464**,194-198.
- [5] König, M., et al. (2007) Quantum spin Hall insulator state in HgTe quantum wells. *Science*, **318**, 766-770.
- [6] Andrei Bernevig, B., et al. (2006) Quantum spin Hall effect and topological phase transition in HgTe quantum wells. *Science*, **314**, 1757-1761.
- [7] Murakami, S., Nagaosa, N. and Zhang, S.C. (2004) Spin-Hall insulator. *Physical Review Letters*, **93**, Article ID: 156804.
- [8] Qi, X.-L., Wu, Y.S. and Zhang S.C. (2006) Topological quantization of the spin Hall effect in two-dimensional paramagnetic semiconductors. *Physical Review B*, **74**, Article ID: 085308.
- [9] Hanson, R., et al. (2007) Spins in few-electron quantum dots. *Reviews of Modern Physics*, **79**, 1217.
- [10] Chen, Y.L., Analytis, J.G., Chu, J.H., Liu, Z.K., Mo, S.K., Qi, X.L., Zhang, H.J., Lu, D.H., Dai, X., Fang, Z., Zhang, S.C., Fisher, I.R., Hussain, Z. and Shen, Z.X. (2010) Experimental realization of a three-dimensional topological insulator Bi₂Te₃. *Science*, **329**, 659.
- [11] Peng, H., Lai, K., Kong, D., Meister, S., Chen, Y., Qi, X.L., Zhang, S.C., Shen, Z.X. and Cui, Y. (2010) Aharonov-Bohm interference in topological insulator nanoribbons. *Nature Materials*, **9**, 225-229.
- [12] Zhang, Y. and Vishwanath, A. (2010) Anomalous Aharonov-Bohm conductance oscillations from topological insulator surface states. *Physical Review Letters*, **105**, Article ID: 206601.
- [13] Bardarson, J., Brouwer, P. and Moore, J. (2010) Aharonov-Bohm oscillations in disordered topological insulator nanowires. *Physical Review Letters*, **105**, Article ID: 156803.
- [14] Maciejko, J., Qi, X.L. and Zhang, S.C. (2010) Magneto-conductance of the quantum spin Hall state. *Physical Review B*, **82**, Article ID: 155310.
- [15] Chen, J.C., Wang, J. and Sun, Q.F. (2012) Effect of magnetic field on electron transport in HgTe/CdTe quantum wells: Numerical analysis. *Physical Review B*, **85**, Article ID: 125401.
- [16] Chu, R.L., Li, J., Jain, J.K. and Shen, S.Q. (2009) Coherent oscillations and giant edge magnetoresistance in singly connected topological insulators. *Physical Review B*, **80**, Article ID: 081102.

- [17] Chang, K. and Lou, W.-K. (2011) Helical quantum states in HgTe quantum dots with inverted band structures. *Physical Review Letters*, **106**, Article ID: 206802.
- [18] Zhang, S.N., Jiang, H. and Liu, H.W. (2013) Numerical study of transport properties in topological insulator quantum dots under magnetic field. *Modern Physics Letters B*, **27**, Article ID: 1350104.