Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2017, 6(2), 43-53
Published Online April 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/dsc
https://doi.org/10.12677/dsc.2017.62006

A Class of Algorithms of Output Feedback Predictive Control of Finite-Time Stability

Xiulan Liang, Xiaohua Liu

School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai Shandong
Email: 1517768434@qq.com

Received: Apr. 4th, 2017; accepted: Apr. 26th, 2017; published: Apr. 30th, 2017

Abstract

This paper researches the finite-time stable predictive control problem for a class of discrete-time linear time invariant system. Firstly, the definition of finite-time stable predictive control is given. Then by constructing Lyapunov function, minimization-optimization problems of finite-time domain are converted into positive semi-definite programming problems with linear matrix inequality constraints. Using linear matrix inequality approach, a sufficient condition for the existence of output feedback control law is presented. It is proved that the optimization problems is finite-time stable when the feasible condition of closed-loop systems is guaranteed. Finally, a simulation example demonstrates the effectiveness of the proposed method.

Keywords

Model Predictive Control, Finite-Time Stability, Dynamic Output Feedback, Linear Matrix Inequality

一类有限时间稳定的输出反馈预测控制算法

梁秀兰，刘晓华

鲁东大学数学与统计科学学院，山东 烟台
Email: 1517768434@qq.com

收稿日期：2017年4月4日；录用日期：2017年4月26日；发布日期：2017年4月30日

摘 要

本文针对一类离散时间线性时不变系统，研究其有限时间稳定预测控制问题。首先给出了有限时间稳定预测控制的定义，然后，通过构造Lyapunov函数，将有限时域的最小化优化问题转化为具有线性矩阵不等式约束的半正定规划问题。并采用线性矩阵不等式的方法，给出了输出反馈控制律存在的充分条件。证

文章引用: 梁秀兰, 刘晓华. 一类有限时间稳定的输出反馈预测控制算法[J]. 动力系统与控制, 2017, 6(2): 43-53.
https://doi.org/10.12677/dsc.2017.62006

明了优化问题在满足可行性条件下闭环系统是有限时间稳定的。最后，仿真算例验证了所提方法的有效性。

关键词

模型预测控制，有限时间稳定，动态输出反馈，线性矩阵不等式

1. 引言

系统稳定性是控制理论研究中最基本和最重要的问题。传统的稳定性，如 Lyapunov 稳定、BIBO 稳定和实用稳定性等稳定性概念，关注的是无限长时间区间的系统行为[1]。然而，在很多实际应用中，人们关注的是某一有限时间区间内的系统行为(如工作时间有限的导弹和卫星系统控制[2]、飞行控制[3]等)或需要维持系统状态不超出给定的界(如系统存在饱和现象[4]、超调过大[5]等)。在这些应用中，有限时间稳定性概念比上述传统的稳定性概念更能满足实际需要，因此也更有实际意义。由此提出了系统有限时间稳定的问题。

关于有限时间控制问题的研究最早始于 20 世纪 60 年代，Weiss 和 Infante 在文献[6]中首次提出有限时间稳定的概念。文献[7]总结了有限时间稳定控制的发展历程，提出了线性、非线性以及随机系统有限时间控制问题的分析设计方法。文献[8]针对线性系统有限时间稳定鲁棒控制设计问题，引入线性矩阵不等式技术，提出了状态反馈有限时间镇定控制算法。然而，实际系统中的状态往往不易直接测量或者测量代价很高。文献[9]提出了使闭环系统有限时间有界的动态输出反馈控制器设计方法。对于线性时变系统输出反馈有限时间控制问题，文献[10]给出了系统有限时间稳定的充要条件。由于文献[7] [8] [9] [10]设计的控制器只能保证系统有限时间镇定，而没有考虑系统的伺服性能，文献[11]定义了有限时间稳定最优反馈控制，提出了可使系统部分状态有限时间稳定的最优反馈控制器设计方法。文献[12]则针对网络系统，设计了系统有限时间鲁棒稳定控制器。文献[13]提出了线性随机系统有限时间控制问题，给出了随机系统有限时间 H_∞ 控制器有解的充分条件。

预测控制是一类应用广泛的先进控制算法，其稳定性一直是学术界关注的热点[14]，但是，对于有限时间稳定的预测控制研究成果还不多见。

本文研究一类离散时间线性时不变系统的有限时间稳定预测控制问题，给出系统有限时间稳定预测控制的概念，考虑系统状态不可测的情况，给出输出反馈预测控制器设计方案。并基于线性矩阵不等式方法，研究优化问题可行解存在的条件。证明优化问题在给定的初始条件下闭环系统是有限时间稳定的。通过仿真实验验证所提方法的有效性。

2. 问题描述

考虑如下离散时间线性时不变系统：

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), x(0) = x_0 \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是系统状态， $x(0) = x_0$ 是系统初始状态， $u(k) \in R^m$ 是系统控制输入， $y(k) \in R^q$ 是系统输

出，A、B和C 是相应维数的常数矩阵。

对于系统(1)，选择有限时域优化性能指标为：

$$\min_{u(k)} J_N(k) = \min_{u(k)} \sum_{i=0}^{N-1} x^{\mathrm{T}}(k+i|k) Q_1 x(k+i|k) + u^{\mathrm{T}}(k+i|k) Q_{2u}(k+i|k) \tag{2}$$

其中 $Q_1 \ge 0,\ Q_2 > 0$ 是给定的加权矩阵，$x(k+i|k)$ 是 k 时刻基于模型(1)的 $k+i$ 时刻的状态预测值，$u(k+i|k)$ 是 k 时刻使性能指标最小的控制信号在 $k+i$ 时刻的值，N 为控制时域。

当系统的状态变量不完全可观测时，考虑如下结构的动态输出反馈预测控制器：

$$\begin{cases} x_c(k+1) = A_k x_c(k) + B_k y(k) \\ u(k) = C_k x_c(k) \end{cases} \tag{3}$$

其中：$x_c(k) \in R^n$ 是控制器状态，A_k, B_k, C_k 是待定的控制器系数矩阵。

将(3)式代入(1)式中，得到闭环系统

$$\tilde{x}(k+1) = \tilde{A}\tilde{x}(k) \tag{4}$$

其中，$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & BC_k \\ B_k C & A_k \end{pmatrix} \in R^{2n\times 2n}$，$\tilde{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x_c(k) \end{pmatrix} \in R^{2n}$。

假设系统状态的系数矩阵和控制器状态的系数矩阵不包含交叉耦合项。

对于闭环系统(4)，相应的滚动优化性能指标为

$$\begin{aligned} \min_{u(k)} J_N(k) &= \min_{u(k)} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}^{\mathrm{T}}(k+i|k) \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & C_k^{\mathrm{T}} Q_2 C_k \end{bmatrix} \tilde{x}(k+i|k) \\ &= \min_{u(k)} \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{x}^{\mathrm{T}}(k+i|k) D^{\mathrm{T}} D \tilde{x}(k+i|k) \end{aligned} \tag{5}$$

其中，$\tilde{x}(k+i|k) = \begin{bmatrix} x(k+i|k) \\ x_c(k+i|k) \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} Q_1^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & Q_2^{\frac{1}{2}} C_k \end{bmatrix}$。

定义 1：[15]考虑如下离散时间线性时不变系统

$$x(k+1) = Ax(k),\ \ k \in \{1,\cdots,N\}\ \ x(0) = x_0 \tag{6}$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是常数矩阵，$x(k) \in R^n$ 是系统状态，$x(0) = x_0$ 是系统初始状态。当 $x^{\mathrm{T}}(0) R x(0) \le \delta_x^2$ 时，如果有 $x^{\mathrm{T}}(k) R x(k) < \varepsilon^2$ 成立，则称系统(6)关于 $(\delta_x, \varepsilon, R, N)$ 是有限时间稳定的。其中，δ_x, ε 为给定常数 $(0 < \delta_x < \varepsilon)$，$R$ 为给定正定矩阵，N 为给定的正整数。

注 1：有限时间稳定与渐近稳定的主要区别一是有限时间稳定关注的是系统在特定时间内的暂态性能，而渐近稳定则是考察系统在无穷时间区间内的稳态性能；二是有限时间稳定针对在给定界内的初始条件，渐近稳定则是针对在吸引域下的初始条件；三是有限时间稳定要求系统状态轨迹在预先设定的界内，渐近稳定要求系统状态渐近收敛。

定义 2：对于受控系统(1)以及相应的闭环系统(4)，给定正常数 c_1、$c_2\ (0 < c_1 < c_2)$ 和正定矩阵 $\tilde{R}$，如果当 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)\tilde{R}\tilde{x}(0) \le c_1$ 时，都有 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k) \le c_2$ 成立，则称闭环系统(4)关于 $(c_1, c_2, \tilde{R}, N)$ 是有限时间稳定的，也即受控系统(1)是有限时间稳定的。

本文解决的主要问题是：在每一采样时刻 k，求解闭环系统优化问题(5)得到动态输出反馈预测控制器(3)，使得闭环系统(4)在满足可行性条件下是有限时间稳定的。

引理 1[15]：系统(6)有限时间稳定等价条件：

i) 系统(6)关于$\left(\delta_x,\varepsilon,R,N\right)$,是有限时间稳定的；

ii) $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^k RA^k<\frac{\varepsilon^2}{\delta_x^2}R,\forall k\in\{1,\cdots,N\}$.；

iii) 对于$\forall k\in\{1,\cdots,N\}$，若有$P_k(k)=R$，$P_k(h)=A^{\mathrm{T}}P_k(h+1)A,h\in\{0,1,\cdots,k-1\}$。则$P_k(0)<\frac{\varepsilon^2}{\delta_x^2}R$成立。

iv) 对于$\forall k\in\{1,\cdots,N\}$，存在对称矩阵函数$P_k(\cdot):h\in\{0,1,\cdots,k\}\mapsto P_k(h)\in R^{n\times n}$满足：

$$A^{\mathrm{T}}P_k(h+1)A-P_k(h)<0,h\in\{0,1,\cdots,k-1\}；\quad P_k(k)\ge R；\quad P_k(0)<\frac{\varepsilon^2}{\delta_x^2}R。$$

引理2：(Schur补) [16]对给定的对称矩阵$\bar{S}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$，其中$S_{11}$是$r\times r$维的。以下三个条件等价

(i) $\bar{S}<0$；

(ii) $S_{11}<0,\ S_{22}-S_{12}^{\mathrm{T}}S_{11}^{-1}S_{12}<0$；

(iii) $S_{22}<0,\ S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{12}^{\mathrm{T}}<0$。

引理3：[17]给定对称矩阵$F\in R^{n\times n}$和$G\in R^{n\times n}$以下两个条件是等价的：

(i) 存在对称矩阵$T\in R^{n\times n}$，$Z\in R^{n\times n}$和矩阵$M\in R^{n\times n}$，$N\in R^{n\times n}$，使得

$$P_1=\begin{bmatrix}F & M\\ M^{\mathrm{T}} & T\end{bmatrix}>0,\ P_1^{-1}=\begin{bmatrix}G & N\\ N^{\mathrm{T}} & Z\end{bmatrix}$$

(ii) $\begin{bmatrix}F & I\\ I & G\end{bmatrix}>0$

3. 基于有限时间稳定输出反馈预测控制

3.1. 优化问题分析

求解系统输出反馈预测控制器的关键是：在每一采样时刻，求解优化问题(5)得到输出反馈控制律$\{A_k,B_k,C_k\}$。为此，采用文献[18]的方法，利用假定的不等式条件，先求得$J_N(k)$的一个上确界，然后将最小化性能指标$J_N(k)$转化为对上确界的最小化。

在控制区间$[0,N]$内选择如下多Lyapunov函数

$$V\left(\tilde{x}(k|k)\right)=\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k|k)P(k)\tilde{x}(k|k) \tag{7}$$

其中，$P(k)$是对称正定加权矩阵。

为了导出性能指标(5)的上确界，在每个采样时刻k和$i\ge 0$，实施以下稳定性约束：

$$V\left(\tilde{x}(k+i+1|k)\right)-V\left(\tilde{x}(k+i|k)\right)\le-\left(\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k+i|k)D^{\mathrm{T}}D\tilde{x}(k+i|k)\right) \tag{8}$$

加入终端等式约束$\tilde{x}(k+N|k)=0$，则有$V\left(\tilde{x}(k+N|k)\right)=0$，将不等式(8)从$i=0$叠加到$i=N-1$从而得到：

$$J_N(k)\le V\left(\tilde{x}(k|k)\right) \tag{9}$$

显然，$V\left(\tilde{x}(k|k)\right)$为性能指标$J_N(k)$的上确界，由此将对性能指标最小化问题转化为对上确界

$V\left(\tilde{x}\left(k|k\right)\right)$的最小化问题。如果存在非负变量$\gamma\left(k\right)$满足$V\left(\tilde{x}\left(k|k\right)\right)\le\gamma\left(k\right)$，则优化问题(5)可进一步转化为半正定规划问题。

3.2. 优化问题求解

定理 1：考虑系统(1)，采用输出反馈控制(3)，假设在每一采样时刻k，存在对称正定矩阵值函数$Q(.),S(.)$，可逆矩阵$U(.)$，矩阵值函数$\hat{A}_k(.),\hat{B}_k(.),\hat{C}_k(.)$以及待定变量$\gamma\left(k\right)$，若不等式约束(8)成立，则优化问题(5)可转化为以下优化问题，即

$$\min_{\gamma(k),Q(.),S(.),U(.),\hat{A}_k(.),\hat{B}_k(.),\hat{C}_k(.)}\gamma\left(k\right)$$

$$S.t.\begin{bmatrix} Q\left(k\right) & I & Q\left(k\right)\tilde{x}\left(k|k\right) & U\left(k\right)\tilde{x}\left(k|k\right) \\ * & S\left(k\right) & \tilde{x}\left(k|k\right) & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix}>0 \tag{10}$$

$$\begin{bmatrix} -Q\left(k\right) & -I & Q\left(k\right)A^{\mathrm{T}}+\hat{C}_k^{\mathrm{T}}\left(k\right)B^{\mathrm{T}} & \hat{A}_k^{\mathrm{T}}\left(k\right) \\ * & -S\left(k\right) & A^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}}S\left(k+1\right)+C^{\mathrm{T}}\hat{B}_k^{\mathrm{T}}\left(k\right) \\ * & * & -Q\left(k+1\right) & -I \\ * & * & * & -S\left(k+1\right) \end{bmatrix}<0 \tag{11}$$

$$\begin{bmatrix} Q\left(k\right) & I-Q\left(k\right)\tilde{R} & Q\left(k\right)\tilde{R}^{\frac{1}{2}} & U\left(k\right)\tilde{R}_K^{\frac{1}{2}} \\ * & S\left(k\right)-\tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix}\ge 0 \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} Q\left(0\right) & I \\ * & S\left(0\right) \end{bmatrix}<\frac{c_2}{c_1}\begin{bmatrix} Q\left(0\right)\tilde{R}Q\left(0\right)+U^{\mathrm{T}}\left(0\right)\tilde{R}_K U^{\mathrm{T}}\left(0\right) & Q\left(0\right)\tilde{R} \\ * & \tilde{R} \end{bmatrix} \tag{13}$$

证明：最小化$V\left(\tilde{x}\left(k|k\right)\right)=\tilde{x}^{\mathrm{T}}\left(k|k\right)P\left(k\right)\tilde{x}\left(k|k\right)$等价于

$$\begin{gathered}\min_{\gamma(k),P(k)}\gamma\left(k\right) \\ s.t\ \tilde{x}^{\mathrm{T}}\left(k|k\right)P\left(k\right)\tilde{x}\left(k|k\right)<\gamma\left(k\right)\end{gathered} \tag{14}$$

令$\hat{P}\left(k\right)=\gamma\left(k\right)P^{-1}\left(k\right)$

则(14)等价于

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}\left(k|k\right)\hat{P}^{-1}\left(k\right)\tilde{x}\left(k|k\right)<1 \tag{15}$$

则根据引理 2

(15)式等价于

$$\begin{bmatrix} \hat{P}\left(k\right) & \tilde{x}\left(k|k\right) \\ * & 1 \end{bmatrix}>0 \tag{16}$$

将矩阵$\hat{P}\left(k\right)$及$\hat{P}^{-1}\left(k\right)$作如下分解

$$\hat{P}=\begin{bmatrix} S\left(k\right) & M\left(k\right) \\ M^{\mathrm{T}}\left(k\right) & \# \end{bmatrix},\quad \hat{P}^{-1}=\begin{bmatrix} Q\left(k\right) & U\left(k\right) \\ U^{\mathrm{T}}\left(k\right) & \# \end{bmatrix} \tag{17a}$$

部分与证明无关.

定义矩阵：

$$\Pi_1=\begin{pmatrix} Q(k) & I \\ U^{\mathrm{T}}(k) & 0 \end{pmatrix},\quad \Pi_2=\begin{pmatrix} I & S(k) \\ 0 & M^{\mathrm{T}}(k) \end{pmatrix} \tag{17b}$$

$$\Pi_{11}=\begin{bmatrix} \Pi_1 & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

由上述定义知：

$$S(k)Q(k)+M(k)U^{\mathrm{T}}(k)=I \tag{18a}$$

$$Q(k)S(k)+U(k)M^{\mathrm{T}}(k)=I \tag{18b}$$

$$P(k)\Pi_1=\Pi_2 \tag{18c}$$

将(16)式左乘 Π_{11}^{T} 右乘 Π_{11} 得

$$\begin{bmatrix} Q(k) & I & Q(k)\tilde{x}(k|k) & U(k)\tilde{x}(k|k) \\ * & S(k) & \tilde{x}(k|k) & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix}>0 \tag{19}$$

即式(10)成立。

由引理 1(iv)知，如果存在对称矩阵 $P(k)$ 和矩阵 $\hat{A}_k,\hat{B}_k,\hat{C}_k$，使得

$$\begin{bmatrix} -P(k) & \tilde{A}^{\mathrm{T}}P(k) \\ * & -P(k+1) \end{bmatrix}<0 \quad k\in\{0,1,\cdots N-1\} \tag{20}$$

$$P(k)\geq \text{block diag}\left(\tilde{R},\tilde{R}_K\right),\quad k\in\{1,2,\cdots N\},\quad \tilde{R}=\left(\tilde{R}_K^{\frac{1}{2}}\right)^{\mathrm{T}}\tilde{R}_K^{\frac{1}{2}} \tag{21}$$

$$P(0)<\frac{c_2}{c_1}\text{ block diag}\left(\tilde{R},\tilde{R}_K\right) \tag{22}$$

成立，则系统是有限时间稳定的。

将式(20)左乘块矩阵 $\left(\Pi_1^{\mathrm{T}}(k),\Pi_1^{\mathrm{T}}(k+1)\right)$、右乘块矩阵 $\left(\Pi_1(k),\Pi_1(k+1)\right)$，得：

$$\begin{bmatrix} -Q(k) & -I & Q(k)A^{\mathrm{T}}+\hat{C}_k^{\mathrm{T}}(k)B^{\mathrm{T}} & \hat{A}_k^{\mathrm{T}}(k) \\ * & -S(k) & A^{\mathrm{T}} & A^{\mathrm{T}}S(k+1)+C^{\mathrm{T}}\hat{B}_k^{\mathrm{T}}(k) \\ * & * & -Q(k+1) & -I \\ * & * & * & -S(k+1) \end{bmatrix}<0$$

其中：

$$\begin{aligned}\hat{A}_k(k)=&M(k+1)A_kU^{\mathrm{T}}(k)+S(k+1)BC_kU^{\mathrm{T}}(k)+M(k+1)B_kCQ(k)\\&+S(k+1)AQ(k)\end{aligned} \tag{23a}$$

$$\hat{B}_k(k)=M(k+1)B_k \tag{23b}$$

$$\hat{C}_k(k)=C_kU^{\mathrm{T}}(k) \tag{23c}$$

即式(11)成立。

将(21)式左乘块矩阵$\Pi_1^{\mathrm{T}}(k)$、右乘块矩阵$\Pi_1(k)$，可得：

$$\begin{bmatrix} Q(k)-Q(k)\tilde{R}Q(k)-U(k)\tilde{R}_K U^{\mathrm{T}}(k) & I-Q(k)\tilde{R} \\ * & S(k)-\tilde{R} \end{bmatrix} \geq 0$$

由引理2，

$$\begin{bmatrix} Q(k) & I-Q(k)\tilde{R} & Q(k)\tilde{R}^{\frac{1}{2}} & U(k)\tilde{R}_K^{\frac{1}{2}} \\ * & S(k)-\tilde{R} & 0 & 0 \\ * & * & I & 0 \\ * & * & * & I \end{bmatrix} \geq 0$$

即式(12)成立。

将(22)式左乘块矩阵$\Pi_1^{\mathrm{T}}(k)$、右乘块矩阵$\Pi_1(k)$，得到：

$$\begin{bmatrix} Q(0) & I \\ * & S(0) \end{bmatrix} < \frac{c_2}{c_1}\begin{bmatrix} Q(0)\tilde{R}Q(0)+U^{\mathrm{T}}(0)\tilde{R}_K U^{\mathrm{T}}(0) & Q(0)\tilde{R} \\ * & \tilde{R} \end{bmatrix}$$

即式(13)成立。

定理证毕。

注：由(10)式知，在每一采样时刻k，有$\begin{bmatrix} Q(k) & I \\ I & S(k) \end{bmatrix} > 0$，根据引理3，可以由$S(k),Q(k),U(k)$构建出$P(k)$。进而由(23)式中的$\hat{A}_k(k),\hat{B}_k(k),\hat{C}_k(k)$确定矩阵$A_k,B_k$和$C_k$。由此得到控制器(3)的系数矩阵为

$$\begin{aligned} A_k &= M^{-1}(k+1)\hat{A}_k(k)U^{-\mathrm{T}}(k)-M^{-1}(k+1)S(k+1)BC_k-B_kCQ(k)U^{-\mathrm{T}}(k) \\ &\quad -M^{-1}(k+1)S(k+1)AQ(k)U^{-\mathrm{T}}(k) \end{aligned} \tag{24a}$$

$$B_k = M^{-1}(k+1)\hat{B}_k(k) \tag{24b}$$

$$C_k = \hat{C}_k(k)U^{-\mathrm{T}}(k) \tag{24c}$$

根据定理1，输出反馈预测控制算法如下：

Step1：选择时刻k和控制时域N，给定常数c_1,c_2以及矩阵R。

Step2：在$[k,N]$时间内求解优化问题(10)~(13)。得出变量$Q(k),S(k),U(k),\hat{A}_k(k),\hat{B}_k(k),\hat{C}_k(k)$，并由$M(k)=(I-S(k)Q(k))U^{-\mathrm{T}}(k)$得到矩阵$M(k)$，使有限时域优化性能指标在线最小化。

Step3：将矩阵$Q(k),S(k),U(k),M(k),\hat{A}_k(k),\hat{B}_k(k),\hat{C}_k(k)$。代入式(24)，确定出控制器(3)的系数矩阵$A_k,B_k,C_k$。

Step4：将A_k,B_k,C_k代入式(3)，计算出在k时刻基于模型(1)的状态预测值$x(k+1|k)$，以及输出反馈控制器状态$\tilde{x}(k+1|k)$。

Step5：基于$\tilde{x}(k)$和$y(k)$的测量值，令$k=k+1$，重复step1~Step4。

4. 有限时间稳定性分析

定理2：对于系统(1)，若定理1中的优化问题(10)—(13)在初始时刻存在可行解，则闭环系统(4)关于$(c_1,c_2,\tilde{R},N)$是有限时间稳定的。

证明：由定理 1 知，存在对称矩阵值函数 $P(.)$ 使得：

$$\tilde{A}^{\mathrm{T}}P(k+1)\tilde{A}-P(k)<0,\quad k\in\{0,1,\cdots,N-1\} \tag{25a}$$

$$P(k)\geq\tilde{R} \tag{25b}$$

$$P(0)<\frac{c_2}{c_1}\tilde{R} \tag{25c}$$

由(25a)可得

$$\begin{aligned}&\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k+1)P(k+1)\tilde{x}(k+1)-\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)P(k)\tilde{x}(k)\\&=\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\left(\tilde{A}^{\mathrm{T}}P(k+1)\tilde{A}-P(k)\right)\tilde{x}(k)\\&<0\end{aligned} \tag{26}$$

将(26)式由 0 叠加到 $k-1$ 得 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)P(k)\tilde{x}(k)-\tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)P(0)\tilde{x}(0)<0$

由(25b)和(25c)可得

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k)-\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)P(0)\tilde{x}(k)\leq\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)P(k)\tilde{x}(k)-\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)P(0)\tilde{x}(k)<0$$

$$\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k)\leq\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)P(0)\tilde{x}(k)<\tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)\frac{c_2}{c_1}\tilde{R}\tilde{x}(0)$$

当 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)\tilde{R}\tilde{x}(0)\leq c_1$ 时，有 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k)<c_2$ 成立.

根据定义 2 可知，闭环系统(4)关于 $(c_1,c_2,\tilde{R},N)$ 是有限时间稳定的。

5. 仿真算例

考虑离散时间线性系统(1)，其系统参数

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&-1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\end{bmatrix}.$$

选取初始状态 $x(0)=\begin{bmatrix}1&1&1&1\end{bmatrix}$，$c_1=1,\ c_2=4,\ N=10,\ \tilde{R}=\tilde{R}_K=I$.性能指标的加权矩阵为 $Q_1=0.5I$，$Q_2=I$，采样间隔为 1 s。

根据本文提出的动态输出反馈预测控制算法，运用 LMI 工具箱求解优化问题，进而得到满足条件的预测控制器。仿真结果如下：

图 1 给出了系统在 $[1,10]$ 区间内系统的状态运动轨迹，表明系统的状态是有界的。

图 2 和图 3 容易看出系统的输入和输出在有限时间内无较大的超调。

图 4 表明在控制器(3)的作用下，只要系统的初值满足 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(0)\tilde{R}\tilde{x}(0)\leq1$，则在 $[1,10]$ 时间内，闭环系统的轨迹必满足 $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k)<4$。即闭环系统(4)关于 $(1,4,I,10)$ 有限时间稳定的。

图 5 可以得出系统的性能指标在 $[1,10]$ 是递减的。

综上所述，系统在状态不完全可测时，采用本文提出的动态输出反馈预测控制方法，得到的闭环系统是有限时间稳定的，并能够保证有限时域优化性能指标在线最小化。仿真结果可说明所述算法的有效性。

6. 结论

本文研究了一类离散时间线性系统的有限时间稳定预测控制问题，给出了有限时间稳定预测控制的

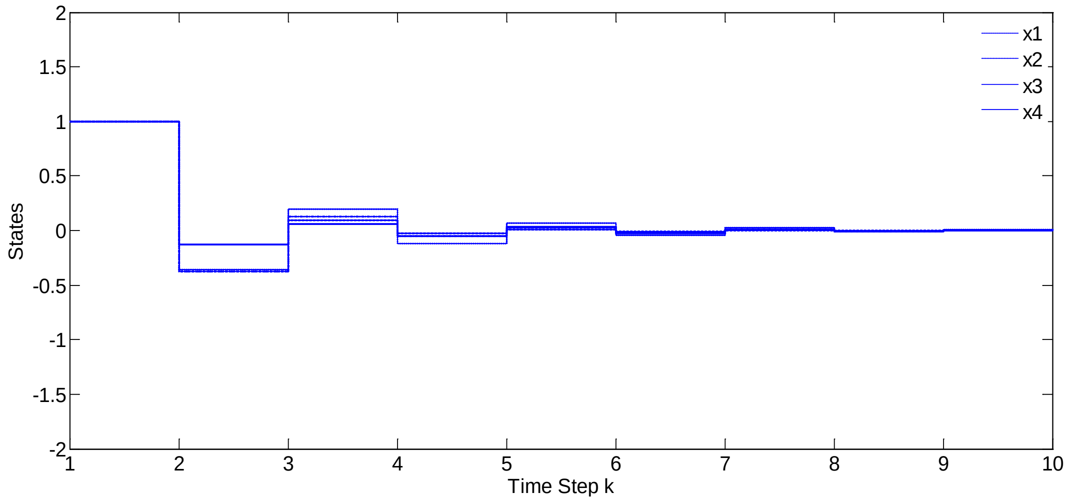

Figure 1. State trajectory of the closed-loop system
图 1. 闭环系统状态轨迹

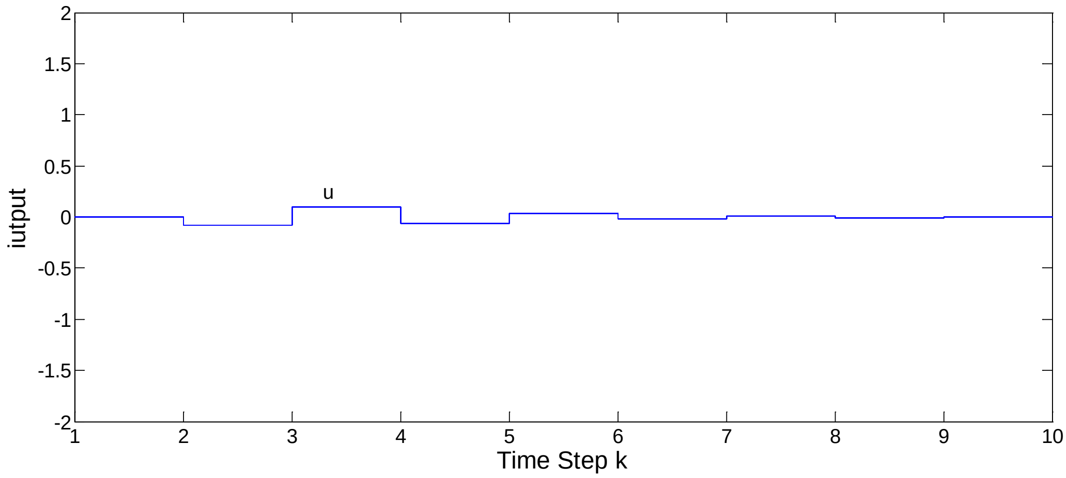

Figure 2. Control signal
图 2. 控制信号

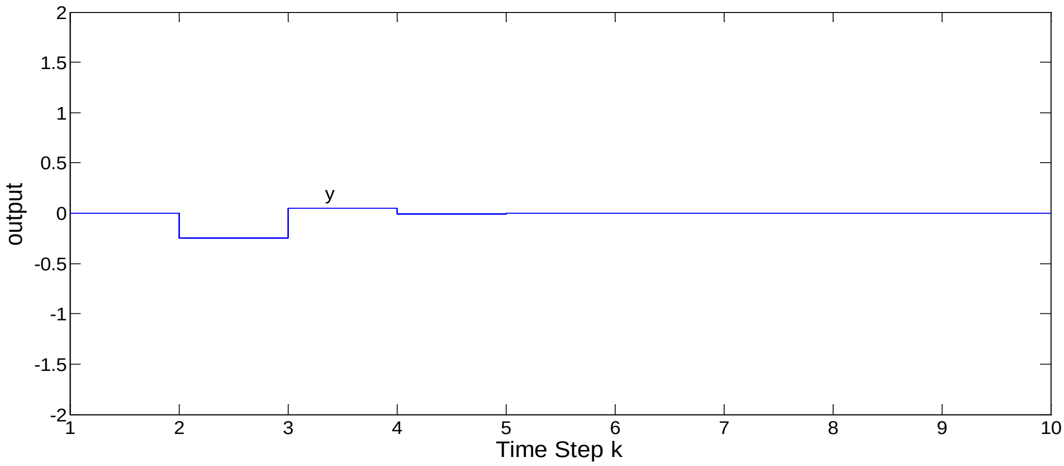

Figure 3. Output trajectory
图 3. 输出轨迹

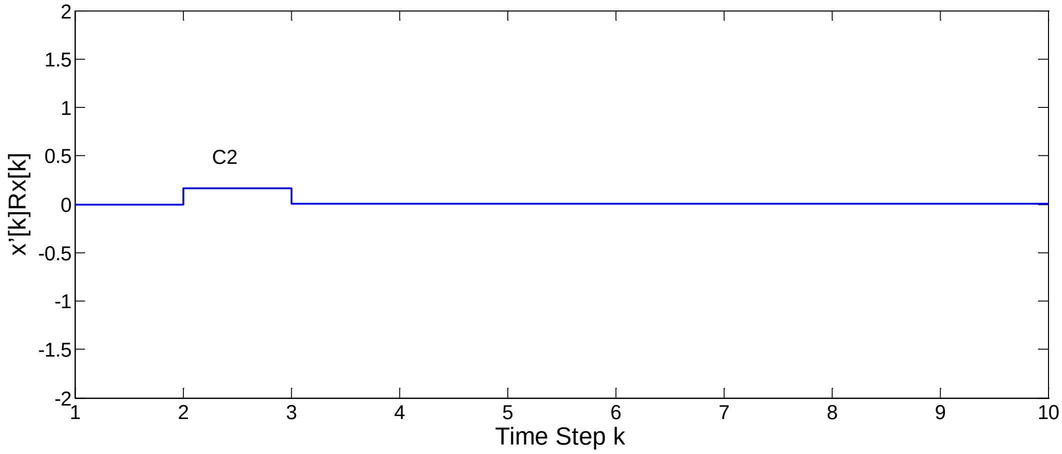

Figure 4. $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k)$ trajectory

图 4. $\tilde{x}^{\mathrm{T}}(k)\tilde{R}\tilde{x}(k)$ 轨迹

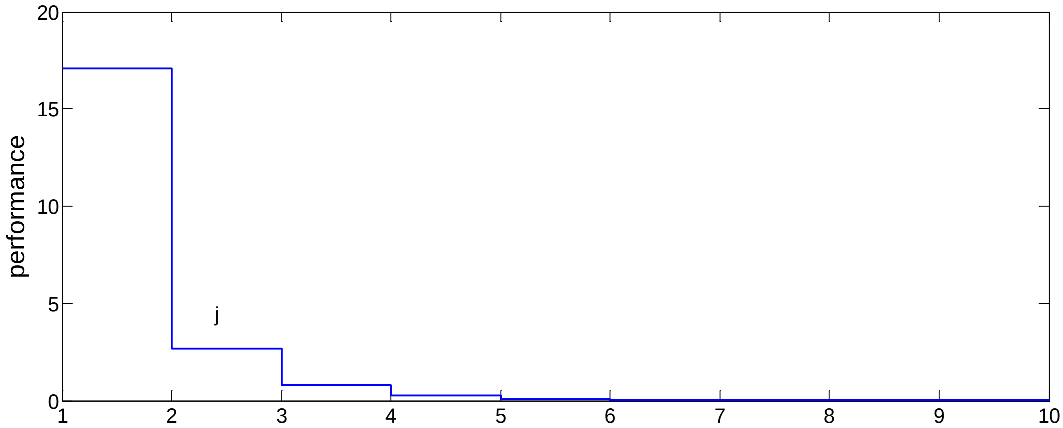

Figure 5. Performance changes

图 5. 性能指标变化情况

定义；并利用线性矩阵不等式方法，得到优化问题可行解存在的条件；提出了有限时间稳定的输出反馈预测控制的设计方法，证明了闭环系统在给定的初始条件下是有限时间稳定的。仿真结果验证了所提算法的有效性。

参考文献 (References)

[1] Xue, W.P. and Mao, W.J. (2013) Asymptotic Stability and Finite-Time Stability of Networked Control Systems: Analysis and Synthesis. *Asian Journal of Control*, **15**, 1376-1384. https://doi.org/10.1002/asjc.695

[2] Dorato, P. (1961）Short Time Stability in Linear Time-Varying Systems. *Proceedings of the IRE International Convention Record Part* 4, New York, 9 May 1961, 83-87.

[3] San, F. and Dorato, P. (1974) Short-Time Parameter Optimization with Fight Control Application. *Automatica*, **10**, 425-430.

[4] Garcia, G., Tarbouriech, S. and Bernussou, J. (2009) Finite-Time Stabilization of Linear Time-Varying Continuous Systems. *IEEE Transactions on Atomatic Control*, **54**, 364-368. https://doi.org/10.1109/TAC.2008.2008325

[5] Lin, X.Z., Du, H.B. and Li, S.H. (2011) Uniform Finite-Time Stability and Feedback Stabilization for Discrete-Time Switched Linear Systems and Its Application to Networked Control Systems. *Control and Decision*, **26**, 841-846.

[6] Weiss, L. and Infante, E.F. (1965) On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval. *Proceedings of the*

National Academy of Sciences, **54**, 44-48. https://doi.org/10.1073/pnas.54.1.44

[7] Dorato, P. (2005) An Overview of Finite-Time Stability. Current Trends in Nonlinear Systems and Control. Birkhauser, Boston, 185-194.

[8] Amato, F., Ariola, M. and Dorato P. (2001) Finite-Time Control of Linear Systems Subject to Parametric Uncertainties and Disturbances. *Automatica*, **37**, 1459-1463.

[9] Amato, F., Ariola, M., Amato, F., Ariola, M. and Cosentino, C. (2006) Finite Time Stabilization via Dynamic Output Feedback. *Automatica*, **42**, 337-342.

[10] Amato, F., Ariola, M. and Cosentino, C. (2010) Finite-Time Control of Discrete-Time Linear Systems: Analysis and Design Conditions. *Automatica*, **46**, 919-924.

[11] Haddad, W.M. and L'Afflitto, A. (2015) Finite-Time Partial Stability and Stabilization and Optimal Feedback Control. *Journal of the Franklin Institute*, **352**, 2329-2357.

[12] Wang, L. and Shen, Y. (2016) Finite-Time Robust Stabilization of Uncertain Delayed Neural Networks with Discontinuous Activations via Delayed Feedback Control. *The Official Journal of the International Neural Network Society*, **76**, 46-54.

[13] 严志国，张国山. 线性随机系统有限时间 H_∞控制[J]. 控制与决策, 2011, 26(8): 1224-1228.

[14] 席裕庚，耿晓军，陈虹. 预测控制性能研究的新进展[J]. 控制理论与应用, 2000, 17(4): 469-475.

[15] Amato, F. and Ariola, M. (2005) Finite-Time Control of Discrete-Time Linear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **50**, 724-729. https://doi.org/10.1109/TAC.2005.847042

[16] Yaz, E.E. (1998) Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *Proceeding of the IEEE*, **86**, 2473-2474. https://doi.org/10.1109/JPROC.1998.735454

[17] Gahinet, P. (1994) Explicit Controller Formulas for LMI-Based H_∞ Synthesis. *Automatica*, **32**, 1007-1014.

[18] Kothare, M.V., Balakrishnan, V. and Morari, M. (1994) Robust Constrained Model Predictive Control Using Linear Matrix Inequalities. *American Control Conference IEEE*, Baltimore, 29 June-1 July 1994, 440-444. https://doi.org/10.1109/acc.1994.751775