

## Something about the numerical solutions to the Lorenz system

XuanChen

Numerical Analysis Research Center, Guangzhou

Email: chzffx@qq.com

---

### Abstract

Lorenz system is a typical chaotic system by Dr. E. Lorenz (1963), with the typical parameters ( $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ ), by using numerical method in explicit time scheme (such as Runge-Kutta method), the numerical solutions to this system are chaotic, which means the numerical solutions are sensitive dependence on initial conditions. On the basis of this system, atmosphere-oceanic predictability and data assimilation were studied, but there are some basic mathematic problems nonsupport the chaotic solutions. In this paper, we will propose these problems, and want these can be solved and attracted attentions.

### Keywords

Lorenz system; chaotic solutions; numerical method in explicit time scheme

**Subject Areas** Math & Physics

---

## Lorenz系统数值解存疑

陈璇

数值计算研究中心，广州

Email: chzffx@qq.com

收稿日期：2018年2月3日；发布日期：2018年2月6日

---

### 摘要

Lorenz系统是有E. Lorenz先生于1963年提出的一个典型的混沌系统，该系统在Lorenz先生给出的典型参数（ $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ ）下的显式（Runge-Kutta）数值解具有混沌效应，即，初值敏感性。该系统进一步导致大气海洋可预报性问题及资料同化问题，然而这些数值解仍然存在一定的基础性数学问题。本文将这些问题提出，希望得到解答和关注。

### 关键词

Lorenz系统；混沌解；显式数值

---

## 1 引言

Lorenz 系统在典型参数<sup>[1]</sup>（如无申明，本文所有讨论所采用的 Lorenz 系统的典型参数均为摘要所述的参数： $\sigma = 10$ ,  $\rho = 28$ ,  $\beta = 8/3$ ）的显式（如：Runge-Kutta 算法）算法<sup>[2, 3, 4]</sup>下，该数值解具有混沌属性，即，初值敏感性。据此，该系统的数值解特性还引出了大气海洋的可预报性<sup>[2, 3]</sup>和资料同化问题<sup>[3]</sup>。这些问题使得数值天气预报业务在过去五十年间由最初的 1~2 天

的预报时效延伸值 10 天<sup>[5]</sup>。在 Lorenz 系统的数值解（轨道）中，存在以下概念<sup>[6]</sup>：①轨道最终被吸引到相空间的一个有界区域（这个有界区域被称为奇怪吸引子<sup>[2,3,6,7]</sup>）；②运动是不稳定的，即，轨道最终不会收敛至一个特定值（含有 Z-轴上的点及静止点的轨道除外）；③初值敏感性<sup>[7]</sup>。由于经典指数下，体积元随时间呈指数收缩<sup>[2,3,6]</sup>，其参数为 $-(\sigma+1+\beta)$ ，这意味着这个有界区域，即，奇怪吸引子的维数小于 3，但由于在二维空间中不存在混沌流<sup>[6]</sup>，故吸引子区域的维数大于 2（精确维数为 2.04<sup>[8]</sup>到 2.06<sup>[6]</sup>）。奇怪吸引子有如下特征<sup>[6]</sup>：①是相空间中的一个有界区域；②初值敏感性；③系统的行为具有稳定性，即，吸引子外的一切轨线都要进入吸引子中<sup>[9]</sup>；④轨道不可能填满收缩域<sup>[9]</sup>。对一个有界区域而言，唯一的可能吸引子是极限环或不动点<sup>[6]</sup>。

依据上述观点，我们可以得出以下结论：①对于相空间内任意三维有限区域所有点（不包含 Z-轴上的点和静止点），均收敛至奇怪吸引子区域；②奇怪吸引子区域有界；③该区域体积为 0。这将导致一些基础的数学物理问题。

## 2 Lorenz 系统及一个简单的数学问题

Lorenz 系统控制方程如下：

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma(X - Y) \\ \dot{Y} = \rho X - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - \beta Z \end{cases}$$

式中， $\sigma$ 、 $\rho$ 、 $\beta$  为系统参数，在计算过程中往往取定值，在论文<sup>[2]</sup>中，Lorenz 给定的三个参数值分别为 10、28、8/3；方程右端不显含时间项，依据初值条件，该方程组可唯一确定方程解结构。Lorenz 方程组中第二、三个方程含有非线性项 XZ、XY，虽然从形式上来看，该方程组形式较为简单，但由于这两个非线性项的存在，使得解析求解异常困难。

由散度定理可得：

$$\dot{V} = \int_{d(t)} \frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} dXdYdZ$$

式中，V 为某个表面包络的体积元。该式的解析解为：

$$V(t) = V(0)e^{-(\sigma+\beta+1)t}$$

其中  $V(0)$  为初始体积，在经典参数下， $\sigma+1+\beta=41/3$ 。

目前，对于该系统的研究多基于定性分析或数值分析。在定性分析中，引入 Lyapunov 指数、极限环、渐进理论等解析手段研究 Lorenz 系统的收敛域、吸引子等几何形态结构；在定量的数值分析中，一般采用高精度数值积分算法，如 Runge-Kutta 积分方案进行数值分析。值得指出的是，Runge-Kutta 数值积分方案不论其精度如何，依然是一种显式结构算法。在该类算法下，Lorenz 系统的解为混沌解，除却静止点和 Z-轴上的点以外。

一个简单的数学问题：

在三维空间中，任取一有限连续三维子空间，在该空间内不包含 Lorenz 系统的静止点和 Z-轴上的点，能否构造一个一一映射使得该子空间内所有点均能映射至某一低维有限域（该低维有限域的体积为 0）内（即耗散系统维持守恒性质）。

### 3 映射构造及数学悖论

在此，先给出一些数学经典悖论：

①托里拆利小号：又称加百利号角，具有无限大的表面积和有限的体积，以这一悖论著称，即，利用有限体积的油漆可以灌满该小号，但要涂满该小号却需要无限的油漆；

②谢尔宾斯基三角垫：具有有限面积，无限长度；

③门格尔海绵：具有有限体积，无限表面积。

由 Hausdorff 测度的基本性质<sup>[10]</sup>和集论<sup>[11]</sup>的结论可知：三维空间中维度低于 3 的任意维度子空间的测度在三维空间中为 0，或者三维空间中任意维度等于 3 的子空间的势（由 Lorenz 系统的耗散性可知，对于系统中的恒定密度分布的区域而言，随着时间的增长，该区域原有物质的总质量不断衰减。在此，我们以势代替总质量，意为该区域的总质量或者测度一类反映计算区域总体度量的含义）远大于三维空间中维度低于 3 的任意维度子空间的势，即，两者不是等势的。

基于上文关于 Lorenz 系统数值解的结论，我们可以发现以下的一个计算事实：Lorenz 系统的任意两条不包含静止点和 Z-轴上点的相异轨道不相交。证明如下：

**证明：**依据定理对于相空间内任意三维有限区域所有点（不包含 Z-轴上的点和静止点），均收敛至奇怪吸引子区域及定理初值敏感性，可以假设，两条不包含静止点和 Z-轴上点的相异轨道相交于点 P，设两条轨道在交点 P 附近有一有界区域存在异于点 P 的两点 P1 及 P2 分

别位于两条轨道上。由于 Lorenz 系统采用显式格式求解，从 P 点出发将只有一条轨道，故，两条轨道在交点 P 以后将重合。此时，从 P1 及 P2 点出发计算的两条轨道将不满足初值敏感性。这与两条定理相违背，故而，Lorenz 系统的任意两条不包含静止点和 Z-轴上点的相异轨道不相交。据此，还可推论，在不包含静止点及 Z-轴上的点的轨道中，任意两条相异轨道不收敛至固定点，单一轨道不存在收敛性（初值敏感性）。

基于吸引子区域相体积为 0，我们可以发现三维相空间中任意维度等于 3 的子空间的势远大于三维空间中维度低于 3 的任意维度子空间的势。然而，依据如下定理：

①初值敏感性；

②对于相空间内任意三维有限区域所有点（不包含 Z-轴上的点和静止点），均收敛至奇怪吸引子区域；

③轨道不可能填满收缩域；

④奇怪吸引子区域有界。

我们可以构造一个一一映射，使得三维相空间中任意维度等于 3 的子空间的点与吸引子区域的点一一对应，构造如下：

在相空间中取一立方体区域，该空间中不包含静止点及 Z-轴上的点，包含该空间内的点任一轨道 T 存在某个点 F，点 F 位于吸引子区域，位于点 F 前的轨道点均不在吸引子区域，定义点 F 为轨道原点，该点时间定义为  $t_0$ ，轨道上位于原点后的点（Q）在轨道上与原点的距离与时间  $t_+$ （时间位于  $t_0$  右侧）有关；位于原点前的点在轨道上与原点的距离与时间  $t_-$ （时间位于  $t_0$  左侧）有关。显而易见，可以取立方体区域内轨道上的点（S）与原点的距离构造一个一一映射： $f: S \rightarrow R[0, \pi/2)$ 。由  $R[0, \pi/2)$  出发，可以通过正切函数将 S 映射到 Q 上。从函数性质出发，可以看出，这个映射是一个一一映射。据此，可以依据时间的单向性，将该区域上的点一一映射至吸引子区域。

依据本节提到的四个定理，可以发现位于立方体区域上的点与吸引子区域上的点存在一一对应关系；依据集论有关结论，可以证明，该立方体区域与吸引子区域是等势的。在此，可以将该区域延拓至整个三维相空间（不包含静止点和 Z-轴上的点）；故而，可以证明整个三维相空间（不包含静止点和 Z-轴上的点）与吸引子区域是等势的。

这与三维空间中任意维度等于 3 的子空间和三维空间中维度低于 3 的任意维度子空间不是等势的结论（三维空间中维度低于 3 的任意维度子空间的测度在三维空间中为 0 的结论及 Lorenz 系统的耗散本性等物理性质）相矛盾，故而可引出以下三个命题：

命题①：吸引子区域轨道是可数（无限）的，即，存在多对一的映射以保证收敛性；这表明 Lorenz 轨道在吸引子区域内存在重合；

命题②：Lorenz 系统的显式数值解不成立；

命题③：吸引子区域存在不为 0 的体积。

对于命题①，有以下事实支撑：对于相空间内任意三维有限区域所有点（不包含 Z-轴上的点和静止点），均收敛至奇怪吸引子区域；Lorenz 系统的任意两条不包含静止点和 Z-轴上点的相异轨道不相交。这样，命题①与初值敏感性相违背，故而初值敏感性为弱的，即，符合初值敏感性条件的轨道集合是可数（无限）的。

命题③与吸引子区域体积为 0 和 Lorenz 系统的耗散性相违背。

对于命题②则有以下计算事实作为支撑：

Lorenz 系统的隐式<sup>[12]</sup>离散方案如下：

$$\begin{cases} (1 + \sigma\Delta)X_{t+1} - \sigma\Delta Y_{t+1} - X_t = 0 \\ (1 + \Delta)Y_{t+1} - \rho\Delta X_{t+1} + \Delta X_{t+1}Z_{t+1} - Y_t = 0 \\ (1 + \beta\Delta)Z_{t+1} - \Delta X_{t+1}Y_{t+1} - Z_t = 0 \end{cases}$$

式中，时间步长 $\Delta = 0.01s$ （太短的时间步长会导致隐式解与显式解相一致<sup>[12]</sup>）。在不同初值下（表 1），轨道图如图 1：图 1（a）为隐式解，（b）为显式解，（c）为初值为(1.0, 1.0, 1.0)的 X-Z 相空间中隐式轨道与显式轨道的对比。

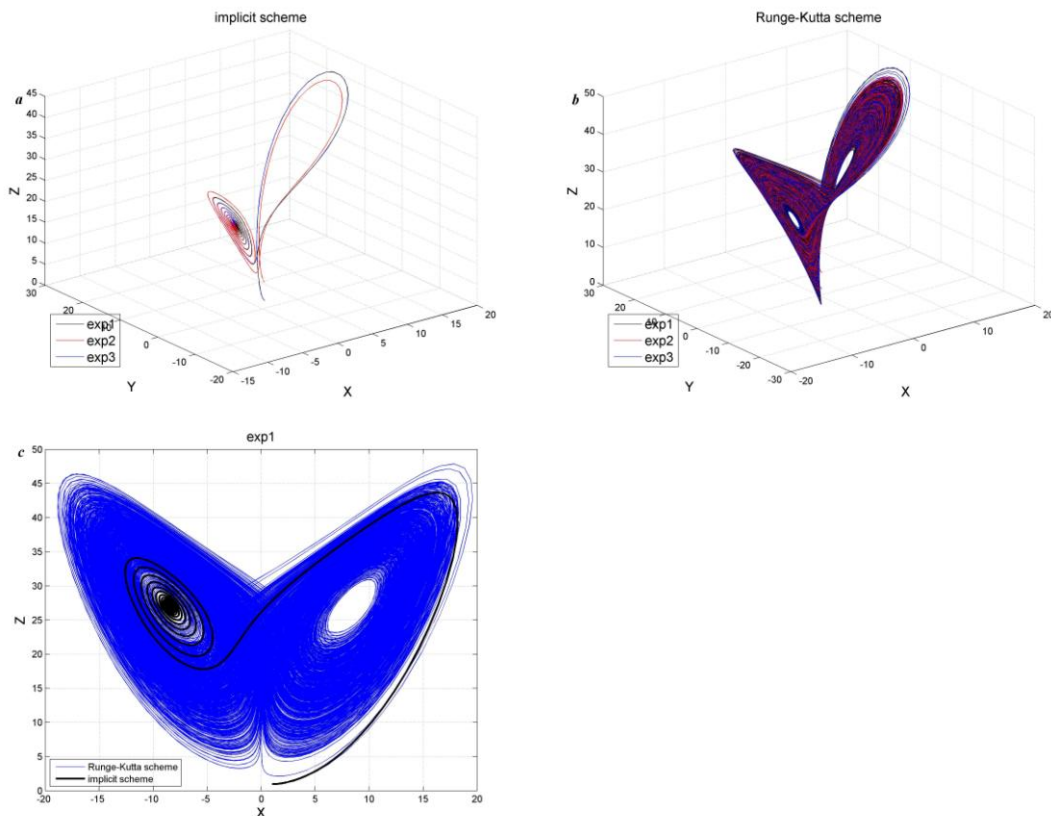


图 1 Lorenz 系统数值解

Fig. 1. Numerical solutions of the Lorenz equations

表 1 初始条件

Table 1. Initial conditions for different groups of contrastive experiments

	X(0)	Y(0)	Z(0)
exp1	1.0	1.0	1.0
exp2	2.0	3.0	4.0
exp3	1.0	1.3	1.0

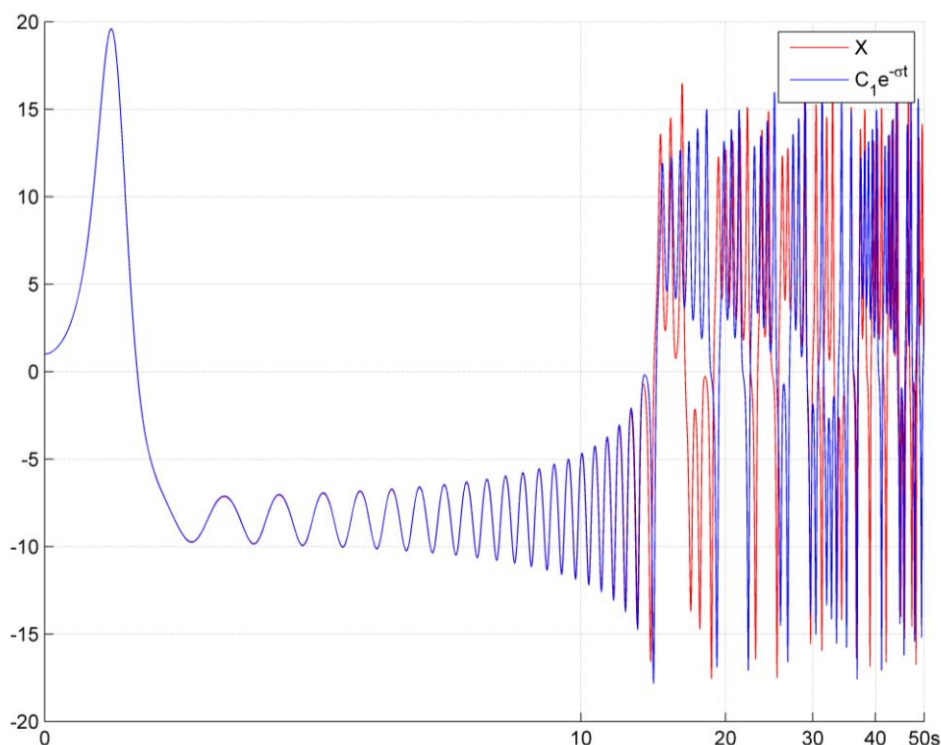
此外，令  $X = C_1 e^{-\sigma t}$ ,  $Y = C_2 e^{-t}$ ,  $Z = C_3 e^{-\beta t}$ , Lorenz 系统可改写为：

$$\begin{cases} \dot{C}_1 = \sigma C_2 e^{(\sigma-1)t} \\ \dot{C}_2 = C_1 e^{-(\sigma-1)t} (\rho - C_3 e^{-\beta t}) \\ \dot{C}_3 = C_1 C_2 e^{-(\sigma+1-\beta)t} \end{cases}$$

在  $C_1-C_2-C_3$  坐标系下，上述方程组是体积守恒的。采用 Runge-Kutta 法计算，可以发现，在这个变换下，计算结果经还原后与 Lorenz 系统前期的轨迹（图 2，仅给出 X 的序列）是吻合



的。从第 15s 左右开始出现分歧，且这个分歧的时间点随着时间步长的减小不断延长，但该时间段，在  $C_1-C_2-C_3$  空间内，计算结果中，初始单位体积的量级已由  $O(1)$  达  $O(e^{200})$  的量级以上，且还持续增长。从计算实例中可以发现，这个计算是发散的（除原点外，任意两个不同的初始点随着计算时间的增长，其距离不断增大），这与该方程组的体积守恒性质相矛盾，而在隐式算法下，则基本稳定。

图 2  $X-t$  曲线Fig. 2. Change curve of  $X-t$ 

#### 4 展望

这个存疑问题对于 Lorenz 系统的混沌行为影响至关重要，在此，我们认为 Lorenz 系统的混沌行为主要是由于显式格式的非线性项在迭代过程中造成的；而隐式解则不存在这一问题<sup>[12]</sup>。其次，如果显式解成立，则依据对于相空间内任意三维有限区域所有点（不包含  $Z$ -轴上的点和静止点）均收敛至奇怪吸引子区域与 Lorenz 系统的任意两条不包含静止点和  $Z$ -轴上

点的相异轨道不相交，可得出初值敏感性是弱的，即，符合初值敏感性条件的轨道集合是可数（无限）的或吸引子区域轨道是可数（无限）的。

### 参考文献

- [1] E. N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 20, (1963), 130-141.
- [2] Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos* (Third edition). Singapore: Elsevier (Singapore) Pte Ltd, 2015.
- [3] Eugenia Kalnay. *Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability*. New York: Cambridge University Press, 2002.
- [4] N. Razali & Ahmad R. Rozita. Ahmad R. Solving Lorenz system by using Runge-Kutta method. *European Journal of Scientific Research*. 2, (2009), 241-251
- [5] 香港天文台. 数值天气预报基础课程. 香港天文台: <http://www.hko.gov.hk>, 2010.
- [6] H. G. 舒斯特. 混沌学引论（朱鋈雄，林圭年，丁达夫译）. 成都: 四川教育出版社, 2010.
- [7] Michael Brin, Garrett Stuck. 动力系统引论（金成桴译）. 北京: 高等教育出版社, 2013.
- [8] 黄永念. 非线性动力学引论. 北京: 北京大学出版社, 2010.
- [9] 刘秉正, 彭建华. 非线性动力学. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [10] 朱华, 姬翠翠. 分形理论及其应用. 北京: 科学出版社, 2011.
- [11] A. H. 柯尔莫戈洛夫, C. B. 佛明. 函数论与泛函分析初步（段虞容，郑洪深，郭思旭译）. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [12] Chen, Xuan. Numerical Counterexamples of Lorenz System in Implicit Time Scheme. Preprints 2018, 2018010277 (doi: 10.20944/preprints201801.0277.v1).