

# Numerical Simulation of Quasi-Brittle Fracture in Concrete Structures with Extended Finite Element Method

Hongchang Qu, Feng Zhang, Yu Xia, Baodong Yang, Beiyi Zhang, Yuanxin Li

Lushan College of Guangxi University of Technology, Liuzhou

Email: 429182201@qq.com

Received: Jan. 10<sup>th</sup>, 2013; revised: Feb. 2<sup>nd</sup>, 2013; accepted: Feb. 10<sup>th</sup>, 2013

**Abstract:** In this paper, the extended finite element method (XFEM) is used for a discrete crack simulation of concrete using an adaptive crack growth algorithm. An interface model is proposed which includes normal and tangential displacements and allows the transfer of shear stresses through the interface. Different criteria for predicting the direction of the extension of a cohesive crack are conducted in the framework of the XFEM. On the basis of two examples, a comparison between the maximum circumferential stress criterion, the maximum energy release rate and the minimum potential energy criterion with experimental data has been carried out. The considered numerical simulations have confirmed the flexibility and effectiveness of the XFEM for the modelling of crack growth under general mode I and mixed-mode loading conditions.

**Keywords:** Extended Finite Element Method; Cohesive Crack; Crack Extension Criterion; Concrete

## 扩展有限元法在准脆性混凝土结构断裂中的数值模拟

琚宏昌, 张 凤, 夏 雨, 杨宝栋, 张贝宜, 李远心

广西科技大学鹿山学院, 柳州

Email: 429182201@qq.com

收稿日期: 2013年1月10日; 修回日期: 2013年2月2日; 录用日期: 2013年2月10日

**摘 要:** 扩展有限元法是基于自适应离散裂纹方法进行的混凝土裂纹扩展仿真模拟。并采用接触边界模型, 接触边界模型包括正向位移和切向位移, 允许通过界面进行剪切应力的传递, 在扩展有限元法的框架中, 对一个有凝聚力的裂纹扩展的延伸方向的研究有不同准则。通过两个例子, 对最大周向应力理论, 最大能量释放率理论和最小势能理论的实验数据进行了比较并形成规范。采用 XFEM 方法在一般加载模式 I 型和混合型加载条件下进行的混凝土断裂扩展数值模拟的灵活性和有效性已经得到了证实。

**关键词:** 扩展有限元法; 凝聚力裂缝; 混凝土裂纹扩展准则; 混凝土

### 1. 引言

准脆性材料(如混凝土, 岩石等)的断裂特点是受载前是连续介质, 受载后产生局部损伤开裂, 形成宏观裂缝, 裂缝扩展至完全连通, 最后发生沿裂缝的分离、错动乃至大变形破坏。准脆性材料的断裂测试昂贵和繁琐。一些巨大的建筑物或项目是不可能做这种测试的。因此, 可靠的混凝土数值模拟是非常重要的

结构规划, 也是对现有建筑物的安全评估。它对不同因素(诸如材料特性)影响下进行参数研究, 降低了实验验证总数。

为了模拟裂纹扩展路径, 研究人员们已提出了一些模型。Hillerborg 已经提出了混凝土中存在的断裂塑性区的所谓“分离式虚拟裂缝模型”<sup>[1]</sup>。随后制定出了一系列耦合的法向界面及切向界面概念。Vonn 提出

了混凝土的聚合/界面砂浆模型, Cervenka 用耦合界面模型模拟了混凝土坝的断裂情况, Carol 也已经提出了以可塑性<sup>[2-4]</sup>为基础模型。

将这些界面模型规范应用到有限元法的最简单方法就是采用零厚度界面元素。另一种方法就是在所有的连续单元边界上设置界面单元, 但这种方法不能很好的解决裂纹路径对网格边界的依赖性。XFEM 的主要优点就是对非连续位移场的描述不再依赖于网格划分, 因此, 在建模上不需增加界面单元<sup>[5]</sup>, 使得造价降低到一个合适的位置。

本文研究了 XFEM 在凝聚力裂纹扩展模拟中的应用。该模拟方法的有效性已经经过了两项模拟测试。一项是一般模式 I 型裂纹的扩展测试, 一个是混合型 I-II 型裂纹扩展测试。根据实验数据所得, 这两种模式的精确度都能满足要求。

## 2. 扩展有限元法

扩展有限元法中, 裂缝和不同材料界面的模拟独立于网格划分, 具体想法是, 用富集特殊的位移插值函数表示:

$$\Phi_{a=1,\dots,4} = r[\sin(\theta/2), \cos(\theta/2), \sin(\theta)\sin(\theta/2), \sin(\theta)\cos(\theta/2)] \quad (4)$$

其中  $\theta$  是角度,  $r$  是局部坐标系上的裂纹尖端点  $P$  的半径。改变弯曲裂缝, 等式(4)适用于直裂纹。在裂纹扩展的仿真模拟中, 裂纹的扩展方向不一定是直线也可以是曲线。为了确保在不连续的位移场仍然存在裂缝轨迹, 可以对文献[7]提出的一项进行修改。本文提出了一种改进, 就是在具有连续位移场的材料结构中。将  $\theta$  修改为:

$$\theta = \arcsin(d/r) \quad (5)$$

其中  $d$  是离裂缝最短的距离,  $r$  是到裂纹尖端的距离。凝聚力裂缝。在该 XFEM 的框架内, 凝聚力裂缝是直接形成的(7)。如果存在凝聚力裂缝, 结构的总能量可以根据额外的凝聚力通过裂缝转移量来计算。忽略结构外力, 总能量公式为:

$$\Pi = \int_{\Omega} \int_0^{\epsilon} \sigma^T(\tilde{\epsilon}) d\tilde{\epsilon} d\Omega - \int_{\Gamma^t} F^T u d\Gamma_F - \int_{\Gamma_{coh}^+} \int_0^u t_+^T(\tilde{u}) d\tilde{u} d\Gamma_{coh}^- - \int_{\Gamma_{coh}^-} \int_0^u t_-^T(\tilde{u}) d\tilde{u} d\Gamma_{coh} \quad (6)$$

其中  $t_+ = -t_-$ , 是沿着裂缝转移的单位面积力,  $u$  为位移,  $\Gamma_{coh}$  是裂纹表面和  $\Gamma_t$  是规定的牵引力的边界。在

$\Gamma_{coh}$  上引入相对裂缝张量  $w = u^- - u^+$ , 方程可以简化为:

$$\Pi = \int_{\Omega} \int_0^{\epsilon} \sigma^T(\tilde{\epsilon}) d\tilde{\epsilon} d\Omega + \int_{\Gamma_{coh}} \int_0^w t^T(\tilde{w}) d\tilde{w} d\Gamma_{coh} - \int_{\Gamma^t} F^T u d\Gamma_F \quad (7)$$

令  $t = t^+$ 。裂纹张量  $w$  可以用节点位移  $d$  和与不同的侧面裂纹相对应的位移插值形函数来表示。合成矩

阵  $\bar{B}$ ,  $w$  表示为:

$$w = \bar{B}(x)d \quad (8)$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^{N_{tot}} \phi_{i,std}(x) d_{i,std} + \sum_{j=0}^{N_{enr}} \psi(x) \phi_{j,enr}(x) d_{j,enr} \quad (1)$$

其中  $N_{tot}$  是节点总数,  $N_{enr}$  是插值节点数。  $\phi_{i,std}$  是标准形函数, 丰富的插值是一系列形函数  $\phi_{j,enr}$  组成, 这适合统一分区, 而富集函数是  $\psi(x)$ ,  $d_{i,std}$  是标准的节点自由度,  $d_{j,enr}$  是插值节点自由度。(1)式采用的是标准的 Galerkin 插值法:

$$Kd = f, \quad K_{ij} = \int_{\Omega} B_i^T C B_j, \quad f_i = \int_{\Gamma} \phi_i t \quad (2)$$

其中  $B_i$  是形函数的导数,  $C$  为线性弹性材料的基体材料,  $t$  为规定的边界  $\Gamma$  的牵引力。裂纹的特点是不连续的位移场, 因此可用修改后的 Heaviside 函数表示:

$$H(x) = \begin{cases} -1, & x \in \Omega_- \\ 1, & x \in \Omega_+ \end{cases} \quad (3)$$

其中  $\Omega_-$  和  $\Omega_+$  代表了裂纹的两个方向。本文提出了一种解决整个裂纹上的应力问题的凝聚力模型。即在裂纹尖端附近的应力场不具备奇异性。根据文献[6], 下式在计算裂纹尖端富集点时具有特殊功能:

此外, 通过裂缝转移的力可以用裂缝张量来表示:

$$t = \bar{C}(w)w \quad (9)$$

其中  $\bar{C}$  是材料基体的界面。

### 3. 裂纹的生成和扩展准则

本文中在裂纹生长段采用主应力准则。如果每达到平衡后主应力超过了任一个结点上材料的抗拉强度, 就会生成新的裂缝。这个裂缝与对应结点上两个方向的规定长度的特征向量正交。

这个结论, 对于现有的凝聚力裂纹是否增长, 可以由不同的方法判定。如虚拟裂纹扩展方法(VCE)和

$$u_I = K_I \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k-1+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + K_{II} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k+1+2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (10)$$

$$u_{II} = K_I \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k+1-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - K_{II} \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ k-1-2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (11)$$

其中在平面应力问题上  $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ , 平面应变问题上  $\kappa = 3-4\nu$ ,  $\mu = E/2(1+\nu)$ 。通过在裂纹尖端使用计算出的裂纹张开位移并将结果代入方程(10)和(11), 虚拟应力强度因子可以计算出来。最后由最大周向拉应力理论给出裂纹扩展方向:

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{4} \frac{K_I}{K_{II}} \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \quad (12)$$

使用以上理论是假设了凝聚力不改变裂纹扩展方向, 假设如[13]。最大能量释放率理论是另一种描述在裂纹尖端的应力状态的方法, 主要是结点如  $J_1$  和  $J_2$  的使用。结点  $J$  被定义为:

$$J_k = \int_{\Gamma} \left[ \omega n_k - \sigma_{ij} \frac{\partial \mu_i}{\partial x_k} n_j \right] d\Gamma \quad (13)$$

其中  $\Gamma$  为任意裂纹尖端奇异封闭路径和  $w$  是应变能量密度。式(13)在加权函数  $q$  帮助下将结点边界转移到面结点, 运用了离散定理, 并考虑到加权函数  $q$  的效应, 能量释放率可以表示为  $J_1$  和  $J_2$  的函数:

$$G = J_1 \cos(\theta) + J_2 \sin(\theta) \quad (14)$$

式(14)中的最大值是当

塑性材料扩展方法<sup>[8,9]</sup>。本文是基于凝聚力裂纹尖端的应力状态的应用准则。如果凝聚力界面内部的弹性极限超过了裂纹尖端一定距离, 裂纹就会扩展。

### 裂纹的扩展方向

裂纹的扩展方向在数值模拟中起着关键作用。文献资料中提到了裂纹扩展方向的多种理论。有最大周向拉应力理论, 最大能量释放率理论和最小应变能量密度理论<sup>[1]</sup>。在 XFEM 中, 有人提出了非局部最大主应力理论<sup>[10]</sup>。另一种常用的方法是全球跟踪算法<sup>[11]</sup>。文献[12]提出了裂纹扩展最大周向应力理论, 其中裂纹是沿着最大周向拉应力方向扩展。假设存在无应力裂纹, 周围的一极裂纹尖端的位移坐标系为:

$$\theta = \arctan(J_2/J_1) \quad (15)$$

其中裂纹扩展角已经定义。一般情况下, 最小势能理论应用的首要假设条件是绝热系统(无热交换)和准静态条件下(没有动能)可写为:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial(U^e + U^p)}{\partial t} + \frac{\partial(\Gamma^e + \Gamma^d)}{\partial t} \quad (16)$$

这个方程表明在裂纹扩展过程中能量守恒, 其中  $W$  是外力功,  $U^e/U^p$  是弹性/塑性应变能,  $\Gamma^e$  是裂缝中存储的弹性能和  $\Gamma^d$  是在凝聚力裂纹中的能量消耗。据推测, 沿着裂缝的发展方向, 系统( $W - U - \Gamma^e$ )中潜在的能量有一个最小值, 该耗能能量( $U^p + \Gamma^d$ )同样有一个最大值。通过确定系统的平衡状态, 外力的作用和内部弹性能量可以计算出来。在 Dirichlet 边界条件下, 不考虑外力作用, 而在 Neumann 边界条件下, 外力作用可以表示为:

$$\Delta W_{ext} = \sum_{i=1}^n F_i (\Delta \mu_i) \quad (17)$$

其中  $F_i$  是施加在节点上的力和  $\Delta \mu_i$  裂纹延伸各个方向的位移。内部弹性能量可以用类似的方法确定:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma(\varepsilon, \varepsilon_p) : (\varepsilon - \varepsilon_p) d\Omega \quad (18)$$

$$\Gamma^e = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sigma(w) : w d\Gamma \quad (19)$$

其中  $\varepsilon - \varepsilon_p$  为弹性应变,  $\sigma$  是材料的相应的应力和  $w$  是沿着裂缝界面  $\Gamma$  转移的凝聚力的相对裂纹张量。此例中, 材料为线弹性的, 这意味着不存在塑性应变和塑性应变能。

根据上述步骤, 耗散能量可以被判定为一个方向的离散数。为了确定具有最大耗散能的方向。从最大值的确定, 可以用一个近似函数计算支撑点的离散方向, 也就是说, 本系统的最小势能可以求得。

## 4. 数值模拟举例

### 4.1. 四点弯曲试验

第一个例子是双切口梁的四点弯曲试验研究<sup>[14]</sup>。测试样本厚度为 100 毫米, 加载图如图 1(a)。杨氏模量, 泊松比, 单轴拉伸强度和具体的断裂能分别为  $E = 27.0 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.18$ ,  $f_{ct} = 2.0 \text{ Mpa}$  和  $G_f = 100.0 \text{ N/m}$ 。该模型由 6 个节点的三角形单元组成, 但只有角节点富含特殊函数。图 2 为各种准则条件下的荷载 - 位移曲线对比图。

正如图 2 验证, 载荷 - 挠度曲线在没有任何参数拟合实验数据的应用下显示出良好的对应关系。采用

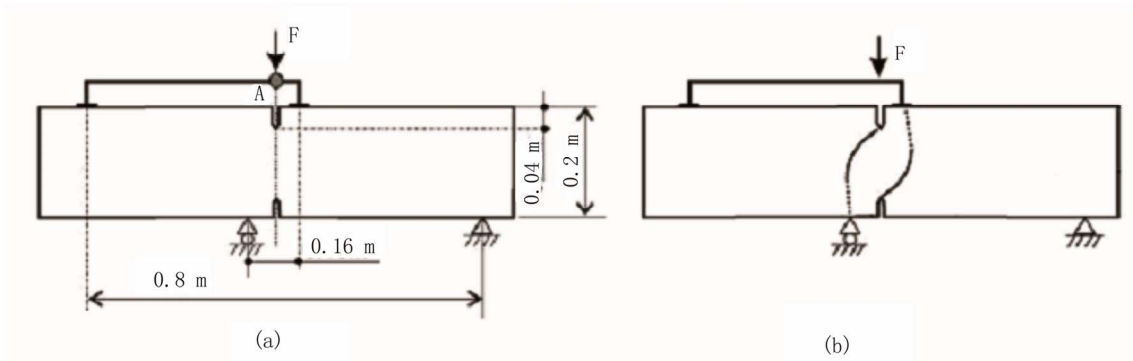


Figure 1. Four-point bending test for a double-notched beam. (a) Experimental setup; (b) Crack path for the crack extension  
图 1. 双切口梁的四点弯曲试验图。(a) 实验装置图; (b) 裂纹扩展路径图

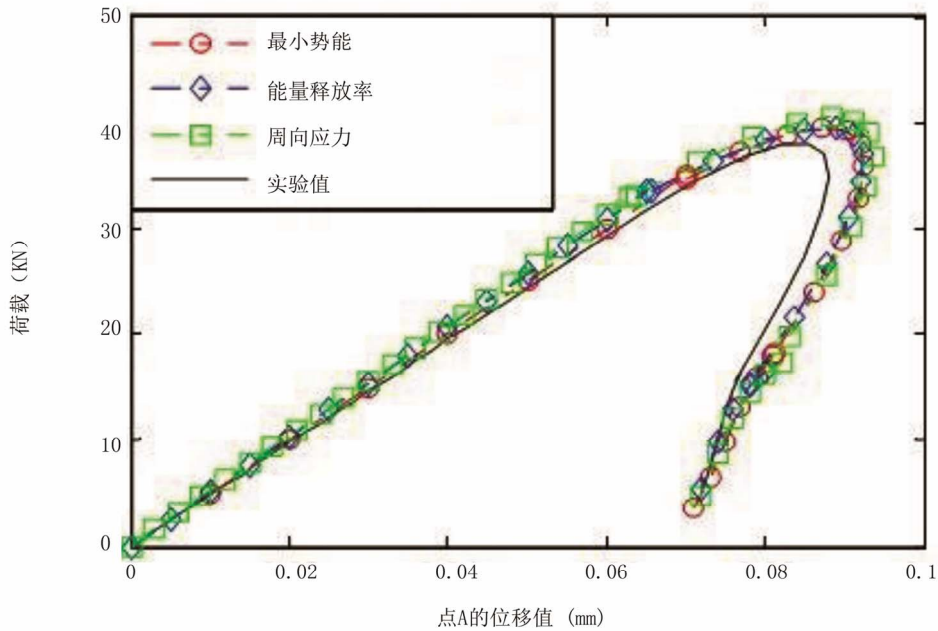


Figure 2. Load-displacement curves for four-point bending test  
图 2. 四点弯曲试验的荷载 - 位移图

不同准则考虑裂纹扩展方向，裂纹发展稍有不同见图 1(b)。其荷载 - 位移曲线几乎是相同的。

#### 4.2. 混合型断裂试验

第二个例子是一个混合型断裂试验如[1]进行。该尺寸为  $200 \times 200 \times 50$  mm, 25 mm 的切口深度和 5 mm 的切口宽度, 如图 3 所示。抗压强度和劈裂抗拉强度分别为  $f_c = 46.24$  Mpa,  $f_s = 3.67$  Mpa, 而弹性模量, 泊松比和断裂能分别为  $E = 30.0$  GPa,  $\nu = 0.2$  和  $G_f = 110$  N/m。从劈裂抗拉强度估算出单轴拉伸强度为  $f_{ct} = 3.0$  Mpa。剪切力  $P_s$  在位移控制下多达 10 kN。随后的剪切承载力保持不变, 试样在位控制之下处于正常加载  $P_n$  方向上。三角形单元采用的是 8 mm 网格划分尺寸。

混合型断裂试验中不同准则应用下对裂纹扩展路径的影响如图 4 所示。混合型断裂试验荷载 - 位移曲线如图 5 所示。比较不同准则裂纹扩展路径, 可以观察到最大周向应力理论的曲率比使用标准最大能量释放率低。不同裂纹扩展路径对荷载 - 挠度曲线产生的影响不同, 如图 5 所示。最大周向应力理论下由于快速增长的裂纹长度使得它耗散的能量更多。

#### 5. 结论

本文阐述了准脆性应用材料(如混凝土, 岩石等)对离散的裂纹扩展 XFEM 的应用。确定裂纹扩展路径的三种应用理论(最大周向应力理论, 最大能量释放

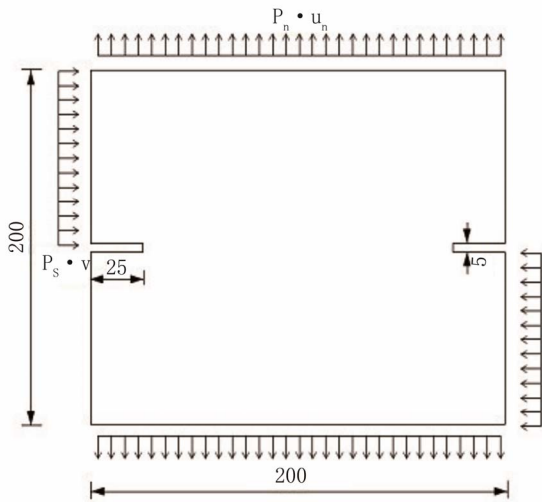


Figure 3. Geometry of specimen for the mixed-mode fracture test  
图 3. 混合型断裂试验几何图

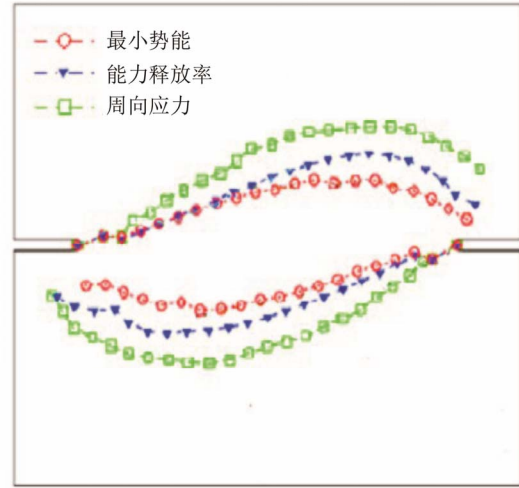


Figure 4. Influence of different direction criteria on crack path in the mixed-mode fracture test  
图 4. 混合型断裂试验中不同准则应用下对裂纹扩展路径的影响

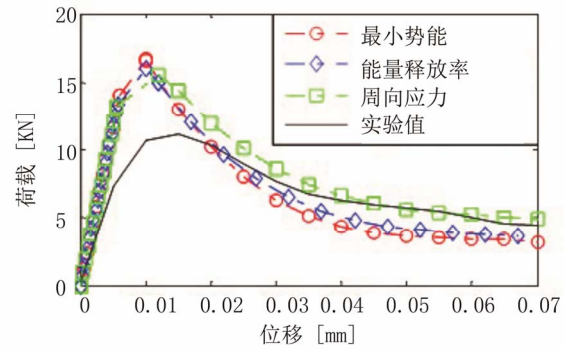


Figure 5. Load-displacement curve for mixed-mode fracture test  
图 5. 混合型断裂试验荷载 - 位移曲线

率理论和最小势能理论)是在 XFEM 背景下研究的。在上面两个例子的基础上, 三种准则计算的实验数据的比较已经得出。

一般模式 I 和混合型加载条件下模拟裂纹增长的 XFEM 已经证实了其灵活性和有效性。在这两种情况下计算的结果准确, 再现了实验测试的主要特征。模式 I 主要的问题是假设了一个有凝聚力的裂纹增长与无应力裂纹扩展方向相同(最大能量释放率的方法就是出现最大周向正应力方向), 而对于混合型模式下裂纹扩展的方向不能忽视对凝聚力的考虑。该最小势能的应用应仅限于模型 II 影响的模式。否则基于线弹性断裂力学最大能量释放率是可取的。

#### 参考文献 (References)

[1] J. F. Unger, S. Eckardt and C. Könke. Modelling of cohesive

- crack growth in concrete structures with the extended finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2007, 196(41-44): 4087-4100.
- [2] H. Qu, G. Chen. Numerical simulation of different-shaped random aggregates' influence on concrete's compression strength. *Advanced Materials Research*, 2008, 33-37: 623-630.
- [3] H. Qu, P. Zhang. Debonding analysis along a softening frp-concrete interface between two adjacent cracks in plated beams. *Advanced Materials Research*, 2010, 97-101: 1227-1234.
- [4] N. Moës, J. Dolbow and T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 1999, 46(1): 131-150.
- [5] I. Carol, M. Lopez and O. Roa. Micromechanical analysis of quasi-brittle materials using fracture-based interface elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2002, 52(1-2): 193-215.
- [6] N. Moës, T. Belytschko. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 2002, 69(7): 813-833.
- [7] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui and C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(4): 993-1013.
- [8] V. Tvergaard. Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids. *Engineering Fracture Mechanics*, 2003, 70(14): 1859-1868.
- [9] Z. Yang. An energy-based crack growth criterion for modelling elastic-plastic ductile fracture. *Mechanics Research Communications*, 2004, 32(5): 514-524.
- [10] G. N. Wells, L. J. Sluys. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2001, 50(12): 2667-2682.
- [11] J. Oliver, A. E. Huespe. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(30-32): 3195-3220.
- [12] N. Moës, A. Gravouil and T. Belytschko. Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets—Part I: Mechanical model. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 2002, 53(11): 2549-2568.
- [13] D. A. Cendón, J. C. Gálvez, M. Elices and J. Planas. Modelling the fracture of concrete under mixed loading. *International Journal of Fracture*, 2000, 103(3): 293-310.
- [14] J. Oliver, A. E. Huespe. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2004, 193(30-32): 3195-3220.