

# A General Study on Equivalent Resistance of $2 \times n$ -Rank LC Network\*

Dehua Wang<sup>1</sup>, Zhizhong Tan<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Suzhou Medical Vocational and Technical College, Suzhou

<sup>2</sup>College of Science, Nantong University, Nantong

Email: dhwang@szhct.edu.cn, tanz@ntu.edu.cn

Received: Mar. 2nd, 2012; revised: Mar. 27th, 2012; accepted: Mar. 29th, 2012

**Abstract:** The research in equivalent resistance of resistance network is usually quite complex. Based on the acquired universal law of pure  $2 \times n$ -rank equivalent resistance, a detailed study of the equivalent resistance of  $2 \times n$ -rank has been made. The complex analysis on the basis of the equivalent resistance law provides a series of general formulae of input equivalent resistance in  $2 \times n$ -rank LC network. A new conclusion has been reached: under certain conditions, the equivalent resistance has the feature of oscillation and chaotic with the change of variable  $n$ .

**Keywords:**  $2 \times n$ -Rank Network; Equivalent Resistance; Complex Analysis; General Formulae; Oscillation; Chaotic Characteristics

## $2 \times n$ 阶 LC 网络等效复阻抗研究\*

王德华<sup>1</sup>, 谭志中<sup>2</sup>

<sup>1</sup>苏州卫生职业技术学院, 苏州

<sup>2</sup>南通大学理学院, 南通

Email: dhwang@szhct.edu.cn, tanz@ntu.edu.cn

收稿日期: 2012年3月2日; 修回日期: 2012年3月27日; 录用日期: 2012年3月29日

**摘要:** 复阻抗网络等效复阻抗的研究通常比较复杂, 本文基于已获得的  $2 \times n$  阶纯电阻网络等效电阻的普适规律, 对  $2 \times n$  阶网络等效复阻抗进行了详细研究, 根据等效电阻规律的复数分析, 得到了  $2 \times n$  阶 LC 网络输入端等效复阻抗的一系列普适规律, 获得了一些新的结论, 研究发现在一定条件下等效复阻抗随阶数  $n$  变化而具有振荡特性和混沌特性。

**关键词:**  $2 \times n$  阶网络; 等效复阻抗; 复数分析; 普适规律; 振荡特性; 混沌特性

### 1. 引言

电阻网络模型的建立与研究已有一百多年历史, 自从 1845 年德国物理学家基尔霍夫(1824~1887)创立了节点电流定律和回路电压定律, 人类就开始通过建立电阻网络模型解决许多抽象和复杂的科学问题<sup>[1]</sup>。电阻网络等效电阻公式的获得通常比较困难, 原因在

于它是一个跨学科的科学难题, 不仅需要电路理论知识, 而且需要数学理论与方法的创新, 复杂网络等效电阻普适公式的研究堪称百年难题<sup>[1]</sup>。由于电阻网络模型具有具体直观以及便于分析研究等特征, 电阻网络模型的构建与研究已成为解决一系列科学问题研究的基本方法, 许多实际问题可以通过构建电阻网络模型进行模拟<sup>[1-13]</sup>。电阻网络模型的建立与研究具有理论意义与实际应用价值。

人们对纯电阻网络等效电阻的研究已经取得了

\*资助信息: 南通大学自然科学基金(批准号: 11Z054), 南通大学教学研究基金(批准号: 13050613)资助项目。

很大进展<sup>[1-11]</sup>，但是在复阻抗领域的等效复阻抗研究却不多<sup>[12,13]</sup>。

根据文献[1-11]的定义方式，我们定义图 1 所示结构为 2 × n 阶电阻网络模型，其特点是，竖直方向(纵向)有 2 个电阻  $r_0$ ，水平(横向)方向的 2 个轴上均有 n 个电阻  $r$ 。

文献[4,5]研究了图 1 所示网络结构的 2 × n 阶电阻网络，给出了 a,c 两节点间的等效电阻  $R_{ac}(n)$  和 a,b 两节点间的等效电阻  $R_{ab}(n)$  的 2 个一般公式。本文拟基于已获得的 2 个纯电阻网络等效电阻的普适公式来研究 2 × n 阶网络等效复阻抗的规律。

文献[12]研究了二端梯形网络的等效复阻抗，本文拟采用文献[12]研究等效复阻抗的复数分析方法，研究图 2 所示的 2 × n 阶网络的等效复阻抗，即研究 a,c 两节点间的等效复阻抗  $Z_{ac}(n)$  和 a,b 两节点间的等效复阻抗  $Z_{ab}(n)$  的普适公式和基本特性。

## 2. 等效复阻抗的通用规律

图 2 为一般形式的 2 × n 阶 RLC 复阻抗网络模型，其中 R、L、G、C 都是沿线分布的参数(单位长度上的物理量，设 R 为电阻，L 为电感，G 为电导，C 为电容)。

为研究方便，将图 2 中的复阻抗简记为与图 1 相对应的  $r, r_0$ ，如果输入电压的圆频率为  $\omega$ ，则

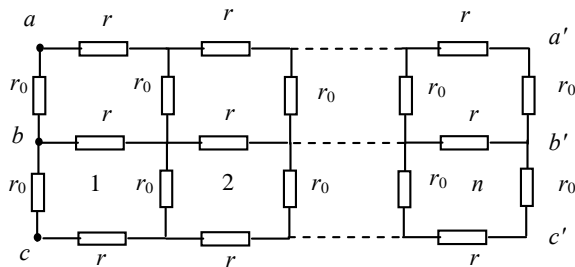


Figure 1. 2 × n-rank resistance network model  
图 1. 2 × n 阶电阻网络模型

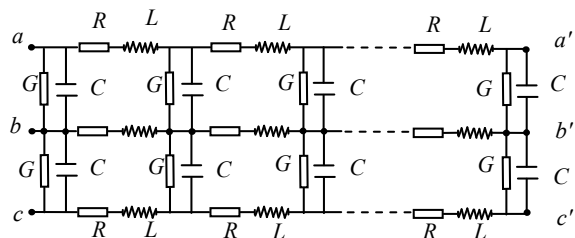


Figure 2. 2 × n-rank RLC resistance network model  
图 2. 2 × n 阶 RLC 复阻抗网络模型

$r = R + j\omega L$ ， $r_0 = 1/(G + j\omega C)$ 。其中  $j$  为虚数单位， $j^2 = -1$ 。

文献[4,5]研究了图 1 所示的 2 × n 阶纯电阻网络模型，得到的两个基本公式为

$$R_{ac}(n) = 2 \left( 1 - \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} \right) r_0 \quad (1)$$

$$R_{ab}(n) = r_0 - \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} + \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} \right) r_0 \quad (2)$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  分别是下列关于  $x$  和  $y$  的二次方程的 2 组根

$$x^2 = (d+2)x - 1 \quad (3)$$

$$y^2 = (3d+2)y - 1 \quad (4)$$

分别由方程(3)(4)解得

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(d+2+\sqrt{d^2+4d}) \\ \beta = \frac{1}{2}(d+2-\sqrt{d^2+4d}) \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{2}(3d+2+\sqrt{9d^2+12d}) \\ \delta = \frac{1}{2}(3d+2-\sqrt{9d^2+12d}) \end{cases} \quad (6)$$

其中  $d = r/r_0$ 。

由于  $r, r_0$  是由符号表示的已知量，具有一般性，故当  $r = R + j\omega L$ ， $r_0 = 1/(G + j\omega C)$  时，式(1)、(2)在复阻抗的情形下仍然成立，所以两个基本公式(1)、(2)也适用于图 2 所示网络模型的等效复阻抗公式。需要说明的是，当  $r, r_0$  为复阻抗时，公式(1)、(2)需要进行复数分析研究，否则就不能反映复阻抗的基本特性。下面仅对  $r, r_0$  为 LC 阻抗的情形进行具体研究。

## 3. 2 × n 阶 LC 网络的等效复阻抗

如上分析可知，图 2 所示的 2 × n 阶 RLC 网络的等效复阻抗可以用公式(1)和(2)进行统一表示。但是，当研究其具体特性时，其结论比较复杂。本文拟研究图 3 所示比较简单的 LC 网络模型的等效复阻抗特性。

对于 LC 复阻抗网络，横向阻抗  $r = j\omega L$ ，纵向阻抗  $r_0 = 1/(j\omega C)$ ，由于  $d = r/r_0$ ，所以  $d = -\omega^2 LC$ ，并且得到方程式(3)(4)的判别式分别为

$$\Delta_1 = d(d+4) = \omega^2 LC(\omega^2 LC - 4) \quad (7)$$

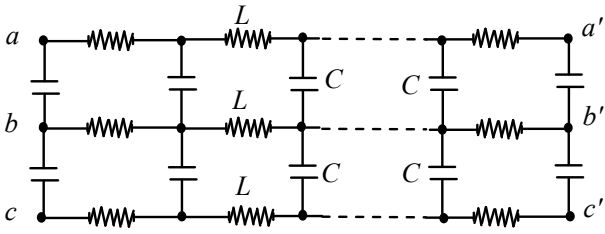


Figure 3. 2 × n-rank LC resistance network model  
图 3. 2 × n 阶 LC 复阻抗网络模型

$$\Delta_2 = 3d(3d + 4) = 3\omega^2 LC [3\omega^2 LC - 4] \quad (8)$$

### 3.1. 等效复阻抗 $Z_{ac}(n)$ 的特性

#### 3.1.1. 情形 1: $\omega > 2/\sqrt{LC}$

当  $\omega > 2/\sqrt{LC}$  时, 有  $\Delta_1 > 0$ 。所以, 将  $r = j\omega L$ ,  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(5)得到

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left( -\omega^2 LC + 2 + \omega \sqrt{(\omega LC)^2 - 4LC} \right) \\ \beta = \frac{1}{2} \left( -\omega^2 LC + 2 - \omega \sqrt{(\omega LC)^2 - 4LC} \right) \end{cases} \quad (9)$$

其中  $\alpha, \beta$  为实数。为区别于等效电阻的表示方式, 本文用  $Z_{ac}(n)$  表示  $a, c$  两节点间的等效复阻抗, 所以由式(1)得到

$$Z_{ac}(n) = j \frac{2}{\omega C} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} - 1 \right) \quad (10)$$

此时  $Z_{ac}(n)$  为纯虚数。

当  $n \rightarrow \infty$  时, 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{1}{\beta} = \alpha$ , 所以由(10)得到

$$Z_{ac}(\infty) = j \frac{2}{\omega C} (\alpha - 1) = j \frac{1}{C} \left( \sqrt{(\omega LC)^2 - 4LC} - \omega LC \right) \quad (11)$$

由于  $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}$  是  $n$  的减函数, 所以式(10)的振幅具有递减特性, 其振幅随着  $n$  的变化而无限接近于式(11)的振幅。

#### 3.1.2. 情形 2: $\omega = 2/\sqrt{LC}$

当  $\omega = 2/\sqrt{LC}$  时, 有  $\Delta_1 = 0$ , 此时  $\alpha = \beta = -1$ , 所以取极限得到

$$\lim_{\alpha \rightarrow \beta} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{n}{(n+1)\beta} = \frac{-n}{n+1} \quad (12)$$

将  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(1)并且应用式(12)得到

$$Z_{ac}(n) = -j \frac{2}{\omega C} \left( 2 - \frac{1}{n+1} \right) \quad (13)$$

由式(13)取极限容易得到

$$Z_{ac}(\infty) = -j \frac{4}{\omega C} \quad (14)$$

由于  $2 - \frac{1}{n+1}$  是  $n$  的增函数, 所以式(13)的振幅具有递增特性, 其振幅随着  $n$  的变化而无限接近于式(14)的振幅。

#### 3.1.3. 情形 3: $\omega < 2/\sqrt{LC}$

当  $\omega < 2/\sqrt{LC}$  时, 有  $\Delta_1 < 0$ , 所以由(9)得到

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \left( -\omega^2 LC + 2 + \omega \sqrt{-LC(-\omega^2 LC + 4)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\omega^2 LC + 2 + j\omega \sqrt{LC(-\omega^2 LC + 4)} \right) \\ &= \cos \theta + j \sin \theta \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\theta = \arccos \left( 1 - \frac{1}{2} \omega^2 LC \right)$ , 同理得到

$$\beta = \cos \theta - j \sin \theta \quad (16)$$

所以由式(15)(16)得到

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} &= \frac{(\cos \theta + j \sin \theta)^n - (\cos \theta - j \sin \theta)^n}{(\cos \theta + j \sin \theta)^{n+1} - (\cos \theta - j \sin \theta)^{n+1}} \\ &= \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta} \end{aligned} \quad (17)$$

将式(16)(17)及  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(1)得到

$$Z_{ac}(n) = j \frac{2}{\omega C} \left( \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta} - 1 \right) \quad (18)$$

式(18)反映了等效复阻抗以  $n$  为变量时具有振荡特性这一规律。其振荡特性如图 4、5 所示, 这里取了  $\theta = 0.20$  弧度,  $\theta = 0.24$  弧度的两种情形。图 4、5 中横坐标表示变量  $n$ , 纵坐标表示复阻抗值的大小。

### 3.2. 等效复阻抗 $Z_{ab}(n)$ 的特性

#### 3.2.1. 情形 1: $\omega > 2/\sqrt{LC}$

当  $\omega > 2/\sqrt{LC}$  时, 有  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ , 所以, 将  $r = j\omega L$ ,  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(5)(6)得到

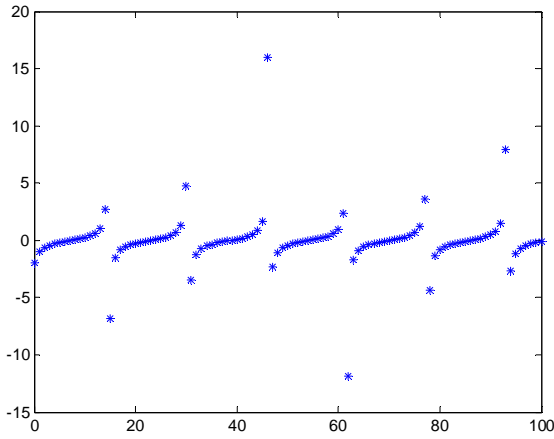


Figure 4.  $\theta = 0.20$  resistance characteristic  
图 4. 取  $\theta = 0.20$  弧度时的复阻抗特性

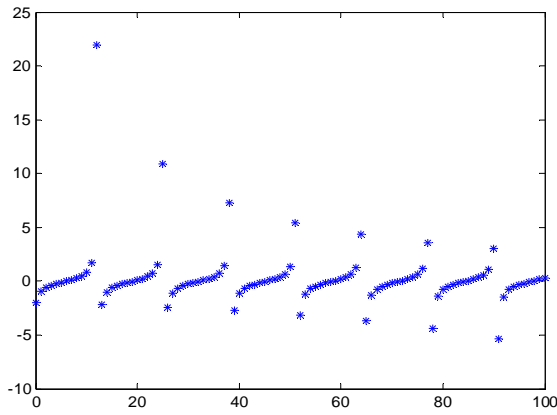


Figure 5.  $\theta = 0.24$  resistance characteristic  
图 5. 取  $\theta = 0.24$  弧度时的复阻抗特性

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \left( -\omega^2 LC + 2 + \omega^2 \sqrt{(\omega LC)^2 - 4LC} \right) \\ \beta = \frac{1}{2} \left( -\omega^2 LC + 2 - \omega^2 \sqrt{(\omega LC)^2 - 4LC} \right) \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \gamma = \frac{1}{2} \left( -3\omega^2 LC + 2 + \omega^2 \sqrt{9(\omega LC)^2 - 12LC} \right) \\ \delta = \frac{1}{2} \left( -3\omega^2 LC + 2 - \omega^2 \sqrt{9(\omega LC)^2 - 12LC} \right) \end{cases} \quad (20)$$

其中  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  为实数, 所以由(2)得到

$$Z_{ab}(n) = j \frac{1}{2\omega C} \left( \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} + \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} - 2 \right) \quad (21)$$

此时  $Z_{ab}(n)$  为纯虚数。

当  $n \rightarrow \infty$  时, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{1}{\beta} = \alpha$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} = \frac{1}{\delta} = \gamma$$

所以由式(21)得到

$$Z_{ab}(\infty) = j \frac{1}{2\omega C} (\alpha + \gamma - 2) \quad (22)$$

由于  $\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}$  和  $\frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}}$  都是  $n$  的减函数,

所以式(10)的振幅具有递减特性, 其振幅随着  $n$  的变化而无限接近于式(22)的振幅。

### 3.2.2. 情形 2: $\omega = 2/\sqrt{LC}$

当  $\omega = 2/\sqrt{LC}$  时, 有  $\Delta_1 = 0, \Delta_2 > 0$ , 此时  $\alpha = \beta = -1$ 。并且满足(12), 所以将  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(21)得到

$$Z_{bc}(n) = j \frac{1}{2\omega C} \left( \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} - \frac{3n+2}{n+1} \right) \quad (23)$$

其中  $\gamma, \delta$  为实数。

当  $n \rightarrow \infty$  时, 得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} = \frac{1}{\delta} = \gamma$ , 所以由(23)得到

$$Z_{ab}(\infty) = j \frac{1}{2\omega C} (\gamma - 3) \quad (24)$$

可见, 式(23)的振幅具有递减特性, 其振幅随着  $n$  的变化而无限接近于式(24)的振幅。

### 3.2.3. 情形 3: $\frac{2}{\sqrt{3LC}} < \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$

当  $\frac{2}{\sqrt{3LC}} < \omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$  时, 有  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0$ , 并且满足式(17), 所以将  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入(21)得到

$$Z_{bc}(n) = j \frac{1}{2\omega C} \left( \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta} + \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} - 2 \right) \quad (25)$$

其中  $\gamma, \delta$  为实数,  $\theta = \arccos\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC\right)$ 。式(25)反映了等效复阻抗以  $n$  为变量时具有振荡特性。

其振荡特性如图 6、7 所示, 这里取了  $\theta = 0.20$  弧度,  $\theta = 0.24$  弧度的两种情形。图 6、7 中横坐标表示变量  $n$ , 纵坐标表示复阻抗值。

### 3.2.4. 情形 4: $\omega = 2/\sqrt{3LC}$

当  $\omega = 2/\sqrt{3LC}$  时, 有  $\Delta_1 < 0, \Delta_2 = 0$ , 此时  $\gamma = \delta = -1$ , 并且满足(17), 所以

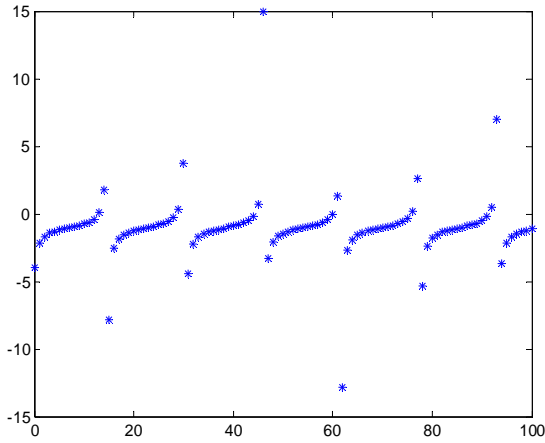


Figure 6.  $\theta = 0.20, \gamma = 2$  resistance characteristic  
图 6. 取  $\theta = 0.20$  弧度,  $\gamma = 2$  时的复阻抗特性

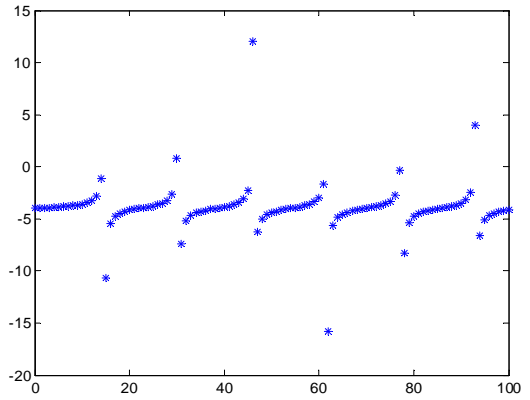


Figure 8.  $\theta = 0.20$  resistance characteristic  
图 8. 取  $\theta = 0.20$  弧度时的复阻抗特性

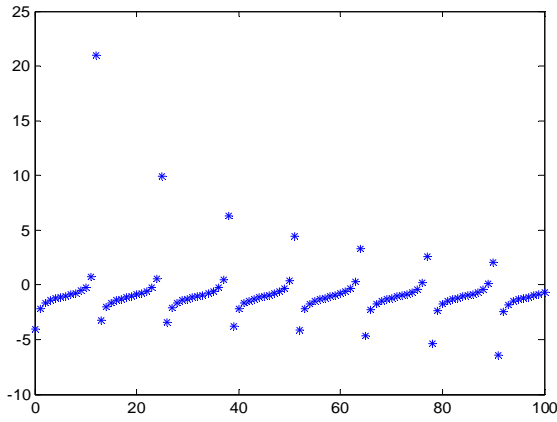


Figure 7.  $\theta = 0.24, \gamma = 2$  resistance characteristic  
图 7. 取  $\theta = 0.24$  弧度,  $\gamma = 2$  时的复阻抗特性

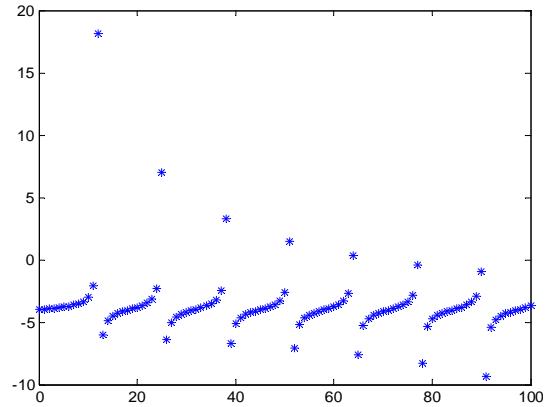


Figure 9.  $\theta = 0.24$  resistance characteristic  
图 9. 取  $\theta = 0.24$  弧度时的复阻抗特性

$$\lim_{\gamma \rightarrow \delta} \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} = \frac{n}{(n+1)\delta} = \frac{-n}{n+1} \quad (26)$$

将(17)(26)及  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(21)得到

$$Z_{bc}(n) = j \frac{1}{2\omega C} \left( \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta} - \frac{3n+2}{n+1} \right) \quad (27)$$

其中  $\theta = \arccos\left(1 - \frac{1}{2}\omega^2 LC\right)$ , 式(27)反映了等效复阻抗以  $n$  为变量时具有振荡特性这一规律。其振荡特性如图 8、9 所示, 这里取了  $\theta = 0.20$  弧度,  $\theta = 0.24$  弧度的两种情形。图 8、9 中横坐标表示变量  $n$ , 纵坐标表示复阻抗值。

### 3.2.5. 情形 5: $\omega < 2/\sqrt{3LC}$

当  $\omega < 2/\sqrt{3LC}$  时, 有  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 < 0$ , 并且满足(17), 所以由式(20)得到

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2} \left( -3\omega^2 LC + 2 + \omega \sqrt{-LC(-9\omega^2 LC + 4)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -3\omega^2 LC + 2 + j\omega \sqrt{LC(-9\omega^2 LC + 4)} \right) \quad (28) \\ &= \cos \varphi + j \sin \varphi \end{aligned}$$

其中  $\varphi = \arccos\left(1 - \frac{3}{2}\omega^2 LC\right)$ 。同理得到

$$\delta = \cos \varphi - j \sin \varphi \quad (29)$$

所以由(28)(29)得到

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}} &= \frac{(\cos \varphi + j \sin \varphi)^n - (\cos \varphi - j \sin \varphi)^n}{(\cos \varphi + j \sin \varphi)^{n+1} - (\cos \varphi - j \sin \varphi)^{n+1}} \\ &= \frac{\sin n\varphi}{\sin(n+1)\varphi} \end{aligned} \quad (30)$$

将(17)(30)及  $r_0 = 1/(j\omega C)$  带入式(21)得到

$$Z_{bc}(n) = j \frac{1}{2\omega C} \left( \frac{\sin n\theta}{\sin(n+1)\theta} + \frac{\sin n\varphi}{\sin(n+1)\varphi} - 2 \right) \quad (31)$$

式(31)反映了等效复阻抗以  $n$  为变量时具有振荡特性和混沌特性这一规律。其振荡特性和混沌特性如图 10、11 所示，这里取了  $\theta = \arccos(1-0.23)$ ,  $\varphi = \arccos(1-3 \times 0.23)$ , 以及  $\theta = \arccos(1-0.26)$ ,  $\varphi = \arccos(1-3 \times 0.26)$  的两种情形。图 10、11 中横坐标表示变量  $n$ , 纵坐标表示复阻抗值。

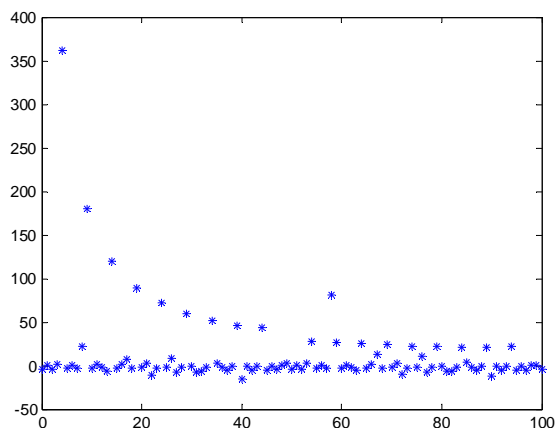


Figure 10.  $\theta = \arccos(1-0.23)$ ,  $\varphi = \arccos(1-0.69)$  resistance characteristic

图 10. 取  $\theta = \arccos(1-0.23)$ ,  $\varphi = \arccos(1-0.69)$  时的复阻抗特性

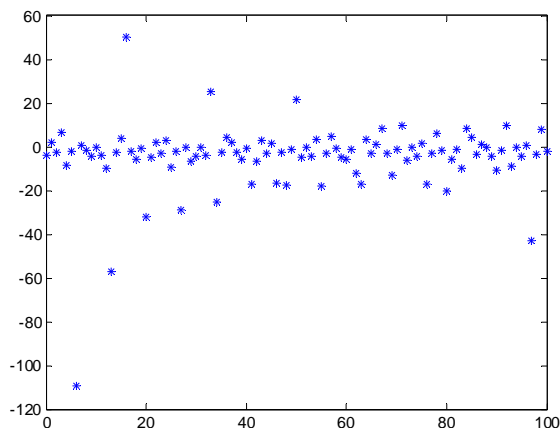


Figure 11.  $\theta = \arccos(1-0.26)$ ,  $\varphi = \arccos(1-0.78)$  resistance characteristic

图 11. 取  $\theta = \arccos(1-0.26)$ ,  $\varphi = \arccos(1-0.78)$  时的复阻抗特性

## 4. 结语

本文研究表明,  $2 \times n$  阶网络的等效复阻抗特性与等效电阻特性有非常大的差别。特别是等效复阻抗可能具有振荡特性和混沌特性, 而这是等效电阻不可能具有的特性。当然, 当参数满足一些特定条件的情况下, 等效复阻抗与等效电阻在表达形式上具有一致性, 如当  $\omega > 2/\sqrt{LC}$  时, 式(1)、式(2)与式(10)、式(21)在表达形式上具有一致性。本文的研究表明, 研究等效复阻抗特性可以基于等效电阻的普适规律进行复数分析研究。因此, 在研究高阶网络的等效复阻抗特性时, 可以首先研究高阶网络的等效电阻规律, 进而通过等效电阻规律的复数分析研究得到等效复阻抗特性。对于  $k \times n (k \geq 3)$  阶网络的等效复阻抗特性有待进一步研究。

## 参考文献 (References)

- [1] 谭志中. 电阻网络模型[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2011: 1-6.
- [2] 陆建隆, 谭志中. 关于梯形网络等效电阻的普适研究[J]. 大学物理, 2001, 20(10): 26-28.
- [3] 李建新, 刘栓江. N 级梯形电阻网络的研究[J]. 大学物理, 2003, 22(7): 20-21.
- [4] 谭志中, 陆建隆, 吴国祥. 三端梯形网络的等效电阻[J]. 河北师范大学学报(自然科学版), 2004, 28(3): 258-262.
- [5] 谭志中, 罗礼进.  $2 \times n$  阶电阻网络等效电阻的再研究[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2010, 9(1): 86-89.
- [6] 谭志中, 曹秀华, 李颂.  $2 \times n$  阶网络侧端等效电阻的普适规律[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2006, 5(2): 10-14.
- [7] 谭志中, 罗达峰, 李颂.  $2 \times n$  阶网络对角等效电阻的再研究[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2008, 7(2): 12-16.
- [8] 谭志中, 方靖淮.  $3 \times n$  阶电阻网络等效电阻的研究[J]. 大学物理, 2008, 27(9): 7-10.
- [9] 谭志中, 李颂.  $3 \times n$  阶网络等效电阻的另一个普适规律[J]. 大学物理, 2009, 28(4): 23-25.
- [10] 谭志中, 罗达峰, 杨建华.  $3 \times n$  阶电阻网络等效电阻的再研究[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2011, 10(2): 67-72.
- [11] 谭志中, 罗达峰.  $4 \times n$  阶网络的 2 个等效电阻公式[J]. 南通大学学报(自然科学版), 2011, 10(3): 87-94.
- [12] 谭志中, 陆建隆. 二端梯形网络等效复阻抗的普适研究[J]. 大学物理, 2009, 28(7): 6-10.
- [13] 孙哲, 黄铭等. 三维 RC 网络仿真异质材料的通用介质响应[J]. 物理学报, 2008, 57(2): 957-961.