

Optimal Driving Parameters of Adiabatic Quantum Pumping*

Keju Zhong¹, Rui Zhu¹, Yunchang Xiao², Weiyin Deng¹, Wenji Deng^{1#}

¹Department of Physics, South China University of Technology, Guangzhou

²Laboratory of Quantum Information Technology, South China Normal University, Guangzhou

Email: #phwdeng@scut.edu.cn

Received: Nov. 29th, 2012; revised: Dec. 22nd, 2012; accepted: Jan. 2nd, 2013

Abstract: The quantum pump phenomenon is that a dc current can be generated at zero bias in the transport device through regulation of system parameters that change periodically with time. According to the adiabatic quantum pump theory, the quantum pumping process of dc current or pump power can be got by using the area integral of the scattering matrix derivatives to the control parameters in the parameter space. In the present work, the quantum pump through a one-dimensional system with time-dependent double- δ -barrier potentials is considered. By introducing the Berry curvature function, we calculated the influence of the different system parameters to the pump current. Taking two linear and harmonic drivers as two examples, we achieved the parameter variation pattern to generate maximum pump current. In addition, our theoretical approach not only can analysis one-photon and multi-photon absorption and emission processes within one framework, but also can be completely inclusion the higher order harmonics terms of pumped current as a function of the driving phase difference in double barrier, *i.e.* the anharmonic effects of quantum pump, are totally included in the parameter space integral.

Keywords: Quantum Pumping; Optimal Driving Parameters; Scattering Matrix

绝热量子泵浦的参数优化*

钟克菊¹, 朱 瑞¹, 肖运昌², 邓伟胤¹, 邓文基^{1#}

¹华南理工大学物理系, 广州

²华南师范大学物电学院, 广州

Email: #phwdeng@scut.edu.cn

收稿日期: 2012 年 11 月 29 日; 修回日期: 2012 年 12 月 22 日; 录用日期: 2013 年 1 月 2 日

摘 要: 量子泵浦是在无偏压的运输器件中通过调控系统参数随时间周期性变化而产生直流电流的物理过程。根据绝热量子泵浦理论, 计算散射矩阵元及其对调控参数的导数在参数空间的面积分可以简单地得到泵浦过程的直流电流或泵浦电量。本文针对一维含时缓变双 δ 势垒驱动的量子泵浦模型, 采用 Berry 曲率函数具体计算了不同的系统参数对泵浦电流大小取值的影响。以双参数线性驱动和简谐驱动为例, 得到了产生最大泵浦电流的参数变化形式。另外, 我们采用的理论方法既可以统一地处理多光子吸收和发射过程, 又可以完全包涵泵浦电流随双势垒驱动参数相位差变化的所有高阶谐波项, 加深对量子泵浦过程的非简谐效应的认识。

关键词: 量子泵浦; 参数优化; 散射矩阵

1. 引言

众所周知, 宏观电路中的电流需由电势差驱动,

稳压电源产生直流, 交变电源产生交变电流。但在介观电路量子输运过程中, 即使样品两端无偏压, 适当地调控系统参数随时间周期性变化, 仍然可以导致电荷由一个电子库到另一个电子库的定向输运, 这一源于量子干涉的反常现象称为量子泵浦过程。

*基金项目: 国家自然科学基金(批准号: 11004063)、中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 2012ZZ0076)资助的课题。

#通讯作者。

事实上,早在1983年 Thouless^[1]就讨论过量子泵浦的可能性,但直到1999年, Switkes 等人^[2]才首次在开放的量子点系统中观察到量子泵浦现象。他们的实验在量子点上施加两个相位差为 ϕ ,以相同频率 ω 随时间变化的正弦门电压;在这样的泵浦电压驱动下,可以测得流过量子点的直流电流。从那以后,人们更广泛地研究了各种不同系统中的量子泵浦效应,集中地计算和观察了它们的泵浦电流和噪声。这些系统包括量子点^[3-9]、二维电子气^[10]、具有 Aharonov-Bohm 和 Aharonov-Casher 效应的介观环^[11]、介观一维开放链^[12]和 GaAs-Al_xGa_{1-x}As 链^[13]、隧道耦合的金属链^[14]、螺旋纳米线^[15]和石墨烯^[16]等。近几年,实验上观测到了超导干涉仪中的量子泵浦电流^[17]。同时,量子泵浦的理论研究方法也有所发展^[18-21],其中占主导地位的是由 Brouwer^[19]提出的散射理论:由系统散射矩阵参数的导数来计算泵浦电流。

尽管量子泵浦已经很早就开始讨论了,但是在绝热近似下,实验上大多得到散射矩阵的一阶参数导数对其泵浦电流的影响,泵浦电流关于驱动相位差的函数关系为正弦形式,但是如果增大其参数时,发现其函数关系会偏离正弦形式,我们通过对其散射矩阵进行高阶泰勒展开,解释了偏离线性响应的这一实验现象^[22]。从散射理论中我们可以知道,泵浦电流的大小与参数取值、周期变化围出的闭合曲线形状和面积大小有关。为了更加清楚地了解不同参数变化特征与泵浦电流的关系,我们建立了简单交变的双 δ 势垒驱动直流电流的一维模型,在绝热近似下计算其散射矩阵及对应的泵浦电流。由此可研究泵浦电流对双势垒参数的依赖关系,同时也可以由此来优化参数,对实验中的参数选择具有一定的指导意义,这个讨论也可以推广到更一般的绝热量子泵浦系统。

2. 双势垒模型

考虑如图1所示的两个周期变化的 δ 势垒驱动的一维量子泵浦系统。描述电子运动状态的哈密顿量为

$$\begin{aligned} \psi_L(x_1) &= \psi_M(x_1), \frac{\partial \psi_M}{\partial x} \Big|_{x_1} - \frac{\partial \psi_L}{\partial x} \Big|_{x_1} = \frac{2mV_1(t)}{\hbar^2} \psi_L(x_1) \\ \psi_R(x_2) &= \psi_M(x_2), \frac{\partial \psi_R}{\partial x} \Big|_{x_2} - \frac{\partial \psi_M}{\partial x} \Big|_{x_2} = \frac{2mV_2(t)}{\hbar^2} \psi_R(x_2) \end{aligned} \quad (3)$$

计算可以得到散射矩阵

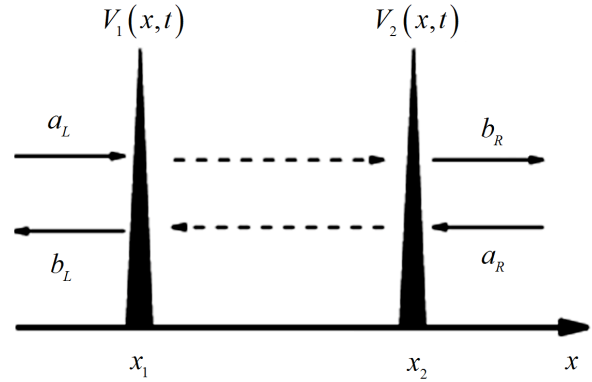


Figure 1. Schematics of the double barrier quantum tunneling
图1. 双势垒量子隧穿示意图

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x^2} + V(x,t) \quad (1)$$

其中 m 为电子的有效质量,势能

$$V(x,t) = V_1(t)\delta(x-x_1) + V_2(t)\delta(x-x_2),$$

$V_1(t)$ 和 $V_2(t)$ 为周期性函数。我们分别讨论了线性驱动势^[23]和谐变驱动势,其中线性驱动形式为

$$V_j(t) = a + bt,$$

谐变驱动形式为

$$V_j(t) = V_{j0} + 2V_{\omega,j} \cos(\omega t + \varphi_j), j = 1, 2,$$

常数 $a, b, V_{j0}, V_{\omega,j}, \varphi_j, \omega$ 均为描述驱动势垒的可调参数,且 $\omega \ll 1/\gamma$, γ 为电子的隧穿时间。在绝热近似下,势垒随时间缓慢的变化,物理过程可以看作每一个瞬时的定态隧穿在变化周期内的累加效果。对于驱动参数变化的每一个瞬时 t ,左右电子库能量为 E 的电子进入系统时其定态波函数的一般形式为

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= a_L e^{ik(x-x_1)} + b_L e^{-ik(x-x_1)}, \quad x \leq x_1 \\ \psi_M(x) &= A e^{ik(x-x_1)} + B e^{-ik(x-x_1)}, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \\ \psi_R(x) &= a_R e^{-ik(x-x_2)} + b_R e^{ik(x-x_2)}, \quad x \geq x_2 \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ 。在绝热近似下,忽略含时泵浦势导致的电子隧穿前后的能量变化,利用波函数及其一阶导数的连接条件,即

$$S = \begin{bmatrix} \frac{u_1 u_2 (e^{2ik\ell} - 1) + i(u_1 + u_2 e^{2ik\ell})}{u_1 u_2 e^{2ik\ell} + (1 + iu_1)(1 + iu_2)} & \frac{e^{ik\ell}}{u_1 u_2 e^{2ik\ell} + (1 + iu_1)(1 + iu_2)} \\ \frac{e^{ik\ell}}{u_1 u_2 e^{2ik\ell} + (1 + iu_1)(1 + iu_2)} & \frac{u_1 u_2 (e^{2ik\ell} - 1) + i(u_2 + u_1 e^{2ik\ell})}{u_1 u_2 e^{2ik\ell} + (1 + iu_1)(1 + iu_2)} \end{bmatrix} \quad (4)$$

其中 $\ell = x_2 - x_1$ 是两个 δ 势垒的间距, 参数 $u_j = mV_j(t)/k\hbar^2$, ($j=1,2$) 为无量纲化的势垒高度, 散射矩阵定义为 $(b_L \ b_R)^T = S(a_L \ a_R)^T$, 上标 T 表示矩阵的转置。不难验证散射矩阵的么正性, 即 $SS^\dagger = 1$ 。

根据绝热量子泵浦的散射理论^[19], 左端可测得的直流电流为

$$\bar{I}_L = \oint i \left(\frac{\partial S}{\partial u_1} S^\dagger du_1 + \frac{\partial S}{\partial u_2} S^\dagger du_2 \right)_{LL} \quad (5)$$

其中电流的单位取为 $I_0 = e\omega/2\pi$, 环路积分沿两个驱动参数周期变化构成的闭合回路, 下标 LL 表示涉及左端电子库的矩阵元。公式适用于双参数周期变化的任意绝热过程, 对回路的大小和形状没有特殊要求。

利用张量分析的格林公式^[19], 以上参数平面内的回路积分可以转化为面积分, 即

$$\bar{I}_L = \iint_A du_1 du_2 \Lambda i \left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \frac{\partial S^\dagger}{\partial u_2} - \frac{\partial S}{\partial u_2} \frac{\partial S^\dagger}{\partial u_1} \right)_{LL} \quad (6)$$

其中 Λ 反映积分环路与面积分法线方向的右手螺旋关系, 逆时针环路 $\Lambda = 1$, 顺时针环路 $\Lambda = -1$ 。其中被积函数正是 Berry 曲率函数^[24], 即

$$J(u_1, u_2) = -i \left(\frac{\partial S}{\partial u_1} \frac{\partial S^\dagger}{\partial u_2} - \frac{\partial S}{\partial u_2} \frac{\partial S^\dagger}{\partial u_1} \right)_{LL} \quad (7)$$

参数的变化范围和 Berry 曲率函数在积分区域内的取值共同决定泵浦电流的方向和大小。对于我们考虑的一维双 δ 势模型, 可以明确地得到

$$J(u_1, u_2) = -4 \sin(k\ell) \frac{(u_1 + u_2) \sin(k\ell) + \cos(k\ell)}{|u_1 u_2 (e^{2ik\ell} - 1) + i(u_1 + u_2) + 1|^4} \quad (8)$$

值得指出的是, 如果费米电子的波矢与双势垒的间距恰好满足条件 $k\ell = n\pi$, ($n=0,1,2,\dots$), 则总有 $J(u_1, u_2) = 0$, 无论如何选择泵浦参数的取值和变化方式, 都不能产生泵浦电流。如果在泵浦参数 u_1 和 u_2 周期变化的环路中 Berry 曲率函数没有明显的变化,

即 $J(u_1, u_2) \approx J(u_{10}, u_{20})$, 则

$$\bar{I}_L \approx -e\omega J(u_{10}, u_{20}) \Lambda S / 2\pi \propto S,$$

泵浦电流的大小近似地正比环路的面积

$S = \int_A du_1 du_2$; 对于简谐驱动, 这一面积正比于两驱动参数相位差 ϕ 的正弦, 所以

$\bar{I}_L \approx -[e\omega J(u_{10}, u_{20}) \Lambda / 2\pi] \sin \phi$; 如果在泵浦参数 u_1 和 u_2 周期变化的环路中 Berry 曲率函数变化显著, 不能再近似当作不变的常数 $J(u_{10}, u_{20})$, 则泵浦电流不再正比于泵浦参数环路的面积, 泵浦电流与相位差的函数关系将偏离正弦形式。

3. 结果与讨论

为了优化参数获得最大的泵浦电流, 我们需要了解 Berry 曲率函数随泵浦参数 u_1 、 u_2 和系统参数 $k\ell$ 变化的整体性质。根据公式(8), 可知 Berry 曲率函数随 $k\ell$ 变化的最小周期为 π 。我们选取费米能量 $E = 60 \text{ meV}$ ^[22], 得到费米波矢 $k_F = 1.255 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$, 势垒宽度 ℓ 必须大于费米波长而小于相干长度, 综合考虑费米电子的能量和系统尺寸后, 我们选取 $\ell = 6 \text{ nm}$, 即 $k\ell = 2.4\pi$ 。图 2 给出了 Berry 曲率函数 $J(u_1, u_2)$ 随泵浦参数 u_1 和 u_2 变化的等高线图。根据图中的信息, 可以选取泵浦参数周期变化的具体方式以产生最大泵浦电流, 改变参数变化环路的方向可以实现泵浦电流的反向。

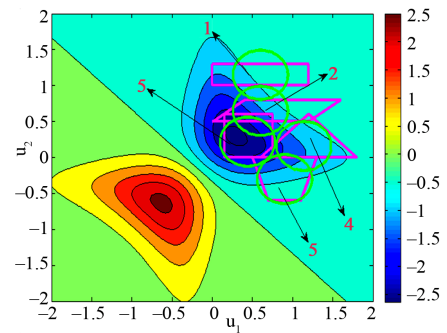


Figure 2. The contour map of berry curvature function as a function of parameter u_1 and u_2

图 2. Berry 曲率函数 $J(u_1, u_2)$ 随参数 u_1 和 u_2 变化的等高线图

在图 2 中分别取了 5 个面积相同形状不同的规则图形：正方形、长方形、平行四边形、三角形和梯形。在数值计算时我们把多边形的棱角软化，保证绝热近似的要求。为了分析高阶谐波的影响，我们在 5 个图形处分别换上 5 个相同面积的圆。两个随时间简谐变化的驱动参数振幅相等，相位差为 $\pi/2$ ，在参数空间围出一个圆。其中系统参数选择为 $k\ell = 2.4\pi$ ，所有泵浦参数变化环路的面积 $S = 0.36$ 。五个不同位置的圆形环路分别伴随着面积相同中心重合的矩形(1)、平行四边形(2)、等腰梯形(3)、等腰三角形(4)和正方形(5)。因为规则图形变化不能写成简单的简谐形式，所以我们给出参数随时间绝热变化的形式。相关的参数取值和计算得到的泵浦电流结果如表 1 所示。

在参数空间围出圆形的两个驱动随时间简谐变化的形式为：

$$u_1(t) = u_{10} + u_{1\omega} \sin(\omega t),$$

$$u_2(t) = u_{20} + u_{2\omega} \sin(\omega t + \pi/2),$$

5 个圆都取 $u_{1\omega} = u_{2\omega} = 0.34$ 。 u_{10} ， u_{20} 的取值和泵浦电流的计算结果如表 2 所示。

由表 1 和表 2 数据我们作出泵浦电流关于图形形状的折线图，如图 3 所示。

其中 N 表示图 2 中两组图形形状的序号， I_p 表示泵浦电流的大小，单位为 $I_0 = e\omega/2\pi$ 。

由规则图形得到的结果可看出：尽管它们面积相同但是由于其形状和在参数空间的位置不同，泵浦电流的大小差别很大；由圆对应的结果可看出：即使面积相同形状相同，但是得到的泵浦电流由于参数位置的不同差别也很大。另外，由图中可看出正方形、矩形和等腰梯形所对应的泵浦电流值与圆所对应的结

Table 1. The driving parameter variation pattern and pump current of regular curve
表 1. 规则图形驱动参数形式及其泵浦电流

图形 形状 及泵浦电流		时间			
		$t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$	$t \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
矩形	$I_p = 160.2687$	$u_1 = \frac{12}{5\pi}t$ $u_2 = 1$	$u_1 = 1.2$ $u_2 = 0.7 + \frac{3}{5\pi}t$	$u_1 = 3.6 - \frac{12}{5\pi}t$ $u_2 = 1.3$	$u_1 = 0$ $u_2 = 2.2 - \frac{3}{5\pi}t$
平行四边形	$I_p = 215.7220$	$u_1 = \frac{12}{5\pi}t$ $u_2 = 0.5$	$u_1 = 0.8 + \frac{4}{5\pi}t$ $u_2 = 0.2 + \frac{3}{5\pi}t$	$u_1 = 4 - \frac{12}{5\pi}t$ $u_2 = 0.8$	$u_1 = 1.6 - \frac{4}{5\pi}t$ $u_2 = 1.7 - \frac{3}{5\pi}t$
等腰梯形	$I_p = 244.9011$	$u_1 = 0.7 + \frac{4}{5\pi}t$ $u_2 = -0.6$	$u_1 = 0.9 + \frac{2}{5\pi}t$ $u_2 = -1.2 + \frac{6}{5\pi}t$	$u_1 = 2.3 - \frac{1}{\pi}t$ $u_2 = 0$	$u_1 = -0.1 + \frac{2}{5\pi}t$ $u_2 = 1.8 - \frac{6}{5\pi}t$
等腰三角形	$I_p = 510.0643$	$u_1 = 0.6 + \frac{6}{5\pi}t$ $u_2 = 0$	$u_1 = 3 - \frac{6}{5\pi}t$ $u_2 = -1.2 + \frac{6}{5\pi}t$		$u_1 = 3 - \frac{6}{5\pi}t$ $u_2 = 2.4 - \frac{6}{5\pi}t$
正方形	$I_p = 719.3962$	$u_1 = 0.15 + \frac{6}{5\pi}t$ $u_2 = 0$	$u_1 = 0.75$ $u_2 = -0.6 + \frac{6}{5\pi}t$	$u_1 = 1.95 - \frac{6}{5\pi}t$ $u_2 = 0.6$	$u_1 = 0.15$ $u_2 = 1.2 - \frac{6}{5\pi}t$

Table 2. The drive parameters and pump current of the five circles
表 2. 5 个圆的简谐驱动参数及其泵浦电流

参数及泵浦电流	1	2	3	4	5
u_{10}	0.60	0.60	0.90	1.14	0.44
u_{20}	1.15	0.65	-0.30	0.16	0.22
I_p	130.11	381.07	210.54	292.75	679.93

果差别比较小,即面积相同时,图形形状对泵浦电流影响不是很大;但平行四边形和等腰三角形所对应的泵浦电流值与圆差别比较大,此时图形形状对泵浦电流影响很大。用 Brouwer 的围道积分理论^[19],这直接可以由围道内散射矩阵关于参数一阶导数和所围面积的大小决定。通过吸收发射多光子过程的散射理论^[21],不同形状泵浦电流大小的差别可以用高阶谐波产生的多光子发射过程来理解。对于正方形、长方形和等腰梯形,相对于尖角比较尖的平行四边形和等腰三角形,高阶谐波产生的非简谐效应要弱一些。由此可知:如果参数选择范围比较合适,那么量子泵浦的非简谐效应就非常小,比较好的符合实验中得到的泵浦电流与其参数相位差是正弦变化的;如果参数选择范围如图中序号 2 和 4 所示的话,那么量子泵浦的非简谐效应就比较明显。由图 3 中圆的折线图可以看出,等围道面积简谐变化的泵浦电流大小可以由 $J(u_1, u_2)$ 的大小决定。所以,实验上可以参照 $J(u_1, u_2)$ 在参数空间的取值选取最佳的驱动形式,可以得到最大的或者特殊要求的量子泵浦信号。

4. 结论

本文通过分析势垒高度随时间绝热变化的双 δ 势垒驱动直流电流的一维模型,运用散射理论计算了体系的散射矩阵及泵浦电流。采用散射矩阵关于调制参数的导数在参数空间的分布函数 $J(u_1, u_2)$,即 Berry 曲率函数,得到泵浦电流的大小可以直接由围道的位置形状决定。通过对围出规则多边形的线性变化驱动和围出圆形的简谐变化驱动的比较,可以看出对于偏

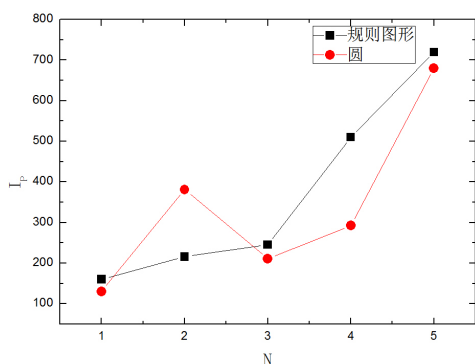


Figure 3. Pump current as a function of two parameters cyclic change in parameter space around the same area and different shapes

图 3. 两个参数周期变化在参数空间围出相同面积不同形状下的泵浦电流

离简谐变化的驱动形式,多光子发射吸收过程会对其产生显著影响。通过讨论势垒参数变化特征对泵浦电流的影响,得到了产生最大泵浦电流的参数变化形式。

5. 致谢

感谢国家自然科学基金(批准号: 11004063)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 2012ZZ0076)的资助;非常感谢邓老师和朱老师对我的指导和帮助。

参考文献 (References)

- [1] D. J. Thouless. Quantization of particle transport. *Physical Review B*, 1983, 27(10): 6083-6087.
- [2] M. Switkes, C. M. Marcus, K. Campman, et al. An adiabatic quantum electron pump. *Science*, 1999, 283: 1905-1908.
- [3] L. P. Kouwenhoven, A. T. Johnson, N. C. van der Vaart, et al. Quantized current in a quantum-dot turnstile using oscillating tunnel barriers. *Physical Review Letters*, 1991, 67(12): 1626-1630.
- [4] H. C. Park, K. H. Ahn. Admittance and noise in an electrically driven nanostructure: Interplay between quantum coherence and statistics. *Physical Review Letters*, 2008, 101(11): 116804(4).
- [5] J. Splettstoesser, M. Governale and J. König. Adiabatic charge and spin pumping through quantum dots with ferromagnetic leads. *Physical Review B*, 2008, 77(19): 195320(9).
- [6] M. Strass, P. Hänggi and S. Kohler. Nonadiabatic electron pumping: Maximal current with minimal noise. *Physical Review Letters*, 2005, 95(13): 130601(4).
- [7] F. Romeo, R. Citro. Adiabatic pumping in a double quantum dot structure with strong spin-orbit interaction. *Physical Review B*, 2009, 80(16): 165311(6).
- [8] 李玲, B. Kaestner, M. D. Blumenthal 等. 一种新型的高频半导体量子点单电子泵[J]. *物理学报*, 2008, 57(3): 1878-1885.
- [9] 吴凡, 王太宏. 通过单电子泵实现单电子运动的控制及其相图分析[J]. *物理学报*, 2003, 52(3): 696-702.
- [10] R. Benjamin, C. Benjamin. Quantum spin pumping with adiabatically modulated magnetic barriers. *Physical Review B*, 2004, 69(8): 085318(10).
- [11] R. Citro, F. Romeo. Pumping in a mesoscopic ring with Aharonov-Casher effect. *Physical Review B*, 2006, 73(23): 233304(4).
- [12] P. Devillard, V. Gasparian and T. Martin. Charge pumping and noise in a one-dimensional wire with weak electron-electron interactions. *Physical Review B*, 2008, 78(8): 085130(11).
- [13] A. Agarwal, D. Sen. Equation of motion approach to non-adiabatic quantum charge pumping. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2007, 19: 046205(13).
- [14] N. Winkler, M. Governale and J. König. Diagrammatic real-time approach to adiabatic pumping through metallic single-electron devices. *Physical Review B*, 2009, 79(13): 235309(11).
- [15] X. L. Qi, S. C. Zhang. Field-induced gap and quantized charge pumping in a nanoscale helical wire. *Physical Review B*, 2009, 79(23): 235442(6).
- [16] R. Zhu, H. M. Chen. Quantum pumping with adiabatically modulated barriers in graphene. *Applied Physics Letters*, 2009, 95(12): 122111(3).
- [17] G. Francesco, S. Panayotis, R. Stefano, et al. A Josephson quantum electron pump. *Nature Physics*, 2011, 7: 857-861.
- [18] M. Büttiker, H. Thomas and A. Prêtre. Current partition in mul-

- tiprobe conductors in the presence of slowly oscillating external potentials. *Zeitschrift für Physik B*, 1994, 94: 133-137.
- [19] P. W. Brouwer. Scattering approach to parametric pumping. *Physical Review B*, 1998, 58(16): 10135(4).
- [20] M. Moskalets, M. Büttiker. Dissipation and noise in adiabatic quantum pumps. *Physical Review B*, 2002, 66(3): 035306(9).
- [21] Y. Tserkovnyak, A. Brataas, G. E. W. Bauer, et al. Nonlocal magnetization dynamics in ferromagnetic heterostructures. *Reviews of Modern Physics*, 2005, 77(4): 1375-1421.
- [22] R. Zhu. A scattering matrix approach to quantum pumping: Beyond the small-AC-driving-amplitude limit. *Chinese Physics B*, 2010, 19(12): 127201(6).
- [23] O. Entin-Wohlman, A. Aharony and Y. Levinson. Adiabatic transport in nanostructures. *Physical Review B*, 2002, 65(19): 195411(8).
- [24] X. Di, M. C. Cheng and Q. Niu. Berry phase effects on electronic properties. *Reviews of Modern Physics*, 2010, 82(3): 1959-2007.