Modern Physics 现代物理, 2017, 7(3), 37-43
Published Online May 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/mp
https://doi.org/10.12677/mp.2017.73006

Four-Body Co-Circular Central Configurations with Two Pairs of Adjacent Equal Masses

Mingjun Ma*, **Yiyang Deng**

Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu Sichuan
Email: *510884359@qq.com

Received: Apr. 21st, 2017; accepted: May 13th, 2017; published: May 16th, 2017

Abstract

In 2012, Cors and Roberts [1] showed that the four-body co-circular central configuration is an isosceles trapezoid when two pairs of adjacent masses are equal. However, their proof is very complicated. In this paper, we give a simpler proof by using the method of oriented areas and mutual coordinates.

Keywords

Four-Body Co-Circular Problem, Central Configurations, Isosceles Trapezoid

两对相邻等质量的四体共圆中心构型

马明俊*，**邓义杨**

四川大学数学学院，四川 成都
Email: *510884359@qq.com

收稿日期：2017年4月21日；录用日期：2017年5月13日；发布日期：2017年5月16日

摘　要

Cors和Roberts在2012年的文章[1]中证明了：在四体共圆中心构型中，若两对相邻质点的质量相等，则该共圆中心构型一定是等腰梯形。但是证明方法很复杂，本文采用有向面积方法并结合相对距离坐标给出了一个简洁证明。

*通讯作者。

文章引用: 马明俊, 邓义杨. 两对相邻等质量的四体共圆中心构型[J]. 现代物理, 2017, 7(3): 37-43.
https://doi.org/10.12677/mp.2017.73006

关键词

四体共圆问题，中心构型，等腰梯形

1. 引言

具有牛顿势的平面 N 体问题是天体力学的重要组成部分，它研究的是具有正质量 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_N$ 的 N 个天体，在仅受万有引力作用下的运动规律。本文仅考虑 $N=4$ 的情况。由牛顿三大定律和万有引力定律可知天体的运动满足：

$$m_i\ddot{q}_i = \sum_{i\neq j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}^3}\left(q_j - q_i\right),\ 1\le i\le 4 \tag{1}$$

其中 $q_i \in R^2\ (i=1,2,3,4)$ 表示第 i 个天体的位置， $r_{ij}=\left|q_i-q_j\right|$ 表示第 i 个天体与第 j 个天体之间的距离。

令 $M = diag\left(m_1, m_1, \cdots, m_4, m_4\right)$， U 为牛顿势函数

$$U\left(q\right) = \sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{r_{ij}} \tag{2}$$

则方程组(1)可以写成

$$\ddot{q} = M^{-1}\frac{\partial U\left(q\right)}{\partial q} \tag{3}$$

由于在惯性坐标系下，质心做匀速直线运动或静止。故我们可以选取质心为坐标原点，即考虑空间

$$\Omega = \left\{ q = \left(q_1, q_2, q_3, q_4\right) \in \left(R^2\right)^4 \mid q_c = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i q_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = 0 \right\} \tag{4}$$

令 $\Delta = \bigcup_{i\neq j}\left\{q \mid q_i = q_j\right\}$ 表示碰撞集，通常将 $\Omega\setminus\Delta$ 称为构型空间。

定义 1.1 [2] 对于构型 $q\in\Omega\setminus\Delta$，如果存在一常数 $\lambda\in R$，满足

$$M^{-1}\frac{\partial U\left(q\right)}{\partial q} = \lambda\left(q - q_c\right)$$

则称 q 为中心构型(central configuration)。

这一等式关于平面上的旋转、伸缩及平移仍然成立，如果一个中心构型能够由另一个中心构型通过旋转、伸缩及平移变换得到，则认为这两个中心构型是等价的。因此我们考虑中心构型时通常考虑这样的等价类。

对于平面四体共圆问题的中心构型(如图 1 所示)，Cors 和 Roberts [1]证明了：

定理 1.2 [1]如果质量满足假设 $m_1 = m_2 \neq m_3 = m_4$ 且 $q\in\Omega\setminus\Delta$ 为共圆的中心构型，则构型 q 为等腰梯形。

Cors 和 Roberts 的证明仅从相对距离坐标入手，利用四个质点共圆的几何条件，通过复杂的计算和证明，建立四体共圆问题的中心构型方程，然后再经过一系列的讨论和化简后，利用质量的等量关系

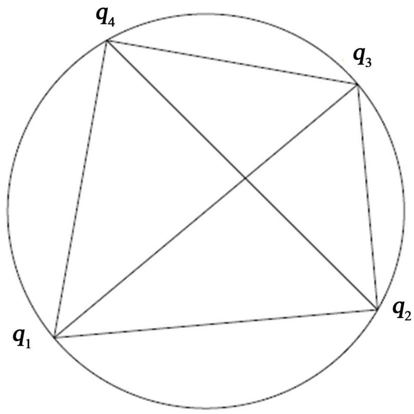

Figure 1. Planar four-body co-circular central configurations
图 1. 平面四体共圆的中心构型

证明了该结论。本文采用有向面积的方法快速建立平面四体问题的中心构型方程，再直接利用质量的大小关系得到构型边长的大小关系，最后使用反证法给出了关于这一重要结果的一个简洁证明。

2. 一个重要的引理

令

$$a = r_{12}^2,\ b = r_{13}^2,\ c = r_{14}^2,\ d = r_{23}^2,\ e = r_{24}^2,\ f = r_{34}^2 \tag{5}$$

对 $\forall 1 \le i \le 4$，令 $|\Delta_i|$ 表示除去第 i 个顶点后剩余 3 个顶点所形成的三角形的面积。我们定义有向面积如下：

$$\Delta_1 = -|\Delta_1|,\ \Delta_2 = |\Delta_2|,\ \Delta_3 = -|\Delta_3|,\ \Delta_4 = |\Delta_4| \tag{6}$$

显然有

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 = 0. \tag{7}$$

从文献[3]可知 Cayley-Menger 行列式为

$$S = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & b & c \\ 1 & a & 0 & d & e \\ 1 & b & d & 0 & f \\ 1 & c & e & f & 0 \end{vmatrix} \tag{8}$$

由于四体共面，所以相应四面体的体积为 0，故 $S = 0$。

1900 年，Dziobek [4]证明了

$$\frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2} = -32\Delta_i\Delta_j, \quad \forall\, i \ne j \tag{9}$$

令 $\varphi(x) = x^{-\frac{1}{2}}\ (x > 0)$，则整个系统的势函数与转动惯量可分别表示为

$$U(q) = \sum_{1 \le i < j \le 4} m_i m_j \varphi\left(r_{ij}^2\right) \tag{10}$$

$$I(q) = \frac{1}{m} \sum_{1 \le i < j \le 4} m_i m_j r_{ij}^2 \tag{11}$$

其中 $m=\sum_{i=1}^{4} m_i$ 。

利用 Lagrange 乘子法，Dziobek [4]给出了中心构型的一个等价刻画：中心构型是函数

$$U+\lambda S-\mu m\left(I-I_0\right) \tag{12}$$

的驻点。其中 $\lambda, \mu m$ 为 Lagrange 乘子， I_0 为初始转动惯量。从而对于 $\forall\, i \neq j\ (i, j=1,2,3,4)$ 有

$$\frac{\partial U}{\partial r_{ij}^2}=-\lambda \frac{\partial S}{\partial r_{ij}^2}+\mu m \frac{\partial I}{\partial r_{ij}^2} \tag{13}$$

即

$$m_i m_j \varphi'\left(r_{ij}^2\right)=32 \lambda \Delta_i \Delta_j+\mu m_i m_j \tag{14}$$

令 $\nu=32\lambda$ ，整理得

$$\varphi'\left(r_{12}^2\right)=\frac{\nu}{m_1 m_2} \Delta_1 \Delta_2+\mu \tag{15}$$

$$\varphi'\left(r_{13}^2\right)=\frac{\nu}{m_1 m_3} \Delta_1 \Delta_3+\mu \tag{16}$$

$$\varphi'\left(r_{14}^2\right)=\frac{\nu}{m_1 m_4} \Delta_1 \Delta_4+\mu \tag{17}$$

$$\varphi'\left(r_{23}^2\right)=\frac{\nu}{m_2 m_3} \Delta_2 \Delta_3+\mu \tag{18}$$

$$\varphi'\left(r_{24}^2\right)=\frac{\nu}{m_2 m_4} \Delta_2 \Delta_4+\mu \tag{19}$$

$$\varphi'\left(r_{34}^2\right)=\frac{\nu}{m_3 m_4} \Delta_3 \Delta_4+\mu \tag{20}$$

此外，在 r_{ij}^2 与 Δ_i 之间存在关系：

$$t_i=\sum_{j=1}^{4} \Delta_j r_{ij}^2, \quad t_1=t_2=t_3=t_4 \tag{21}$$

利用这个关系，Perez 和 Santoprete 得到了下面的引理：

引理 2.1 [5] 如果 $q=\left(q_1, q_2, q_3, q_4\right)$ 形成中心构型，则等式(15)-(20)中的 ν, μ 满足关系： $\nu>0,\ \mu<0$.

3. 定理 1.2 的证明

在证明定理 1.2 之前，我们先介绍下面的引理。

引理 3.1 [6] 在定理 1.2 的假设条件下， $\Delta_3<\Delta_1<0<\Delta_2<\Delta_4$ 。

引理 3.2 [6] 在定理 1.2 的假设条件下，若 $\Delta_3+\Delta_4=0$ ，即 $\Delta_3=-\Delta_4$ ，则构型 q 为等腰梯形中心构型。

证明： 当 $\Delta_3=-\Delta_4$ 时，易知 q 为梯形。再由等式(7)知

$$\Delta_1+\Delta_2=0，\ 即\ \Delta_1=-\Delta_2，$$

从而

$$\varphi'\left(r_{14}^2\right)=\frac{\nu}{m_1 m_4} \Delta_1 \Delta_4+\mu=\frac{\nu}{m_2 m_3} \Delta_2 \Delta_3+\mu=\varphi'\left(r_{23}^2\right)$$

由 $\varphi'(x)$ 的单调性可知 $r_{14}=r_{23}$ ，从而构型 q 为等腰梯形。

下面我们来证明定理 1.2。

证明： 不失一般性，我们假设

$$m_1 = m_2 = 1,\ m_3 = m_4 = \alpha\ (0 < \alpha < 1)$$

由引理 3.2 知我们只需证明：

$$\Delta_3 + \Delta_4 = 0\,.$$

采用反证法，假设 $\Delta_3 + \Delta_4 \neq 0$，则有以下两种情况：

$$\text{(i)}\quad \Delta_3 + \Delta_4 < 0\,;$$

$$\text{(ii)}\quad \Delta_3 + \Delta_4 > 0\,.$$

首先我们考虑情况(i)：

由引理 3.1 可知

$$\Delta_3\Delta_4 < \{\Delta_1\Delta_4, \Delta_2\Delta_3\} < \Delta_1\Delta_2 < 0 < \{\Delta_1\Delta_3, \Delta_2\Delta_4\} \tag{22}$$

由等式(7)知

$$\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2\Delta_4 = \Delta_1\Delta_3 + (\Delta_1 + \Delta_3 + \Delta_4)\Delta_4 = (\Delta_1 + \Delta_4)(\Delta_3 + \Delta_4)$$

$$\Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_4 = \Delta_2\Delta_3 + (\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4)\Delta_4 = (\Delta_2 + \Delta_4)(\Delta_3 + \Delta_4)$$

我们断言：

$$\Delta_1 + \Delta_4 > 0$$

如果 $\Delta_1 + \Delta_4 \le 0$，则 $\Delta_4 \le -\Delta_1$

结合引理 3.1 有

$$0 < \Delta_2 < \Delta_4 \le -\Delta_1 < -\Delta_3 \tag{23}$$

从而

$$\Delta_2 + \Delta_3 < 0$$

进一步有

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 < 0$$

与等式(7)矛盾。所以

$$\Delta_1\Delta_3 - \Delta_2\Delta_4 < 0 \tag{24}$$

即 $\Delta_1\Delta_3 < \Delta_2\Delta_4$。

又由 $\Delta_2 + \Delta_4 > 0$ 可得

$$\Delta_2\Delta_3 - \Delta_1\Delta_4 < 0 \tag{25}$$

即 $\Delta_2\Delta_3 < \Delta_1\Delta_4$。

从而

$$\Delta_3\Delta_4 < \Delta_2\Delta_3 < \Delta_1\Delta_4 < \Delta_1\Delta_2 < 0 < \Delta_1\Delta_3 < \Delta_2\Delta_4 \tag{26}$$

又因为 $0 < \alpha < 1$，所以

$$\frac{1}{\alpha^2}\Delta_3\Delta_4 < \frac{1}{\alpha}\Delta_2\Delta_3 < \frac{1}{\alpha}\Delta_1\Delta_4 < \Delta_1\Delta_2 < 0 < \frac{1}{\alpha}\Delta_1\Delta_3 < \frac{1}{\alpha}\Delta_2\Delta_4 \tag{27}$$

由引理 2.1 知

$$\varphi'\left(r_{34}^2\right)<\varphi'\left(r_{23}^2\right)<\varphi'\left(r_{14}^2\right)<\varphi'\left(r_{12}^2\right)<\varphi'\left(r_{13}^2\right)<\varphi'\left(r_{24}^2\right) \tag{28}$$

又因为 $\varphi'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\ (x>0)$ 关于 x 单调递增

所以

$$r_{34}^2<r_{23}^2<r_{14}^2<r_{12}^2<r_{13}^2<r_{24}^2 \tag{29}$$

即

$$r_{34}<r_{23}<r_{14}<r_{12}<r_{13}<r_{24} \tag{30}$$

又因 q_1,q_2,q_3,q_4 共圆，则 $\angle q_1q_2q_3+\angle q_1q_4q_3=180^\circ$。

由余弦定理有

$$r_{13}^2=r_{14}^2+r_{34}^2-2r_{14}r_{34}\cos\angle q_1q_4q_3$$

$$r_{13}^2=r_{12}^2+r_{23}^2-2r_{12}r_{23}\cos\angle q_1q_2q_3$$

从而解得

$$r_{13}=\sqrt{\frac{\left(r_{12}r_{14}+r_{23}r_{34}\right)\left(r_{14}r_{23}+r_{12}r_{34}\right)}{r_{12}r_{23}+r_{14}r_{34}}} \tag{31}$$

同理可得

$$r_{24}=\sqrt{\frac{\left(r_{12}r_{23}+r_{14}r_{34}\right)\left(r_{14}r_{23}+r_{12}r_{34}\right)}{r_{12}r_{14}+r_{23}r_{34}}} \tag{32}$$

从而

$$\frac{r_{13}}{r_{24}}=\frac{r_{12}r_{14}+r_{23}r_{34}}{r_{12}r_{23}+r_{14}r_{34}} \tag{33}$$

由关系式(30)有

$$\left(r_{12}r_{14}+r_{23}r_{34}\right)-\left(r_{12}r_{23}+r_{14}r_{34}\right)=\left(r_{14}-r_{23}\right)\left(r_{12}-r_{34}\right)>0 \tag{34}$$

从而

$$\frac{r_{13}}{r_{24}}>1 \tag{35}$$

即 $r_{13}>r_{24}$，与关系式(30)矛盾。

从而情况(i)不成立。

类似可证明情况(ii)也不成立。

从而假设不成立，即 $\Delta_3+\Delta_4=0$ 成立，完成了定理的证明。

4. 结束语

本文利用有向面积，从质量的角度入手，并结合四体共圆的几何特征，给出了关于两对相邻等质量的四体共圆中心构型为等腰梯形这一结果的一个简洁证明。在之后的研究中，我们希望利用这个方法给出仅一对相邻质点质量相等的四体共圆中心构型为等腰梯形这一结论的不同的证明。进一步，我们希望能在具有两对相邻等质量的平面四体中心构型这一问题的研究中得到一些新的结果。

致　谢

作者衷心感谢张世清教授在本文写作过程中的悉心指导与关心。

基金项目

中国自然科学基金(11671278)。

参考文献 (References)

[1] Cors, M. and Roberts, E. (2012) Four-Body Co-Circular Central Configurations. *Nonlinearity*, **25**, 343-370. https://doi.org/10.1088/0951-7715/25/2/343

[2] Wintner, A. (1941) The Analytical Foundations of Celestial Mechanics. Princeton Math. Series 5. Princeton University Press, Princeton.

[3] Cayley, A. (1841) On a Theorem in the Geometry of Position. *Cambridge Mathematical Journal*, **2**, 267-271.

[4] Dziobek, O. (1900) Über Einen Merkwürdigen Fall des Viclkörpronlems. *Astronomische Nachrichten*, **152**, 32-46. https://doi.org/10.1002/asna.19001520302

[5] Perez-Chavela, E. and Santoprete, M. (2007) Convex Four-Body Central Configurations with Some Equal Masses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **185**, 481-494. https://doi.org/10.1007/s00205-006-0047-z

[6] Deng, Y., Li, B. and Zhang, S. (2017) Four-Body Central Configurations with Adjacent Equal Masses. *Journal of Geometry and Physics*, **114**, 329-335. https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2016.12.009