Pure Mathematics 理论数学, 2012, 2, 78-81
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2012.22013 Published Online April 2012 (http://www.hanspub.org/journal/pm)

Boundedness of Commutators of a Class of Generalized Calderón-Zygmund Operators on Lebesgue Space with Variable Exponent*

Li'na Ma, Shuhai Li, Huo Tang

Department of Mathematics and Statistics, Chifeng College, Chifeng
Email: malina00@163.com

Received: Feb. 8th, 2012; revised: Feb. 21st, 2012; accepted: Mar. 1st, 2012

Abstract: In this paper, the author discusses commutators of a class of generalized Calderón-Zygmund operators generated by Lipschitz functions. By maximal function estimates, the boundedness of these commutators on Lebesgue space with variable exponent is obtained.

Keywords: Calderón-Zygmund Operator; Commutator; Variable Exponent

广义 Calderón-Zygmund 算子交换子在变指数 Lebesgue 空间中的有界性*

马丽娜，李书海，汤 获

赤峰学院数学与统计学院，赤峰
Email: malina00@163.com

收稿日期：2012 年 2 月 8 日；修回日期：2012 年 2 月 21 日；录用日期：2012 年 3 月 1 日

摘　要：本文讨论了一类由广义的 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数生成的交换子，通过极大函数估计，得到了其在变指数 Lebesgue 空间中的有界性。

关键词：Calderón-Zygmund 算子；交换子；变指数

1. 引言及预备知识

2006 年 Cruz-Uribe，Fiorenza，Martell 和 Pérez[1]得到：如果 Hardy-Littlewood 极大算子在变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$ 中有界，则奇异积分交换子 $[b,T](b\in \mathrm{BMO})$ 在 $L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$ 中具有有界性。受以上结论启发，本文将考虑一类广义的 Calderón-Zygmund 算子交换子 $(b\in \mathrm{Lipschitz})$ 在变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(\cdot)}\left(R^n\right)$ 中的有界性。

定义 1[2] 设 $S\left(R^n\right)$ 为 R^n 上所有 Schwartz 函数空间，$S'\left(R^n\right)$ 是其对偶空间，即 R^n 上的缓增广义函数空间。设 $T:S\left(R^n\right)\to S'\left(R^n\right)$ 是以 $K(\cdot,\cdot)$ 为核的线性算子，定义为

$$T(f)(x)=\int_{R^n} K(x,y)f(y)\mathrm{d}y,\ \ f\in C_c^{\infty}\left(R^n\right).$$

若下列三个条件成立，则称 T 为广义 Calderón-Zygmund 算子：

1) T 可以延拓为 $L^2\left(R^n\right)$ 上的有界算子。

2) K 除对角线 $\left\{(x,y)\in R^n\times R^n : x=y\right\}$ 外是光滑的，且

*资助信息：内蒙古自然科学基金资助项目(2010MS0117)和内蒙古高校科学研究基金项目(NJzy08150)。

$\int_{|x-y|>2|y-z|}\left(\left|K(x,y)-K(x,z)\right|+\left|K(y,x)-K(z,x)\right|\right)\mathrm{d}x\le C$，其中 $C>0$ 是与 y 和 z 无关的常数。

3) 存在正常数序列 $\{C_j\}$，对任意 $j\in N$，有 $\left(\int_{2^j|z-y|\le|x-y|<2^{j+1}|z-y|}\left|K(x,y)-K(x,z)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\le C_j\left(2^j|z-y|\right)^{-\frac{n}{q'}}$ 且 $\left(\int_{2^j|y-z|\le|y-x|<2^{j+1}|y-z|}\left|K(y,x)-K(z,x)\right|^q\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}\le C_j\left(2^j|z-y|\right)^{-\frac{n}{q'}}$。其中 (q,q') 是固定的正数对，满足 $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$ 且 $1<q'<2$。

容易验证该算子是经典 Calderón-Zygmund 算子的一个推广。经典 Calderón-Zygmund 算子在 Fourier 分析，复分析，算子理论等方面有着很多重要应用，因此对广义 Calderón-Zygmund 算子研究具有重要意义。

定义 2 广义 Calderón-Zygmund 算子交换子 $[b,T]$ 定义为：

$$[b,T]f(x)=b(x)Tf(x)-Tbf(x).$$

Der-Chen Chang[2]首先引入广义 Calderón-Zygmund 算子 *T*，并得到了它在加权 Lebesgue 空间上的有界性。近些年来，很多作者都对其及交换子进行了研究[3-5]。

定义 3 令 p 为 R^n 上函数值在 $[1,\infty)$ 之间的可测函数，$L^{p(\cdot)}(R^n)$ 为定义在 R^n 上的可测函数 f 的集合使得对于某些 $\lambda>0$，有

$$\int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x<\infty.$$

这个集合当赋以范数

$$\|f\|_{L^{p(\cdot)}}=\inf\left\{\lambda>0:\int_{R^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}\mathrm{d}x\le 1\right\}$$

时为 Banach 函数。

因为这些空间推广了标准 Lebesgue 空间的一般规律，被称之为变 Lebesgue 空间。我们可以在 R^n 上任何可测子集上定义变 Lebesgue 空间[6]。本文仅讨论在整个 R^n 空间上。

$p(R^n)$ 表示在 R^n 上可测函数 p 的集合，其中 p 的函数值在 $[1,\infty)$ 之间，使得

$$1<p^-=ess\inf_{x\in R^n}p(x),\qquad ess\sup_{x\in R^n}p(x)=p^+<\infty.$$

定义 4 给定函数 $f\in L^1_{loc}(R^n)$，定义它的 Hardy-Littlewood 极大算子为

$$Mf(x)=\sup_{x\in Q}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|\mathrm{d}y.$$

这里的上确界取遍所有中心在 x 的方体。对于 $p\ge 1$，记

$$M_p(f)(x)=\left(M\left(|f|^p\right)(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

众所周知 Hardy-Littlewood 极大算子在 Lebesgue 空间的有界性在分析中起重要作用，其在变指数 Lebesgue 空间中也是很重要的，为此人们得到了指数函数 $p(\cdot)$ 的一些条件使得极大算子 M 在 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 空间上有界。本文中令 $B(R^n)$ 为使得 M 在 $L^{p(\cdot)}(R^n)$ 空间上有界的 $p(\cdot)$ 的集合，其中 $p(\cdot)\in P(R^n)$。

定义 5 Sharp 极大函数定义为

$$M^{\#}f(x)=\sup_{x\in B}\frac{1}{|B|}\int_B\left|f(y)-f_B\right|\mathrm{d}y\sim\sup_{x\in B}\inf_{a\in C}\frac{1}{|B|}\int_B\left|f(y)-a\right|\mathrm{d}y.$$

其中 $f_B=\frac{1}{|B|}\int_B f(y)\mathrm{d}y$，上确界取遍所有包含 x 的球 B。

定义 6 设 $0<\alpha<n$，$1\le l<\infty$，分数次 Hardy-Littlewood 极大算子 $M_{l,\alpha}$ 定义如下：

$$M_{l,\alpha}f(x)=\sup_{r>0}\left(\frac{1}{|B(x,r)|^{1-\frac{l\alpha}{n}}}\int_{B(x,r)}|f(y)|^l\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{l}}.$$

定义 7 设 $0<\beta<1$，Lipschitz 空间 $\dot{\Lambda}_\beta$ 中的函数满足

$$\|f\|_{\dot{\Lambda}_\beta}=\sup_{x,h\in R^n,h\neq0}\frac{|f(x+h)-f(x)|}{|h|^\beta}<\infty.$$

2. 结论及证明

本文讨论由广义 Calderón-Zygmund 算子与 Lipschitz 函数生成的交换子在变指数 Lebesgue 空间上的有界性，结论如下：

定理 1 设 $b\in\dot{\Lambda}_\beta(0<\beta<1),T$ 是广义 Calderón-Zygmund 算子且数列 $\{C_j\}\in l_1$，令 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in B(R^n)$，$\frac{1}{p_1(\cdot)}-\frac{1}{p_2(\cdot)}=\frac{\beta}{n}$ 且 $p_1^+<\frac{n}{\beta}$，则 $\|[b,T]f\|_{L^{p_2(\cdot)}}\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}$。

定理证明前，需要一些引理。

引理 1[5] 设 T 是广义 Calderón-Zygmund 型算子，q' 如定义 1 所述。若数列 $\{C_j\}\in l_1$，则对任意 s 满足 $q'\le s<\infty$，存在常数 $C>0$，使得对所有具有紧支集的光滑函数 f，有

$$M^\#(Tf)(x)\le CM_s(f)(x)\quad \text{a.e.}\quad x.$$

引理 2[5] 设 T 是广义 Calderón-Zygmund 型算子，q' 如定义 1 所述。若数列 $\{C_j\}\in l_1$ 且 $b\in\dot{\Lambda}_\beta$，$0<\beta<1$，则对任意 s 满足 $q'\le s<\infty$，存在常数 $C>0$，使得对所有具有紧支集的光滑函数 f，有

$$M^\#[b,T]f(x)\le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\left(M_{s,\beta}(Tf)(x)+M_{s,\beta}(f)(x)\right).$$

引理 3[1] 设 $p_1(\cdot),p_2(\cdot)\in P(R^n)$，且满足 $p_1^+<n/\alpha$ 和 $\frac{1}{p_1(x)}-\frac{1}{p_2(x)}=\frac{\alpha}{n},x\in R^n$，如果存在 p_0，$\frac{n}{n-\alpha}<p_0<\infty$，使得 $p_2(x)/p_0\in B(R^n)$，则有 $\|M_{1,\alpha}\|_{L^{p_2(\cdot)}}\le C\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}$。

引理 4[1] 设 $p(\cdot)\in \mathrm{P}(R^n)$，若存在常数 p_1，使得 $0<p_1<p_-$ 且 $p(\cdot)/p_1\in B(R^n)$，则

$$\|Mf\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}\le\|M^\# f\|_{L^{p(\cdot)}(R^n)}.$$

引理 5[1] 设 $p(\cdot)\in P(R^n)$，则下列条件等价

1) $p(\cdot)\in B(R^n)$；

2) $p'(\cdot)\in B(R^n)$；

3) $p(\cdot)/q\in B(R^n)$，对于任意 $1<q<p_-$；

4) $(p(\cdot)/q)'\in B(R^n)$，对于任意 $1<q<p_-$。

定理 1 的证明：取 $1<q'<s<\min\{p_1^-,p_2^-\}$ 且 $\frac{1}{s}>\frac{1}{p_1^+}+\frac{1}{p_2^-},q'$ 为定义所述，则由引理 2、4、5 得

$$\|[b,T]f\|_{L^{p_2(\cdot)}} \le \|M([b,T]f)\|_{L^{p_2(\cdot)}} \overset{\text{引理4,5}}{\le} \|M^{\#}([b,T]f)\|_{L^{p_2(\cdot)}} \overset{\text{引理2}}{\le} C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\left(\|M_{s,\beta}(Tf)\|_{L^{p_2(\cdot)}} + \|M_{s,\beta}(f)\|_{L^{p_2(\cdot)}}\right).$$

其中

$$\|M_{s,\beta}(Tf)\|_{L^{p_2(\cdot)}} = \left\|M_{1,\beta s}\left(|Tf|^s\right)^{\frac{1}{s}}\right\|_{L^{p_2(\cdot)}} = \left\|M_{1,\beta s}\left(|Tf|^s\right)\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_2(\cdot)}{s}}}.$$

由引理 5 知，$\dfrac{p_2(\cdot)}{s} \in B(R^n)$，取 $p_0 = \dfrac{1}{1-\dfrac{s}{p_1^+}}$，则 $\dfrac{n}{n-\beta s} < p_0 < \left(\dfrac{p_2(\cdot)}{s}\right)^-$，有 $\dfrac{p_2(\cdot)}{s p_0} \in B(R^n)$。

根据引理 3 和引理 1，可得

$$\begin{aligned}\left\|M_{1,\beta s}\left(|Tf|^s\right)\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_2(\cdot)}{s}}} &\le C\left\||Tf|^s\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_1(\cdot)}{s}}} = C\|Tf\|_{L^{p_1(\cdot)}} \le C\|M^{\#}(Tf)\|_{L^{p_1(\cdot)}} \le C\|M_s f\|_{L^{p_1(\cdot)}} \\ &= C\left\|\left(M|f|^s\right)^{\frac{1}{s}}\right\|_{L^{p_1(\cdot)}} = C\left\|M|f|^s\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_1(\cdot)}{s}}} \le C\left\||f|^s\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_1(\cdot)}{s}}} = C\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\|M_{s,\beta}(f)\|_{L^{p_2(\cdot)}} = \left\|M_{1,\beta s}\left(|f|^s\right)^{\frac{1}{s}}\right\|_{L^{p_2(\cdot)}} = \left\|M_{1,\beta s}\left(|f|^s\right)\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_2(\cdot)}{s}}} \le C\left\||f|^s\right\|^{\frac{1}{s}}_{L^{\frac{p_1(\cdot)}{s}}} = C\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}.$$

综上可得，

$$\|[b,T]f\|_{L^{p_2(\cdot)}} \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\left(\|M_{s,\beta}(Tf)\|_{L^{p_2(\cdot)}} + \|M_{s,\beta}(f)\|_{L^{p_2(\cdot)}}\right) \le C\|b\|_{\dot{\Lambda}_\beta}\|f\|_{L^{p_1(\cdot)}}.$$

参考文献 (References)

[1] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, J. Martell and C. Perez. The boundedness of classical operators on variable L^p spaces. Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ, 2006, 31: 239-264.

[2] D. C. Chang, J. F. Li and J. Xiao. Weighted scale estimates for Calderón-Zygmund type operators. Contemporary Mathematics, 2007, 446: 61-70.

[3] 李俊峰. 某些算子及交换子的有界性[D]. 北京师范大学, 2005.

[4] 马丽娜, 江寅生. 广义 Calderón-Zygmund 算子交换子的有界性[J]. 高校应用数学学报, 2009, 24(4): 453-461.

[5] 林燕. Calderón-Zygmund 型算子及其交换子的 Sharp 极大函数估计[J]. 数学物理学报, 2011, 31A(1): 206-215.

[6] O. Kovacik, J. Rakosnik. On spaces $L^{P(x)}$ and $W^{k,p(x)}$. Czechoslovak Mathematical Journal, 1991, 41(4): 592-618.

