Pure Mathematics 理论数学, 2013, 3, 321-325
http://dx.doi.org/10.12677/PM.2013.35050 Published Online September 2013 (http://www.hanspub.org/journal/pm.html)

T-Fuzzy Soft Ideals of Soft Rings*

Wenting Li

Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an
Email: wenting_sup@163.com

Received: Jun. 21st, 2013; revised: Jul. 22nd, 2013; accepted: Aug. 5th, 2013

Abstract: In order to investigate fuzzy soft sets further more, *T*-fuzzy soft ideal, as a generalization of a fuzzy soft set, is initiated by the combination of soft sets and fuzzy sets. Several relevant properties of *T*-fuzzy soft ideals under fuzzy soft operations and fuzzy soft homomorphisms are also discussed.

Keywords: Soft Set; Fuzzy Soft Set; Soft Ring; *T*-Fuzzy Soft Ideal; Fuzzy Soft Homomorphism

软环的 *T*-模糊软理想*

李文婷

西北大学数学系，西安
Email: wenting_sup@163.com

收稿日期：2013 年 6 月 21 日；修回日期：2013 年 7 月 22 日；录用日期：2013 年 8 月 5 日

摘　要：为了进一步研究模糊软集理论，通过将软集与模糊理想结合，给出了 *T*-模糊软理想的定义，并在一定程度上推广了模糊软集。然后给出了软环的 *T*-模糊软理想在模糊软运算和模糊软同态下像的相关性质。

关键词：软集；模糊软集；软环；*T*-模糊软理想；模糊软同态

1. 引言

在现实生活中，由于不确定性因素的存在，往往不能成功地使用经典的数学方法来处理社会、经济、工程等领域中的复杂的问题。为了解决这一难题，模糊集理论[1]和粗糙集理论[2]相继被提出。软集是Molodtsov[3]在1999年为解决模糊集、粗糙集等数学处理工具参数化不足的问题而提出的，其强调从参数化的角度研究不确定性和复杂性。目前，软集理论在软决策[4]、软集运算[5]、群[6]、环[7]等方面得到了较大发展。特别是Maji等提出的模糊软集[8]融合了软集的参数化和模糊集的程度化思想，是软集和模糊集的一个重要推广。

三角范数最初由Menger[9]1942年在研究统计问题时提出，它是阐释模糊逻辑和模糊集的重要工具。三角范数中引起广泛关注的是 T 范数与 S 范数[10]，由于它们具有良好的数学性质，被广泛应用到各种模糊系统中[11-13]，也成为了模糊推理系统不可缺少的组成部分。

本文在[13-16]的基础上，将模糊软集理论和 T 范数应用到软环的模糊理想上，从而引入了软环的 T -模糊软理想的概念。然后讨论了软环的 T -模糊软理想和软理想的相互转化，及 T -模糊软理想的相关性质。

2. 预备知识

以下设 U 为初始论域，E 为参数集，$\wp(U)$ 是 U 的幂集，I^U 是 U 的模糊幂集，$A,B\subset E$ 。本文用 $\wedge$ 表示

*资助信息：西北大学研究生自主创新资助项目(YZZ12061)；西北大学研究生高水平研究成果资助项目(NO.YC13055)。

min，$\vee$ 表示 max。

定义 1[16] 设 X 为非空集合，称映射 $S: X \to [0,1]$ 为 X 的模糊子集。

定义 2[16] 若映射 $T:[0,1]\times[0,1]\to[0,1]$ 满足：

1) $T(a,b)=T(b,a)$；

2) $T(T(a,b),c)=T(a,T(b,c))$；

3) $a\le a', b\le b' \Rightarrow T(a,b)\le T(a',b')$；

4) $T(1,a)=a$，

则称 T 为 $[0,1]$ 上的 T 范数。若 $T(a,a)=a$，则称 T 为幂等的 T 范数。

性质 1[16] 设 T 为 $[0,1]$ 上的范数，I 为指标集，则对任意的 $a,b,c,d\in[0,1]$，有以下：

1) $T(a,0)=0$；

2) $0\le T(a,b)\le a\wedge b$；

3) $T(a,b)\wedge T(c,d)\ge T(a\wedge c, b\wedge d)$；

4) 若 T 是连续的，则

$$\vee_{i\in I} T(a_i,b)=T(\vee_{i\in I} a_i,b)，\{a_i: i\in I\}\subset[0,1]。$$

定义 3[3] 设 $F: A\to\wp(U)$ 为 A 到 $\wp(U)$ 的一个映射，称 (F,A) 为 U 上的软集，记为 F_A。

定义 4[8] 设 $f: A\to I^U$ 为 A 到 I^U 的一个映射，称 (f,A) 为 U 上的模糊软集，记为 f_A。

定义 5[8] 设 f_A 和 g_B 为 U 上的模糊软集，f_A 与 g_B 的交为模糊软集 $\widehat{h}_C = f_A \cap g_B$ 定义为：

$$\forall e\in C，\widehat{h}_e = f_e \cap g_e，$$

其中，$C = A\cap B$。

定义 6[8] 设 f_A 和 g_B 为 U 上的模糊软集，f_A 与 g_B 的并为模糊软集 $\breve{h}_C = f_A\cup g_B$ 定义为：$\forall e\in C$，

$$\breve{h}_e=\begin{cases} f_e, & e\in A\setminus B\\ g_e, & e\in B\setminus A\\ f_e\cap g_e, & e\in A\cap B\end{cases}$$

其中，$C = A\cup B$。

接下来，设 $(R,+,\bullet)$ 是环，0 是 R 的零元。

定义 7[8] 设 F_A 是 R 上的软集，若对 $\forall\alpha\in A$，F_α 是 R 的子环，则称 F_A 为 R 的软环。

定义 8[7] 设 F_A 是 R 上的软环，H_B 是 R 上的非空软集，若它满足以下条件：

1) $B\subset A$。

2) $\forall\alpha\in B$，有 H_α 是 F_α 的理想，则称 H_B 为 F_A 的软理想。

定义 9[17] 设 f_A 为 U 上的模糊软集，对 $\forall\lambda\in(0,1]$，定义 U 上的软集 $(f_A)_\lambda$ 为：$\forall\alpha\in A$，$(f_\alpha)_\lambda$ 是 f_α 的 λ-水平截集，称 $(f_A)_\lambda$ 为 f_A 的 λ-水平软集。

定义 10[17] 设 f_A、g_B 分别为 U、V 上的两模糊软集，(φ,ψ) 是从 U 到 V 的模糊软函数，这里 $\varphi: U\to V$，$\psi: A\to B$ 是两映射。若 φ 是同态，则称 (φ,ψ) 是模糊软同态。

定义 11[17] 设 f_A、g_B 分别为 U、V 上的两模糊软集，(φ,ψ) 是从 U 到 V 的模糊软函数。

1) (φ,ψ) 下 f_A 的像记为 $(\varphi,\psi)f_A$ 是 V 上的模糊软集，并定义 $(\varphi,\psi)f_A=\varphi(f)_{\psi(A)}$，这里对 $\forall\beta\in\psi(A)$，$\forall y\in V$，

$$\varphi(f)_\beta(y)=\begin{cases}\bigvee_{\varphi(x)=y}\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta} f_\alpha(x), & x\in\varphi^{-1}(y)\\ 0, & \varphi^{-1}(y)=\varnothing\end{cases},$$

2) (φ,ψ) 下 g_B 的原像记为 $(\varphi,\psi)^{-1} g_B$ 是 U 上的模糊软集，并定义 $(\varphi,\psi)^{-1} g_B = \varphi^{-1}(g)_{\psi^{-1}(B)}$，这里对 $\forall x \in U$，$\forall \alpha \in \psi^{-1}(B)$，$\varphi^{-1}(g)_\alpha(x) = g_{\psi(\alpha)}(\varphi(x))$。

3. 软环的 T-模糊软理想

本如无特别说明，F_E 始终表示为 R 的软环，E 为参数集，$A,B \subset E$，T 为幂等的 T 范数。

定义 12 设 f_A 为 R 上的模糊软集，若对 $\forall \alpha \in A$，$f_\alpha \in I^{F_\alpha}$，$\forall x,y \in F_\alpha$，满足：

1) $f_\alpha(x-y) \ge T(f_\alpha(x), f_\alpha(y))$；

2) $f_\alpha(xy) \ge f_\alpha(x) \vee f_\alpha(y)$，则称 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想。

定理 1 设 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想，则 $\forall \alpha \in A$，$\forall x \in F_\alpha$，有

1) $f_\alpha(0) \ge f_\alpha(x)$；

2) $f_\alpha(-x) = f_\alpha(x)$。

证明 1) 对 $\forall x \in F_\alpha$，有 $f_\alpha(0) = f_\alpha(x-x) \ge T(f_\alpha(x), f_\alpha(x)) = f_\alpha(x)$。

2) 对 $\forall x \in F_\alpha$，$f_\alpha(-x) = f_\alpha(0-x) \ge T(f_\alpha(0), f_\alpha(x)) \ge T(f_\alpha(x), f_\alpha(x)) = f_\alpha(x)$，且

$$f_\alpha(x) = f_\alpha(0-(-x)) \ge T(f_\alpha(0), f_\alpha(-x)) \ge T(f_\alpha(-x), f_\alpha(-x)) = f_\alpha(-x),$$

故 $f_\alpha(-x) = f_\alpha(x)$。

定理 2 设 f_A 为 R 上的模糊软集，且 $\forall \alpha \in A$，$f_\alpha \in I^{F_\alpha}$，则 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想当且仅当对 $\forall \lambda \in (0,1]$，$(f_A)_\lambda \ne \varnothing$ 是 F_E 的软理想。

证明 必要性。设 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想且 $\forall \alpha \in A$，设 $\forall x,y \in (f_\alpha)_\lambda$，$f_\alpha(x) \ge \lambda$，$f_\alpha(y) \ge \lambda$，$f_\alpha(x-y) \ge T(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \ge T(\lambda,\lambda) = \lambda$，即 $x-y \in (f_\alpha)_\lambda$。

又 $\forall x \in F_\alpha$，$\forall y \in (f_\alpha)_\lambda$，$f_\alpha(y) \ge \lambda$，于是 $f_\alpha(xy) \ge f_\alpha(x) \vee f_\alpha(y) \ge f_\alpha(y) \ge \lambda$，即 $xy \in (f_\alpha)_\lambda$。同理 $yx \in (f_\alpha)_\lambda$，即 $(f_\alpha)_\lambda$ 是 F_α 的理想，故 $(f_A)_\lambda$ 是 F_E 的软理想。

充分性。设 $(f_A)_\lambda$ 是 F_E 的软理想，即 $\forall \alpha \in A$，$(f_\alpha)_\lambda$ 是 F_α 的理想。又 $\forall x,y \in F_\alpha$，记 $T(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) = \lambda$，$f_\alpha(x) \ge \lambda$，$f_\alpha(y) \ge \lambda$，即 $x,y \in (f_\alpha)_\lambda$，则 $x-y \in (f_\alpha)_\lambda$，故 $f_\alpha(x-y) \ge \lambda = T(f_\alpha(x), f_\alpha(y))$。记 $f_\alpha(x) = \lambda$，即 $x \in (f_\alpha)_\lambda$，则 $xy \in (f_\alpha)_\lambda$，于是 $f_\alpha(xy) \ge \lambda = f_\alpha(x)$。同理，$f_\alpha(xy) \ge f_\alpha(y)$，从而 $f_\alpha(xy) \ge f_\alpha(x) \vee f_\alpha(y)$，故 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想。

定理 3 设 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想，定义 R 上的软集 $f_A|_0$ 为：对 $\forall \alpha \in A$，$f_\alpha|_0 = \{x \in R \mid f_\alpha(x) = f_\alpha(0)\}$，则 $f_A|_0$ 是 F_E 的软理想。

证明 $\forall \alpha \in A$，$\forall x,y \in f_\alpha|_0$，$f_\alpha(x-y) \ge T(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) = T(f_\alpha(0), f_\alpha(0)) = f_\alpha(0)$，即 $x-y \in f_\alpha|_0$。又 $\forall x \in F_\alpha$，$\forall y \in f_\alpha|_0$，$f_\alpha(xy) \ge f_\alpha(x) \vee f_\alpha(y) \ge f_\alpha(0)$，且总有 $f_\alpha(0) \ge f_\alpha(xy)$，故 $f_\alpha(xy) = f_\alpha(0)$，即 $xy \in f_\alpha|_0$。同理 $yx \in f_\alpha|_0$，则 $f_A|_0$ 是 F_E 的软理想。

定理 4 设 f_A 和 g_B 是 F_E 的 T -模糊软理想，则

1) 设 $\widehat{h}_C = f_A \cap g_B$，则 $\widehat{h}_C$ 为 F_E 的 T -模糊软理想；

2) 设 $\breve{h}_C = f_A \cup g_B$，且 $A \cap B = \varnothing$，则 $\breve{h}_C$ 为 F_E 的 T -模糊软理想；

证明 1) $\forall \alpha \in C = A \cap B$，$\widehat{h}_\alpha = f_\alpha \cap g_\alpha \in I^{F_\alpha}$，$\forall x,y \in F_\alpha$，

$$\begin{aligned}
\widehat{h}_\alpha(x-y) &= f_\alpha(x-y) \wedge g_\alpha(x-y) \\
&\ge T(f_\alpha(x), f_\alpha(y)) \wedge T(g_\alpha(x), g_\alpha(y)) \\
&\ge T(f_\alpha(x) \wedge g_\alpha(x), f_\alpha(y) \wedge g_\alpha(y)) \\
&= T(\widehat{h}_\alpha(x), \widehat{h}_\alpha(y))
\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\widehat{h}_\alpha(xy) &= f_\alpha(xy)\wedge g_\alpha(xy) \ge \left(f_\alpha(x)\vee f_\alpha(y)\right)\wedge\left(g_\alpha(x)\vee g_\alpha(y)\right)\\ &\ge \left(f_\alpha(x)\wedge g_\alpha(x)\right)\vee\left(f_\alpha(y)\wedge g_\alpha(y)\right)\\ &= \left(f_\alpha(x)\wedge g_\alpha(x)\right)\vee\left(f_\alpha(y)\wedge g_\alpha(y)\right)\\ &= \widehat{h}_\alpha(x)\vee\widehat{h}_\alpha(y) = T\left(\widehat{h}_\alpha(x),F(y)\right)\vee T\left(\widehat{h}_\alpha(y),F(x)\right)\end{aligned},$$

故 $\widehat{h}_C$ 为 F_E 的 T -模糊软理想。

2) $\forall\alpha\in C$，且 $A\cap B=\varnothing$，有 $\alpha\in A\setminus B$ 或 $\alpha\in B\setminus A$。若 $\alpha\in A\setminus B$，$\breve{h}_\alpha = f_\alpha \in I^{F_\alpha}$，$\forall x,y\in F_\alpha$，

$$\breve{h}_\alpha(x-y)=f_\alpha(x-y)\ge T\left(f_\alpha(x),f_\alpha(y)\right)=T\left(\breve{h}_\alpha(x),\breve{h}_\alpha(y)\right),$$

$$\breve{h}_\alpha(xy)=f_\alpha(xy)\ge f_\alpha(x)\vee f_\alpha(y)=\breve{h}_\alpha(x)\vee\breve{h}_\alpha(y)。$$

若 $\alpha\in B\setminus A$，$\breve{h}_\alpha = g_\alpha\in I^{F_\alpha}$，同理可证，

$$\breve{h}_\alpha(x-y)\ge T\left(\breve{h}_\alpha(x),\breve{h}_\alpha(y)\right),\quad \breve{h}_\alpha(xy)\ge\breve{h}_\alpha(x)\vee\breve{h}_\alpha(y),$$

故 $\breve{h}_C$ 为 F_E 的 T -模糊软理想。

设 f_A 是 R 上的模糊软集，$\varphi:R\to R'$ 是群的映射，定义 R' 上的模糊软集 $\varphi(f)_A$ 为：对 $\forall\alpha\in A$，$\varphi(f)_\alpha=\varphi(f_\alpha)$。设 f_A、g_B 分别为 R、R' 上的两模糊软集，(φ,ψ) 是从 R 到 R' 的模糊软同态，若 $B=A$，且 $\forall\alpha\in A$，$\psi(\alpha)=\alpha$，则

$$(\varphi,\psi)f_A=\varphi(f)_{\psi(A)}=\varphi(f)_A,$$

即此时模糊软同态 (φ,ψ) 等价于同态 φ。

显然，软环在同态下的像和原像均为软环[7]。

定理 5 设 (φ,ψ) 是 R 到 R' 的模糊软同态，若 f_A 为 F_E 的 T -模糊软理想，且 T 是连续的 T 范数，则

1) $(\varphi,\psi)f_A$ 是 $\varphi(F)_E$ 的 T -模糊软理想，

2) $\varphi(f)_A$ 是 $\varphi(F)_E$ 的 T -模糊软理想。

证明 1) 对 $\forall\beta\in\psi_A$，$\exists\alpha\in A$，使 $\psi(\alpha)=\beta$，$\forall y_1,y_2\in\varphi(F)_\beta$，$\exists x_1,x_2\in F_\alpha$，使 $\varphi(x_1)=y_1$，$\varphi(x_2)=y_2$，则

$$\begin{aligned}\varphi(f)_\beta(y_1-y_2) &= \bigvee_{\varphi(t)=y_1-y_2}\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta} f_\alpha(t)\ge\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta} f_\alpha(x_1-x_2)\ge\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta}T\left(f_\alpha(x_1),f_\alpha(x_2)\right)\\ &= T\left(\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta}f_\alpha(x_1),\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta}f_\alpha(x_2)\right)=T\left(\varphi(f)_\beta(y_1),\varphi(f)_\beta(y_2)\right)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\varphi(f)_\beta(y_1y_2) &= \bigvee_{\varphi(x)=y_1y_2}\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta} f_\alpha(t)\ge\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta} f_\alpha(x_1x_2)\ge\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta}\left(f_\alpha(x_1)\vee f_\alpha(x_2)\right)\\ &= \left(\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta}f_\alpha(x_1)\right)\vee\left(\bigvee_{\psi(\alpha)=\beta}f_\alpha(x_2)\right)=\varphi(f)_\beta(y_1)\vee\varphi(f)_\beta(y_2)\end{aligned},$$

所以 $(\varphi,\psi)f_A$ 是 $\varphi(F)_E$ 的 T -模糊软理想。

2) 证明与(1)类似。

定理 6 设 (φ,ψ) 是 R 到 R' 的模糊软同态，G_E 为 R' 的软环，若 g_B 为 G_E 的 T -模糊软理想，则

1) $(\varphi,\psi)^{-1}g_B$ 是 $\varphi^{-1}(G)_E$ 的 T -模糊软理想，

2) $\varphi^{-1}(g)_B$ 是 $\varphi^{-1}(G)_E$ 的 T -模糊软理想。

证明 1) 设 $\alpha\in\psi_B^{-1}$，$\exists\beta\in B$，使得 $\psi^{-1}(\beta)=\alpha$，$\forall x_1,x_2\in\varphi^{-1}(G)_\beta$，

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(g)_\alpha(x_1-x_2) &= g_{\psi(\alpha)}\left(\varphi(x_1-x_2)\right)=g_{\psi(\alpha)}\left(\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\right)\\ &\ge T\left(g_{\psi(\alpha)}\left(\varphi(x_1)\right),g_{\psi(\alpha)}\left(\varphi(x_2)\right)\right)=T\left(\varphi^{-1}(g)_\alpha(x_1),\varphi^{-1}(g)_\alpha(x_2)\right)\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(g)_\alpha(x_1x_2) &= g_{\psi(\alpha)}(\varphi(x_1x_2)) = g_{\psi(\alpha)}(\varphi(x_1)\varphi(x_2)) \\ &\geq g_{\psi(\alpha)}(\varphi(x_1)) \vee g_{\psi(\alpha)}(\varphi(x_2)) = \varphi^{-1}(g)_\alpha(x_1) \vee \varphi^{-1}(g)_\alpha(x_2)\end{aligned},$$

所以$(\varphi,\psi)^{-1}g_B$是$\varphi^{-1}(G)_E$的T-模糊软理想。

2) 证明与(1)类似。

4. 结束语

本文通过将模糊理想参数化，并与T范数结合，使之推广到软环上的T-模糊软理想，然后讨论了*T*-模糊软理想的一系列性质，获得一些重要的结论。目前，已经有许多学者对软代数系统进行了模糊化、粗糙化，本文为软代数系统模糊理论的建立奠定了一定的基础。

参考文献 (References)

[1] L. A. Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.
[2] Z. Pawlak. Rough sets. International Journal of Information and Computer Science, 1982, 11(5): 341-356.
[3] D. Molodstov. Soft set theory—First results. Computers & Mathematics with Applications, 1999, 37(4): 19-31.
[4] P. K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas. An application of soft sets in a decision making problem. Computers & Mathematics with Applications, 2002, 44(8): 1077-1083.
[5] M. I. Ali, F. Feng, et al. On some new operations in soft set theory. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 57(9): 1547-1553.
[6] H Aktaş, N Çağman. Soft sets and soft groups. Information Sciences, 2007, 177(13): 2726-2735.
[7] U. Acar, F. Koyuncu and B. Tanay. Soft sets and soft rings. Computers & Mathematics with Applications, 2010, 59(11): 3458-3463.
[8] P. K. Maji, R. Biswas and A. R. Roy. Fuzzy soft sets. Journal of Fuzzy Mathematics, 2001, 9(3): 589-602.
[9] K. Menger. Statistical metrics. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1942, 8: 535-537.
[10] E. P. Klement, R. Mesiar and E. Pap. Triangular norms. Dordreclot: Klmver Academic Publishers, 2000: 13-29.
[11] T. Whaler. Paranieteilized R-implications. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 134: 231-281.
[12] 张小红, 何华灿, 徐扬. 基于 Schweizer-Sklar T-范数的模糊逻辑系统[J]. 中国科学 E 辑 信息科学, 2005, 35(12): l314-1326.
[13] 苗明力, 廖祖华, 胡森菌, 陆金花. 关于T范数的广义模糊子坡(理想)[J]. 山东人学学报(工学版), 2010, 40(5): 28-33.
[14] 谭宜家. Fuzzy 群中的 Fuzzy 同余关系与正规 Fuzzy 子群[J]. 福州大学学报(自然科学版), 1995, 23(2): 1-6.
[15] S. L. Li, Y. D. Yu and Z. D. Wang. T-congruence L-relations on groups and rings. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 92: 365-381.
[16] 姚炳学. 群与环上的模糊理论[M]. 北京: 科学出版社, 2008.
[17] A. Aygünoğlu, H. Aygün. Introduction to fuzzy soft groups. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 58(6): 1279-1286.