**Pure Mathematics** 理论数学, 2016, 6(3), 172-176
Published Online May 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63026

# Cores of Super Rpp Semigroups

**Huoping Ye, Junying Guo, Xiaojiang Guo**

College of Mathematics and Information, Jiangxi Normal University, Nanchang Jiangxi
Email: 1184525256@qq.com, 651945171@qq.com, xjguo@jxnu.edu.cn

Received: Apr. 25th, 2016; accepted: May 9th, 2016; published: May 12th, 2016



## Abstract

**In this note, central (overabelian) super rpp semigroup is defined. These semigroups are generalization of the related classes of completely regular semigroups in the range of super rpp semigroups. Some characterizations of such semigroups are obtained.**

## Keywords

**Super Rpp Semigroup, Completely $\mathcal{J}^{(\ell)}$-Simple Semigroup**

# 超Rpp半群的核心

**叶火平，郭俊颖，郭小江**

江西师范大学，数学与信息科学学院，江西 南昌
Email: 1184525256@qq.com, 651945171@qq.com, xjguo@jxnu.edu.cn

收稿日期：2016年4月25日；录用日期：2016年5月9日；发布日期：2016年5月12日

## 摘 要

本文定义了中心(扩交换)超rpp半群，这些半群是完全正则半群子类在超rpp半群中的推广。文中给出了中心(扩交换)超rpp半群的若干特征。

文章引用：叶火平，郭俊颖，郭小江．超 Rpp 半群的核心[J]．理论数学, 2016, 6(3): 172-176.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.63026

## 关键词

**超Rpp半群，完全$\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群**

## 1. 引言和准备

半群$S$的核心$C(S)$定义为它的所有幂等元生成的子半群。由于幂等元为半群结构的骨架，半群核心自然能够提供半群许多结构信息，因此研究半群的核心就非常有意义。本文将研究超rpp半群的核心。

令$a,b\in S$。定义

$a\mathcal{L}^*b$当且仅当对于任意$x,y\in S^1$，$ax=ay\Leftrightarrow bx=by$。

下面已知结果将多次用到(可见[1])。

**引理1.1** 令$a,e^2=e\in S$，则$a\mathcal{L}^*e$当且仅当$a=ae$，且对于任意的$x,y\in S^1$，$ax=ay\Rightarrow ex=ey$。

半群$S$称为rpp半群，如果对于任意的$a\in S$，作为$S^1$-系$S^1a$是投射的。等价地，$S$为rpp半群当且仅当每一个$\mathcal{L}^*$-类都含有幂等元。进一步，rpp半群$S$称为强rpp半群(strongly rpp semigroup)，如果对于任意的$a\in S$，存在惟一的幂等元$a^0$使得$a=a^0a$且$a\mathcal{L}^*a^0$。强rpp半群$S$称为超rpp半群(super rpp semigroup)，如果等价关系$\overline{\mathcal{R}}=\left\{(a,b)\in S\times S:a^0\mathcal{R}b^0\right\}$是左同余。

现令$S$为强rpp半群。如[2]，定义$\overline{\mathcal{H}}=\mathcal{L}^*\cap\overline{\mathcal{R}}$。显然，$S$的每个$\overline{\mathcal{H}}$-类都含幂等元，并且是左消幺半群。众所周知，完全正则半群是超rpp半群，特别地，当$S$是完全正则半群时，$\overline{\mathcal{R}}=\mathcal{R}$，进而$\overline{\mathcal{H}}=\mathcal{H}$。事实上，超rpp半群是完全正则半群当且仅当它是正则的。

令$I$，$\Lambda$为非空集合，且$M$为左消幺半群。令$P=\left(p_{\lambda j}\right)$为$\Lambda\times I$-矩阵，其元素均为$M$的单位。在集合$I\times M\times\Lambda$上，定义运算

$$(i,a,\lambda)(j,b,\mu)=\left(i,ap_{\lambda j}b,\mu\right)。$$

关于上面的运算，$I\times M\times\Lambda$构成强rpp半群，称为$M$上关于夹心矩阵(sandwich matrix) $P$的Rees矩阵半群，并记为$\mathcal{M}(M;I,\Lambda;P)$。我们称同构于某左消幺半群上的Rees矩阵半群的强rpp半群为完全$\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群(关于完全$\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群，参见[3] [4])。

**引理1.2** ([2] [5]) 令$S=\mathcal{M}(M;I,\Lambda;P)$为左消幺半群$M$上关于夹心矩阵(sandwich matrix) $P$的Rees矩阵半群。则

(1) $(i,a,\lambda)$为幂等元当且仅当$a=p_{\lambda i}^{-1}$；

(2) $\mathrm{Re}g(S)$ ($S$的所有正则元组成的集合)$=\left\{(i,a,\lambda)\in S:a为M的单位\right\}$，且构成$S$的子半群；

(3) $(i,a,\lambda)^0=\left(i,p_{\lambda i}^{-1},\lambda\right)$；

(4) $(i,a,\lambda)\overline{\mathcal{H}}(j,b,\mu)$当且仅当$i=j,\lambda=\mu$。

文[2]中，Guo-Guo-Shum指出：rpp半群为超rpp半群当且仅当它为一些完全$\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群的半格。

## 2. 主要结论

本文采用文献[6]中的概念和术语，为方便计，用叙述“令$S=(Y;S_\alpha)$为超rpp半群”表示“$S$为超rpp半群，且$S$为完全$\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群$S_\alpha(\alpha\in Y)$的半格”。

**引理2.1** 超rpp半群满足正则性条件(即，其正则元集构成子半群)，从而超rpp半群的正则元构成完全正则子半群。

**证明** 令$S=(Y;S_\alpha)$为超rpp半群。为证：$S$满足正则性条件，仅需证：$S$的幂等元乘积为正则元。为此，设$e$，$f$分别为$S_\alpha$和$S_\beta$的幂等元，则$ef\in S_{\alpha\beta}$，进而$(ef)^0$为$S_{\alpha\beta}$中的幂等元。注意到，$ef=ef\cdot f$，

我们有 $(ef)^0=(ef)^0 f$，以致于 $f(ef)^0\le f$，从而 $f(ef)^0$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的幂等元。另一方面，不难知道，$(ef)^0 e\in S_{\alpha\beta}$，于是 $\left((ef)^0 e\right)^0$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的幂等元。而 $(ef)^0 e=(ef)^0 e\cdot e$，现在 $\left((ef)^0 e\right)^0=\left((ef)^0 e\right)^0 e$，进而 $e\left((ef)^0 e\right)^0\le e$，这样 $e\left((ef)^0 e\right)^0$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的幂等元。故 $ef=(ef)^0 e\cdot f(ef)^0=(ef)^0\cdot e\left((ef)^0 e\right)^0\cdot f(ef)^0$，再据引理 1.2 (2)，$ef$ 为 $S_{\alpha\beta}$ 的正则元。这样，证明了：$S$ 的幂等元的乘积为正则元。

注意到，完全 $\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群的正则元组成完全单半群。不难知道，超 rpp 半群的正则元都是完全的，从而超 rpp 半群的正则元构成完全正则子半群。

基于引理 2.1，再据([7], Proposition II. 6.2, p. 89)，下面命题显然。

**命题 2.2** 令 $S=(Y;S_\alpha)$ 为超 rpp 半群，则

(1) $C(S)=\bigcup_{\alpha\in Y}C(S_\alpha)$；

(2) 对于任意的 $e\in E(S)$ （$S$ 的幂等元集），$C(eSe)=C(eC(S)e)$。

文[7]中，Petrich-Reilly 研究了中心完全正则半群(central completely regular semigroup)。类似地，定义中心超 rpp 半群。

**定义 2.3** 超 rpp 半群 $S$ 称为中心的(central)，如果任意两个幂等元的乘积都包含在其所在的 $\tilde{\mathcal{H}}$-类的中心内。

下面的命题给出了中心超 rpp 半群的一些性质，它推广了([7], Theorem II. 6.4, p. 90)。

**命题 2.4** 令 $S=(Y;S_\alpha)$ 为超 rpp 半群，则以下各款等价：

(1) $S$ 是中心的；

(2) 对于任意的 $\alpha\in Y$，$S_\alpha$ 是中心的；

(3) 对于任意的 $e\in E(S)$，$C(S)\cap\tilde{H}_e$ 包含在 $\tilde{H}_e$ 的中心内，此处 $\tilde{H}_e$ 为包含幂等元 $e$ 的 $\tilde{\mathcal{H}}$-类。

(4) $S$ 满足恒等式：$(a^0x^0a)(x^0a^0)^0=(a^0x^0)^0(ax^0a^0)$。

**证明** 据([1], Proposition6.9)的证明，$\mathcal{L}_S^*=\mathcal{L}_{S_\alpha}^*$，进而 $\tilde{\mathcal{H}}=\tilde{\mathcal{H}}_{S_\alpha}$。再据定义 2.3，不难知道，$(1)\Leftrightarrow(2)\Leftrightarrow(3)$ 显然。

$(3)\Rightarrow(4)$ 令 $a\in S_\alpha$，$x\in S_\beta$，则 $ax\in S_{\alpha\beta}$。由于 $\mathcal{L}^*$ 为右同余，有

$$(a^0x^0)^0a^0\mathcal{L}^*a^0x^0a^0\mathcal{L}^*(a^0x^0a^0)^0。$$

注意到，$\tilde{\mathcal{H}}$ 在正则元上恰为 $\mathcal{H}$。再据引理 2.1，有 $(x^0a^0)^0=(x^0a^0)^{-1}(x^0a^0)=(x^0a^0)(x^0a^0)^{-1}$，其中 $(x^0a^0)^{-1}$ 是 $x^0a^0$ 在 $\mathcal{H}$-类中的逆元。另外，据引理 1.2，含幂等元 $(a^0x^0a^0)^0$ 的 $S$ 的 $\tilde{\mathcal{H}}$-类为 $(a^0x^0a^0)^0S_{\alpha\beta}(a^0x^0a^0)^0$。从而

$$\begin{aligned}(a^0x^0a)(x^0a^0)^0&=a^0x^0a^0aa^0x^0a^0(x^0a^0)^{-1}\\&=(a^0x^0a^0)\cdot(a^0x^0a^0)^0a(a^0x^0a^0)^0\cdot a^0x^0a^0(x^0a^0)^{-1}\\&=(a^0x^0)^0(a^0x^0a^0)\cdot(a^0x^0a^0)^0a(a^0x^0a^0)^0(a^0x^0a^0)(x^0a^0)^{-1}\\&=(a^0x^0)^0a^0(a^0x^0a^0)^0\cdot a(a^0x^0a^0)^0\cdot a^0x^0a^0a^0x^0a^0(x^0a^0)^{-1}\\&=(a^0x^0)^0aa^0x^0a^0x^0a^0(x^0a^0)^{-1}\\&=(a^0x^0)^0ax^0a^0(x^0a^0)^0\\&=(a^0x^0)^0ax^0a^0\end{aligned}$$

$(4)\Rightarrow(2)$ 令 $e,f\in E(S_\alpha)$，且 $a\in\bar{H}_{ef}$，则 $a^0=(ef)^0$。据([7], LemmaII. 4.4, p. 75)，知 $(ef)^{-1}=(ef)^0(fe)^0(ef)^0=a^0(ef)^0a^0$。注意到，$S_\alpha$ 的所有正则元构成完全单半群。易知，$\left(a^0(fe)^0\right)^0\mathcal{R}a^0(fe)^0\mathcal{R}a^0\mathcal{L}(fe)^0a^0\mathcal{L}\left((fe)^0a^0\right)^0$。从而

$$\begin{aligned}(ef)^{-1}a&=a^0(fe)^0a^0\cdot a=a^0(fe)^0a\cdot a^0\\&=a^0(fe)^0\cdot a\cdot a^0\left((fe)^0a^0\right)^0=a^0(fe)^0\cdot a\cdot\left((fe)^0a^0\right)^0\\&=\left(a^0(fe)^0\right)^0a(fe)^0a^0=\left(a^0(fe)^0\right)^0a^0a(fe)^0a^0\\&=a^0a(fe)^0a^0=a(fe)^0a^0=a(ef)^{-1}\end{aligned},$$

进而

$$\begin{aligned}ef\cdot a&=ef\cdot aa^0=ef\cdot a(ef)^0=ef\cdot a\cdot(ef)^{-1}ef\\&=ef\cdot(ef)^{-1}a\cdot ef=(ef)^0a\cdot ef=a^0a\cdot ef=a\cdot ef\end{aligned},$$

于是 $S_\alpha$ 为中心的。

**定义 2.5** 超 rpp 半群 $S$ 称为扩交换的(overabelian)，如果 $S$ 的每一个 $\bar{\mathcal{H}}$-类都是交换幺半群。

据定义，易知，扩交换超 rpp 半群是中心的。不难看出，扩交换超 rpp 半群是扩交换完全正则半群的推广。并且，扩交换超 rpp 半群为扩交换完全正则半群，当且仅当它是正则的。下面给出扩交换超 rpp 半群的一个特征。

**命题 2.6** 令 $S=(Y;S_\alpha)$ 为超 rpp 半群，则 $S$ 为扩交换的当且仅当 $S$ 满足恒等式：$(ax)^0a(ax)^0x(ax)^0=(ax)^0x(ax)^0a(ax)^0$。

**证明** 设 $S$ 为扩交换超 rpp 半群。令 $a\in S_\alpha$，$x\in S_\beta$，则 $ax\in S_{\alpha\beta}$，进而 $(ax)^0\in S_{\alpha\beta}$，再据引理 1.2，$(ax)^0a(ax)^0$，$(ax)^0x(ax)^0$ 在同一个 $\bar{\mathcal{H}}$-类中，从而

$$(ax)^0a(ax)^0xa(ax)^0=(ax)^0a(ax)^0(ax)^0x(ax)^0=(ax)^0x(ax)^0(ax)^0a(ax)^0=(ax)^0x(ax)^0a(ax)^0。$$

反之，设 $S$ 满足恒等式：$(ax)^0a(ax)^0x(ax)^0=(ax)^0x(ax)^0a(ax)^0$。对于任意两个属于同一 $\bar{\mathcal{H}}$-类的元素 $a,b$，显然有 $(ab)^0=a^0=b^0$，进而

$$ab=a^0aa^0b^0bb^0=(ab)^0a(ab)^0(ab)^0b(ab)^0=(ab)^0b(ab)^0(ab)^0a(ab)^0=ba。$$

从而 $S$ 为扩交换超 rpp 半群。

如[1]，称半群 $S$ 为富足半群(abundant semigroup)，如果 $S$ 的每个 $\mathcal{L}^*$-类和每个 $\mathcal{R}^*$-类都含幂等元；称 $S$ 为超富足半群(superabundant semigroup)，如果它的每个 $\mathcal{H}$-类都含有幂等元。显然超富足半群是富足半群。关于超富足半群，读者可参见[1]。当 $S=(Y;S_\alpha)$ 为扩交换超 rpp 半群时，则每个 $S_\alpha$ 都是消去幺半群上的 Rees 矩阵半群，再据([1], Theorem4.9,Corollary5.2)，$S_\alpha$ 为完全 $\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群(completely $\mathcal{J}^{(\ell)}$-simple semigroup)，从而 $S$ 为完全 $\mathcal{J}^{(\ell)}$-单半群的半格。这样，下面的问题就很自然。

**问题 2.7** 是否每个扩交换超 rpp 半群都是超富足半群？

## 基金项目

国家自然科学基金(11361027)，江西省研究生创新基金(YC2014-S160)和江西省教育厅科研基金资助项目。

## 参考文献 (References)


[1] Fountain, J.B. (1982) Abundant Semigroups. *Proceedings of London Mathematical Society*, **44**, 103-129.

[2] Guo, X.J., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2010) Super Rpp Semigroups. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, **41**, 505-533. http://dx.doi.org/10.1007/s13226-010-0030-0

[3] Guo, J.Y., Guo, X.J. and Ding, J.Y. (2015) Completely $\mathcal{J}^{(\ell)}$-Simple Semigroups. *Advances in Mathematics* (*China*), **44**, 710-718.

[4] Guo, J.Y., Guo, X.J. and Ding, J.Y. (2015) Free Completely $\mathcal{J}^{(\ell)}$-Simple Semigroups. *Acta Mathematica Sinica* (*English Series*), **31**, 1086-1096. http://dx.doi.org/10.1007/s10114-015-4117-8

[5] Guo, X.J., Guo, Y.Q. and Shum, K.P. (2008) Rees Matrix Theorem for $\mathcal{D}^{(\ell)}$-Simple Strongly Rpp Semigroups. *Asian-European Journal of Mathematics*, **1**, 215-223. http://dx.doi.org/10.1142/S1793557108000205

[6] Howie, J.M. (1976) An Introduction to Semigroup Theory. Academic Press, London.

[7] Petrich, M. and Reilly, N.R. (1999) Completely Regular Semigroups. John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto.