Pure Mathematics 理论数学, 2016, 6(6), 496-526
Published Online November 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66068

Hans汉斯

Research on the Implementation of the Optimal Implementation of the Multi-Asset Option

Xiaoqing Wu

College of Science, Southwest Petroleum University, Chengdu Sichuan
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

Received: Nov. 10th, 2016; accepted: Nov. 24th, 2016; published: Nov. 30th, 2016

Abstract

In this paper, we study the problem of determining the optimal implementation boundary of multi-asset option, and establish a mathematical model of multidimensional Black-Scholes equation with singular inner boundary function vector $s=s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t)),0<t<T$. In multi-dimension region $\Omega\cong\{(s,t)\mid s\in R_+^m,t\in(0,T)\}$, the option price function is an unknown function. The exact solution $u(s,t)$ of the mathematical model is obtained by using the matrix theory and the generalized characteristic function method. And the exponential function vector expression of the singular inner boundary is obtained $(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$. It is demonstrated that: when any $t\in(0,T)$, the maximum value $\max_{s\in R_+^m} u(s,t)$ of the solution $u(s,t)$ of the region $R_+^m:0<s_j<\infty, j=1,\cdots,m$ is obtained on the singular boundary, namely $u(s(t),t)=\max_{s\in R_+^m} u(s,t)$. The free boundary problem A and free boundary problem B of Black-Scholes equation are solved. The free boundary of problem A and B is expressed by the function vector $R_+^m:0<s_j<\infty, j=(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)1,\cdots,m$. The free boundary of the problem A and problem B coincides with the singular inner boundary. So the vector expression of the exponential function is the best implementation of the boundary. The exponential function vector $(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$ satisfies the condition $\omega_k\equiv-\frac{1}{s_k(t)}\frac{ds_k(t)}{dt}, k=1,\cdots,m$; and ω_k is calculated by $\omega_k=\sum_{j=1}^{k} b_{kj}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nj}\right]$; the formula shows that ω_k is only determined by all the parameters appearing in the multidimensional Black-Scholes equation.

文章引用: 吴小庆. 多资产期权确定最佳实施边界问题的研究[J]. 理论数学, 2016, 6(6): 496-526.
http://dx.doi.org/10.12677/pm.2016.66068

Keywords

Multi-Asset Option, Best Implementation Boundary, Free Boundary Problem, Multi-Dimension Black-Scholes Equation

多资产期权确定最佳实施边界问题的研究

吴小庆

西南石油大学理学院，四川 成都
Email: wuxiaoqing_swpu@163.com

收稿日期：2016年11月10日；录用日期：2016年11月24日；发布日期：2016年11月30日

摘　要

本文研究多资产期权确定最佳实施边界的问题，建立了多维Black-Scholes方程在多维区域 $\Omega \cong \left\{(s,t) \mid s \in R_+^m, t \in (0,T)\right\}$ 具有奇异内边界函数向量 $s = s(t) = (s_1(t), \cdots, s_m(t)), 0 < t < T$ 的数学模型，期权价格函数为未知函数。应用矩阵理论和广义特征函数法获得了期权价格函数的精确解 $u(s,t)$。并获得了奇异内边界的指数函数向量表达式 $(s_1(t), \cdots, s_m(t)) = \left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)}, \cdots, \vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$。证明了：当任意 $t \in (0,T)$，数学模型的解 $u(s,t)$ 在奇异内边界取区域 $R_+^m: 0 < s_j < \infty, j = 1, \cdots, m$ 中的最大值，即 $u(s(t),t) = \max_{s \in R_+^m} u(s,t), t \in (0,T)$；同时获得了 Black-Scholes方程的自由边界问题A和自由边界问题B的精确解和其自由边界的指数函数向量表达式 $(s_1(t), \cdots, s_m(t)) = \left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)}, \cdots, \vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$，问题A和问题B的自由边界与奇异内边界重合。从而指数函数向量表达式 $s(t) = (s_1(t), \cdots, s_m(t)) = \left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)}, \cdots, \vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$ 为最佳实施边界。指数函数向量 $(s_1(t), \cdots, s_m(t)) = \left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)}, \cdots, \vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$ 满足条件 $\omega_k \equiv -\frac{1}{s_k(t)} \frac{ds_k(t)}{dt}, k = 1, \cdots, m$；且有 ω_k 的计算公式 $\omega_k = \sum_{j=1}^{k} b_{kj} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{j} \left(\frac{1}{2} a_{nn} + q_n - r\right) c_{nj}\right]$；公式表明 $\omega_k, k = 1, \cdots, m$ 由多维Black-Scholes方程中出现的所有参数 a_{kj}，q_j，r 唯一确定。

关键词

多资产期权，最佳实施边界，自由边界问题，多维Black-Scholes方程

1. 引言

期权是风险管理的核心工具，姜礼尚[1]对期权定价理论作了系统深入的阐述，利用偏微分方程理论和方法对期权理论作深入的定性和定量分析，特别对美式期权展开了深入的讨论。美式期权合约中具有提前实施的条款，因此最佳实施边界的确定对于美式期权具有特殊意义。在美式期权定价研究中，姜礼尚[1]建立了 Black-Scholes 方程的自由边界问题，对最佳实施边界 $s = s(t), 0 < t < T$ 作了很多深入的研究，

得到很多重要的结论。其中包括 $s(T)$ 的位置，$s(t)$ 的单调性，$s(t)$ 的上下界以及 $s(t)$ 的凸性等，并给出了 $s(t)$ 在 $t=T$ 附近的渐近表达式。这些结果增加了对最佳实施边界的认识，对美式期权定价的数值计标产生了重要的影响。期权定价问题历来是金融经济学中的重要研究课题之一[1]-[8]，多年来，众多经济学者与研究人员对这一问题进行不断深入的研究，但是这些研究大多是围绕具有单个资产的期权进行的。多资产期权在现代金融交易市场中占有重要的地位，研究多资产(或单个资产)期权定价模型大多是围绕数值解法进行的[9]-[21]，姜礼尚[1]建立了关于期权价格函数 $V=V(s,t)=V(s_1,\cdots,s_m,t)$ 的多维 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}s_k s_j\frac{\partial^2 V}{\partial s_k\partial s_j}+\sum_{k=1}^{m}(r-q_k)s_k\frac{\partial V}{\partial s_k}-rV=0,(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^{\ m},0<t<T \tag{01}$$

其中矩阵 $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为实对称非负矩阵。研究关于方程(01)的多资产期权的数学模型。

由于

$$\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\frac{\partial}{\partial s_j}\right)V=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}s_k s_j\frac{\partial^2 V}{\partial s_k\partial s_j}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}a_{kk}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)V \tag{02}$$

故方程(01)可改记为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\frac{\partial}{\partial s_j}\right)V+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\frac{\partial V}{\partial s_k}-rV=0 \tag{03}$$

本文研究多资产期权确定最佳实施边界的问题，建立了多维 Black-Scholes 方程在多维区域 $\Omega\cong\left\{(s,t)\mid s\in R_+^m,t\in(0,T)\right\}$ 具有奇异内边界函数向量 $s=s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t)),0<t<T$ 的数学模型，期权价格函数 $u(s,t)$ 为未知函数。应用矩阵理论和广义特征函数法获得了数学模型的精确解 $u(s,t)$。并获得了奇异内边界的指数函数向量表达式 $s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m \mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$。证明了：当任意 $t\in(0,T)$，数学模型的解 $u(s,t)$ 在奇异内边界取 $R_+^m:0<s_j<\infty,j=1,\cdots,m$ 中的最大值，即 $u(s(t),t)=\max\limits_{s\in R_+^m}u(s,t),t\in(0,T)$；同时获得了 Black-Scholes 方程的自由边界问题 **A** 和自由边界问题 **B** 的精确解和其自由边界的指数函数向量表达式 $(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m \mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$，问题 **A** 和问题 **B** 的自由边界与奇异内边界重合。从而指数函数向量表达式 $s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m \mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$ 为最佳实施边界。指数函数向量 $(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m \mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$，满足条件 $\omega_k\equiv-\frac{1}{s_k(t)}\frac{\mathrm{d}s_k(t)}{\mathrm{d}t},k=1,\cdots,m$；且有 ω_k 的计算公式 $\omega_k=\sum_{j=1}^{k}b_{kj}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nj}\right]$；公式表明 $\omega_k,k=1,\cdots,m$ 由多维 Black-Scholes 方程中出现的所有参数 a_{kj}，q_j，r 唯一确定。

2. 主要结果

2.1. 多资产期权的数学模型 I 的研究

引入记号

$$\Omega\cong\left\{(s,t)\mid s\in R_+^m,t\in(0,T)\right\},\Omega_-=\left\{(s,t)\mid s\in \mathrm{E}_-(t),t\in(0,T)\right\},\Omega_+=\left\{(s,t)\mid s\in \mathrm{E}_+(t),t\in(0,T)\right\}$$

$$\mathrm{E}_-(t):0<s_j<s_j(t),j=1,\cdots,m;\mathrm{E}_+(t):s_j(t)<s_j<\infty,j=1,\cdots,m;\overline{\mathrm{E}}_-(t):0\le s_j\le s_j(t),j=1,\cdots,m;$$

$$\overline{\mathrm{E}}_+(t):s_j(t)\le s_j<\infty,j=1,\cdots,m.$$

数学模型 I (多维 Black-Scholes 方程具有奇异内边界的终值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\dfrac{\partial}{\partial s_j}\right)u+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\dfrac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\dfrac{\partial u}{\partial s_k}-ru=-f(s,t),s=(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^m,0<t<T & (1)\\ u(s,T)=\varphi(s) & (2)\\ \lim\limits_{s\to0^+}|u|<\infty,\lim\limits_{s\to\infty}|u|<\infty & (3)\end{cases}$$

数学模型 I 是关于多资产期权的数学模型，它是多维 Black-Scholes 方程在区域 Ω 具有奇异内边界 $s(t)\cong(s_1(t),\cdots,s_k(t))$， $0<t<T$ 的终值问题，未知函数 $u(s,t)$ 为期权价格函数。

其中：方程的自由项为

$$f(s,t)=\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k-s_k(t)) \tag{4}$$

$\delta(s_k-s_k(t))$ 为狄拉克 δ -函数；$\delta(s-s(t))$ 为 m 维狄拉克 δ -函数；$s(t)\cong(s_1(t),\cdots,s_k(t))$, $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为实对称非负矩阵。

数学模型 I.1 (多维 Black-Scholes 方程的终值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\dfrac{\partial}{\partial s_j}\right)u+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\dfrac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\dfrac{\partial u}{\partial s_k}-ru=0,s=(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^m,0<t<T\\ u(s,T)=\varphi(s)\\ \lim\limits_{s\to0^+}|u|<\infty,\lim\limits_{s\to\infty}|u|<\infty\end{cases} \tag{5}$$

数学模型 I.2 (多维 Black-Scholes 方程具有奇异内边界和齐次终值条件的终值问题):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\dfrac{\partial}{\partial s_j}\right)u+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\dfrac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\dfrac{\partial u}{\partial s_k}-ru=-f(s,t),s=(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^m,0<t<T\\ u(s,T)=0\\ \lim\limits_{s\to0}|u|<\infty,\lim\limits_{s\to\infty}|u|<\infty\end{cases} \tag{6}$$

2.1.1. Black-Scholes 方程数学模型 I 的求解

记偏微分算子

$$L=\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\frac{\partial}{\partial s_j}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\frac{\partial}{\partial s_k}-r \tag{7}$$

先考虑 m 维 Euler 方程在半无界区域 R_+^m 的**特征值问题 I**

$$\begin{cases}LE(s)=\dfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\dfrac{\partial E(s)}{\partial s_j}\right)+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\dfrac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\dfrac{\partial E(s)}{\partial s_k}-rE(s)=-\lambda E(s),(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^m & (8)\\ \lim\limits_{s\to0}|\chi_sE(s)|<\infty,\lim\limits_{s\to\infty}|\chi_sE(s)|<\infty & (9)\end{cases}$$

为求解特征值问题 I 我们建立了引理 1.1~引理 1.6。

引理 1.1： 设 $A=\left(a_{kj}\right)_{m\times m}\in R^{m\times m}$ 为正定矩阵，则存在正线下三角矩阵 $B=\left(b_{kj}\right)_{m\times m}\in R^{m\times m}$ 满足 $A=BB^{\mathrm{T}}$ 且分解是唯一的；且有

1) 正线下三角矩阵 B 的行列式 $|B|=\prod_{j=1}^{m}b_{jj}>0$， $|A|=|B|^2$； $b_{kj}=0,k<j,\ j=2,\cdots,m$；

2) 由 $\left(b_{kj}\right)_{m\times m}$ 唯一确定 $\left(a_{kj}\right)_{m\times m}$；由 $\left(a_{kj}\right)_{m\times m}$ 唯一确定 $\left(b_{kj}\right)_{m\times m}$；

3) 记 $\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=C=\left(c_{kj}\right)_{m\times m}$， 则 C 为正线上三角矩阵，

$|C|=\prod_{j=1}^{m}c_{jj}=\prod_{j=1}^{m}b_{jj}^{-1}>0,c_{kj}=0,k>j,\ j=1,\cdots,m-1$；由 $\left(a_{kj}\right)_{m\times m}$ 唯一确定 $\left(c_{kj}\right)_{m\times m}$；

4) 记 $I\left(k;X\right)\cong\sum_{n=k}^{m}c_{kn}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}x_j,k=1,\cdots,m$， $X=\left(x_1,\cdots,x_m\right)^{\mathrm{T}}\in R^m$；则当 $X\neq0$ 时，有 $\sum_{j=1}^{m}x_jI\left(j;X\right)>0$。从而当 $X=\left(x_1,\cdots,x_m\right)^{\mathrm{T}}$， $x_j>0,\ j=1,\cdots,m$， 有 $I\left(k;X\right)>0,k=1,\cdots,m$； $x_j<0,\ j=1,\cdots,m$， 有 $I\left(k;X\right)<0,k=1,\cdots,m$。

证明： 由矩阵理论[22]即知存在正线下三角矩阵 $B=\left(b_{kj}\right)_{m\times m}\in R^{m\times m}$ 满足 $A=BB^{\mathrm{T}}$ 且分解是唯一的。由 $A=BB^{\mathrm{T}}$ 有 $|A|=|B|^2$。

正线下三角矩阵 $B=\left(b_{kj}\right)_{m\times m}$，正线下三角矩阵 B 的行列式 $|B|=\prod_{j=1}^{m}b_{jj}>0$，且 $b_{kj}=0,k<j,\ j=2,\cdots,m$；$B$ 的转置矩阵 B^{T} 为正线上三角矩阵。B^{T} 的逆矩阵 C 为正线上三角矩阵。

$|C|=\prod_{j=1}^{m}c_{jj}=\prod_{j=1}^{m}b_{jj}^{-1}>0,c_{kj}=0,k>j,\ j=1,\cdots,m-1$。

下证 **4)** 由于 C 为正线上三角矩阵，即有 $\sum_{n=k}^{m}c_{kn}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}x_j=\sum_{n=1}^{m}c_{kn}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}x_j$ 和

$\left[\sum_{j=1}^{1}c_{j1}x_j,\sum_{j=1}^{2}c_{j2}x_j\cdots,\sum_{j=1}^{m}c_{jm}x_j\right]^{\mathrm{T}}=\left[\sum_{j=1}^{m}c_{j1}x_j,\sum_{j=1}^{m}c_{j2}x_j\cdots,\sum_{j=1}^{m}c_{jm}x_j\right]^{\mathrm{T}}$；从而有

$$\begin{aligned}I\left(k;X\right)&\cong\sum_{n=k}^{m}c_{kn}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}x_j=\sum_{n=1}^{m}c_{kn}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}x_j=\left[c_{k1},\cdots,c_{kk}\cdots,c_{km}\right]\left[\sum_{j=1}^{1}c_{j1}x_j,\sum_{j=1}^{2}c_{j2}x_j\cdots,\sum_{j=1}^{m}c_{jm}x_j\right]^{\mathrm{T}}\\&=\left[c_{k1},\cdots,c_{kk}\cdots,c_{km}\right]\left[\sum_{j=1}^{m}c_{j1}x_j,\sum_{j=1}^{m}c_{j2}x_j\cdots,\sum_{j=1}^{m}c_{jm}x_j\right]^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$X=\left(x_1,\cdots,x_m\right)^{\mathrm{T}}$ 为列向量，应用分块矩阵的乘法运算即有 $\left[\sum_{j=1}^{m}c_{j1}x_j,\sum_{j=1}^{m}c_{j2}x_j\cdots,\sum_{j=1}^{m}c_{jm}x_j\right]^{\mathrm{T}}=C^{\mathrm{T}}X$

从而有

$$I\left(k;X\right)=\left[c_{k1},c_{k2}\cdots,c_{km}\right]C^{\mathrm{T}}X,k=1,\cdots,m \tag{10}$$

由于 $CC^{\mathrm{T}}=\left(\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right)\left(\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\right)\left(B^{-1}\right)=\left(BB^{\mathrm{T}}\right)^{-1}=A^{-1}$ 即有

$$\begin{bmatrix}I\left(1;X\right)\\I\left(2;X\right)\\\vdots\\I\left(m;X\right)\end{bmatrix}=CC^{\mathrm{T}}X=A^{-1}X \tag{11}$$

$A=\left(a_{kj}\right)_{m\times m}$ 为正定矩阵，则 A^{-1} 为正定矩阵， $X^{\mathrm{T}}A^{-1}X$ 为正定二次齐式，从而有

$$X^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} I(1;X) \\ I(2;X) \\ \vdots \\ \vdots \\ I(m;X) \end{bmatrix}=X^{\mathrm{T}}A^{-1}X>0,\ X\neq 0 \tag{12}$$

$$\sum_{j=1}^{m}x_jI(j;X)>0,\ X\neq 0 \tag{13}$$

由 X 的任意性，分别令 $X=y_p\varepsilon_p,\ y_p\neq 0,\ p=1,\cdots,m$，

其中 $\varepsilon_1=(1,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\varepsilon_m=(0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$。

由(13)式即有

$$y_p\sum_{n=1}^{m}c_{kn}c_{pn}y_p>0,\ p=1,\cdots,m$$

即 $\sum_{n=1}^{m}c_{kn}c_{pn}y_p^2>0,\ y_p\neq 0,\ p=1,\cdots,m$

从而

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}c_{kn}c_{pn}y_p^2>0,\ y_p\neq 0 \tag{14}$$

再记 $y_p^2\cong x_p,\ p=1,\cdots,m$；有 $x_p>0,\ p=1,\cdots,m$ 和

$$\sum_{p=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}c_{kn}c_{pn}y_p^2=\sum_{p=1}^{m}\sum_{n=1}^{m}c_{kn}c_{pn}x_p=I(k;X),\ k=1,\cdots,m \tag{15}$$

由(14)，(15)两式即有：当 $X=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$， $x_j>0,\ j=1,\cdots,m$，有 $I(k;X)>0,\ k=1,\cdots,m$；显然也有：当 $X=(x_1,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$， $x_j<0,\ j=1,\cdots,m$，有 $I(k;X)<0,\ k=1,\cdots,m$。引理证毕。

记 $\begin{bmatrix} \ln s_1 \\ \vdots \\ \ln s_m \end{bmatrix}\cong \ln s=\alpha\in R_+^m$，作 R_+^m 到 R_+^m 的线性变换

$$\Phi(\alpha)=B^{-1}\alpha\cong\ln\eta=\begin{bmatrix} \ln\eta_1 \\ \vdots \\ \ln\eta_m \end{bmatrix}\in R_+^m,\ \ln s=B\ln\eta \tag{16}$$

$$\text{记 } E(s)=E^*(\ln s)=E^*(B\ln\eta)\cong Y(\eta) \tag{17}$$

引理 1.2： 若 $\ln s=B\ln\eta$，则有

$$\nabla_\eta=B^{\mathrm{T}}\nabla_s \tag{18}$$

其中 $\nabla_\eta\cong\begin{bmatrix} \eta_1\dfrac{\partial}{\partial\eta_1} \\ \vdots \\ \eta_m\dfrac{\partial}{\partial\eta_m} \end{bmatrix},\nabla_s\cong\begin{bmatrix} s_1\dfrac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ s_m\dfrac{\partial}{\partial s_m} \end{bmatrix}$ 为向量变系数偏微分算子。

证明(16)式即

$$\begin{bmatrix} \ln s_1 \\ \vdots \\ \ln s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{p=1}^{m} b_{1p} \ln \eta_p \\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{m} b_{mp} \ln \eta_p \end{bmatrix} \tag{19}$$

由(17)式即有

$$E(s) = E^*(\ln s_1, \cdots, \ln s_m) = E^*\left(\sum_{p=1}^{m} b_{1p} \ln \eta_p, \cdots, \sum_{p=1}^{m} b_{mp} \ln \eta_p\right) = Y(\eta) \tag{20}$$

由复合函数的求导法则

$$\eta_k \frac{\partial Y(\eta)}{\partial \eta_k} = \frac{\partial Y(\eta)}{\partial \ln \eta_k} = b_{1k} \frac{\partial E(s)}{\partial \ln s_1} + \cdots + b_{mk} \frac{\partial E(s)}{\partial \ln s_m} = [b_{1k}, \cdots, b_{mk}] \begin{bmatrix} s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ s_m \frac{\partial}{\partial s_m} \end{bmatrix} E(s) \tag{21}$$

从而 $\begin{bmatrix} \eta_1 \frac{\partial}{\partial \eta_1} \\ \vdots \\ \eta_m \frac{\partial}{\partial \eta_m} \end{bmatrix} Y(\eta) = \begin{bmatrix} b_{11}, \cdots, b_{m1} \\ \vdots \\ b_{1m}, \cdots, b_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ s_m \frac{\partial}{\partial s_m} \end{bmatrix} E(s) = B^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ s_m \frac{\partial}{\partial s_m} \end{bmatrix} E(s)$

即(18)式成立。引理证毕。

m 维 Euler 方程在半无界区域 R_+^m 的特征值问题 II

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\eta_k^2 \frac{\partial^2 Y(\eta)}{\partial \eta_k^{\ 2}} - d_k \eta_k \frac{\partial Y(\eta)}{\partial \eta_k} + \left(\lambda_k - \frac{r}{m}\right) Y(\eta)\right] = 0, \eta = (\eta_1, \cdots, \eta_m) \in R_+^m & (22) \\ \lim_{\eta \to 0} \left|\chi_\eta Y(\eta)\right| < \infty, \lim_{\eta \to \infty} \left|\chi_\eta Y(\eta)\right| < \infty & (23) \end{cases}$$

其中 $\lambda = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k$，$\chi_\eta = \prod_{k=1}^{m} \eta_k^{-\frac{2d_k+1}{2}}, d_k = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a_{jj} + q_j - r\right) c_{jk}, k = 1, \cdots, m$ (24)

引理 1.3： 若 $\ln s = B \ln \eta$，则特征值问题 I 中方程(8)与特征值问题 II 中方程(22)等价。

证明： 由 $A = BB^{\mathrm{T}}$，有

$$\begin{aligned} &\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}\left(s_k \frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j \frac{\partial}{\partial s_j}\right) E(s) \\ &= \begin{bmatrix} s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ s_m \frac{\partial}{\partial s_m} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} A \begin{bmatrix} s_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \\ \vdots \\ s_m \frac{\partial}{\partial s_m} \end{bmatrix} E(s) = \left(B^{\mathrm{T}} \nabla_s\right)^{\mathrm{T}} \left(B^{\mathrm{T}} \nabla_s\right) E(s) \end{aligned} \tag{25}$$

$$\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\frac{\partial}{\partial s_j}\right)E(s) \\ =\left(\nabla_\eta\right)^T\left(\nabla_\eta\right)Y(\eta)=\sum_{k=1}^{m}\eta_k{}^2\frac{\partial^2 Y(\eta)}{\partial \eta_k{}^2} \tag{26}$$

记 $C\cong\left(B^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$，由引理 1.1 矩阵 C 为正线上三角矩阵。

由(18)式有

$$C\begin{bmatrix}\eta_1\frac{\partial}{\partial\eta_1}\\ \vdots \\ \eta_m\frac{\partial}{\partial\eta_m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\frac{\partial}{\partial s_1}\\ \vdots \\ s_m\frac{\partial}{\partial s_m}\end{bmatrix} \tag{27}$$

由矩阵乘法

$$\begin{bmatrix}\sum_{p=1}^{m}c_{1p}\eta_p\frac{\partial}{\partial\eta_p}\\ \vdots \\ \sum_{p=1}^{m}c_{mp}\eta_p\frac{\partial}{\partial\eta_p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s_1\frac{\partial}{\partial s_1}\\ \vdots \\ s_m\frac{\partial}{\partial s_m}\end{bmatrix} \tag{28}$$

从而

$$s_k\frac{\partial}{\partial s_k}=\sum_{p=1}^{m}c_{kp}\eta_p\frac{\partial}{\partial\eta_p} \tag{29}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\frac{\partial E(s)}{\partial s_k}=\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)\sum_{p=1}^{m}c_{kp}\eta_p\frac{\partial}{\partial\eta_p}Y(\eta) \\ =\sum_{p=1}^{m}\eta_p\left[\sum_{k=0}^{m}c_{kp}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)\right]\frac{\partial}{\partial\eta_p}Y(\eta) \tag{30}$$

由于 C 为正线上三角矩阵有

$$\sum_{k=0}^{m}c_{kp}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)=\sum_{k=0}^{p}c_{kp}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)$$

记

$$d_p=\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{1}{2}a_{kk}+q_k-r\right)c_{kp},\ p=1,\cdots,m \tag{31}$$

即有

$$\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\frac{\partial E(s)}{\partial s_k}=-\sum_{p=1}^{m}d_p\eta_p\frac{\partial Y(\eta)}{\partial\eta_p} \tag{32}$$

由(26)，(32)两式即知方程(8)与方程(22)等价。引理证毕。

引理 1.4： 特征值问题 II 的特征值

$$\lambda=\lambda_\beta=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{\beta_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k{}^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2},\ \beta=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)\in R^m \tag{33}$$

所对应的特征函数为

$$Y(\eta)=Y_{\beta}(\eta)=\prod_{k=1}^{m}\eta_k^{\frac{1+2d_k}{2}}\eta_k^{i\beta_k} \tag{34}$$

且有

$$\chi_{\eta}=\prod_{k=1}^{m}\eta_k^{-\frac{1+2d_k}{2}},\ \chi_{\eta}Y(\eta)=\prod_{k=1}^{m}\eta_k^{i\beta_k} \tag{35}$$

证明：容易求解特征值问题 II：由分离变量法令

$$Y(\eta)=\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p) \tag{36}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\eta_k^{\ 2}\frac{\partial^2 Y_k(\eta_k)}{\partial\eta_k^{\ 2}}\prod_{p=1,p\neq k}^{m}Y_p(\eta_p)-d_k\eta_k\frac{\partial Y_k(\eta_k)}{\partial\eta_k}\prod_{p=1,p\neq k}^{m}Y_p(\eta_p)+\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)\right]=0 \tag{37}$$

再令

$$Y_k(\eta_k)=\eta_k^{\alpha_k},\ k\in\{1,\cdots,m\} \tag{38}$$

$$Y_k'(\eta_k)=\alpha_k\eta_k^{\alpha_k-1},\ Y_k''(\eta_k)=\alpha_k(\alpha_k-1)\eta_k^{\alpha_k-2}$$

$$\eta_k\frac{\partial Y_k(\eta_k)}{\partial\eta_k}=\alpha_k\eta_k^{\alpha_k}=\alpha_kY_k(\eta_k) \tag{39}$$

$$\eta_k^2\frac{\partial^2 Y_k(\eta_k)}{\partial\eta_k^{\ 2}}=\alpha_k(\alpha_k-1)\eta_k^{\alpha_k}=\alpha_k(\alpha_k-1)Y_k(\eta_k) \tag{40}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\alpha_k(\alpha_k-1)Y_k(\eta_k)\prod_{p=1,p\neq k}^{m}Y_p(\eta_p)-d_k\alpha_kY_k(\eta_k)\prod_{p=1,p\neq k}^{m}Y_p(\eta_p)+\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)\right]=0$$

$$\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{2}\alpha_k(\alpha_k-1)\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)-d_k\alpha_k\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)+\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)\right]=0 \tag{41}$$

$$\frac{1}{2}\alpha_k(\alpha_k-1)\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)-d_k\alpha_k\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)+\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)=0,\ \forall k\in\{1,\cdots,m\} \tag{42}$$

若(42)式成立则(41)式成立；特征函数

$$\prod_{p=1}^{m}Y_p(\eta_p)$$

不恒为零，由(42)推出

$$\frac{1}{2}\alpha_k^2-\left(\frac{1}{2}+d_k\right)\alpha_k+\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)=0,\ \forall k\in\{1,\cdots,m\} \tag{43}$$

$$\alpha_k=\left(\frac{1}{2}+d_k\right)\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}+d_k\right)^2-2\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)}$$

$$=\left(\frac{1}{2}+d_k\right)\pm i\sqrt{2\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)-\left(\frac{1}{2}+d_k\right)^2}$$

$$\alpha_k=\left(\frac{1}{2}+d_k\right)\pm i|\beta_k|$$

$$\left|\beta_k\right|=\sqrt{2\left(\lambda_k-\frac{r}{m}\right)-\left(\frac{1}{2}+d_k\right)^2}$$

$$\lambda_k=\lambda_{\beta_k}=\frac{\beta_k{}^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2},\ \beta_k\in R,\ \forall k\in\{1,\cdots,m\} \tag{44}$$

$$\lambda=\lambda_\beta=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{\beta_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2},\ \beta_k\in R \tag{45}$$

$$Y_k\left(\eta_k\right)=\eta_k^{\alpha_k}=\eta_k^{\frac{1+2d_k}{2}}\eta_k^{i\beta_k},\ \beta_k\in R,\ \forall k\in\{1,\cdots,m\} \tag{46}$$

$$Y\left(\eta\right)=\prod_{k=1}^{m}\eta_k^{\frac{1+2d_k}{2}}\eta_k^{i\beta_k} \tag{47}$$

$$\chi_\eta=\prod_{k=1}^{m}\eta_k^{-\frac{1+2d_k}{2}},\ \chi_\eta Y\left(\eta\right)=\prod_{k=1}^{m}\eta_k^{i\beta_k} \tag{48}$$

由(48)式即有(23)式成立。引理证毕。

由(16)和(17)式换回原变量即得特征值问题 I 的特征函数

$$\begin{aligned}&E_\beta\left(s\right)=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j},\\&\lambda=\lambda_\beta=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{\beta_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2},\ \beta=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)\in R^m\end{aligned} \tag{49}$$

且

$$\chi_s=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{-\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j},\ \chi_sE_\beta\left(s\right)=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{m}c_{jk}\ln s_j} \tag{50}$$

$$\lim_{s\to0}\left|\chi_sE_\beta\left(s\right)\right|=\lim_{s\to0}\left|\mathrm{e}^{i\sum_{j=1}^{m}\beta_k\sum_{j=1}^{m}c_{jk}\ln s_j}\right|<\infty,\ \lim_{s\to\infty}\left|\chi_sE_\beta\left(s\right)\right|=\lim_{s\to\infty}\left|\mathrm{e}^{i\sum_{j=1}^{m}\beta_k\sum_{j=1}^{m}c_{jk}\ln s_j}\right|<\infty \tag{51}$$

由(51)式即有(9)式成立。于是得到

引理 1.5： 特征值问题 I 的特征值

$$\lambda=\lambda_\beta=\sum_{k=1}^{m}\lambda_{\beta_k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2},\ \beta\in R^m \tag{52}$$

所对应的特征函数为

$$E_\beta\left(s\right)=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j},\ \beta\in R^m \tag{53}$$

引理 1.6： 特征值问题 I 的特征函数系 $E_\beta\left(s\right)=\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}$, $\beta\in R^m$ 是半无界区域 R_+^m 带

权函数 $\rho(s)=\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{m}\ln s_j}\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{-(1+2d_k)\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}$ 的完备正交系；正交关系即

$$\int_{R_+^m}E_\beta(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s=(2\pi)^m|B|\delta(\beta'-\beta),\ \beta'\in R^m,\ \beta\in R^m \tag{54}$$

证明：由于

$$\begin{aligned}&\int_{R_+^m}E_\beta(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s\\&=\int_{R_+^m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\right)\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{-i\beta'_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\right)\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{m}\ln s_j}\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{-(1+2d_k)\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{d}s\\&=\int_{R_+^m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{i(\beta_k-\beta'_k)\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\right)\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{m}\ln s_j}\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{55}$$

引入变量代换

$$\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j=y_k,\ k=1,\cdots,m \tag{56}$$

由于行列式

$$\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(s_1,\cdots,s_m)}\right|=\prod_{j=1}^{m}\left(c_{jj}\frac{1}{s_j}\right)=|B|^{-1}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{s_j}$$

即有变量替换的雅可比行列式

$$|J|=\left|\frac{\partial(s_1,\cdots,s_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|=\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_m)}{\partial(s_1,\cdots,s_m)}\right|^{-1}=|B|\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{s_j}\right)^{-1}\neq 0,\ s\in R_+^m \tag{57}$$

由多重积分变量替换公式，即有

$$\begin{aligned}\int_{R_+^m}E_\beta(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s&=\int_{R_+^m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{i(\beta_k-\beta'_k)\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\right)\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{m}\ln s_j}\mathrm{d}s\\&=\int_{R^m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{i(\beta_k-\beta'_k)y_k}\right)\left|\frac{\partial(s_1,\cdots,s_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}\right|\mathrm{e}^{-\sum_{j=1}^{m}\ln s_j}\mathrm{d}y\\&=\int_{R^m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{i(\beta_k-\beta'_k)y_k}\right)|B|\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{s_j}\right)^{-1}\left(\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{s_j}\right)\mathrm{d}y\\&=|B|\int_{R^m}\left(\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{i(\beta_k-\beta'_k)y_k}\right)\mathrm{d}y\\&=|B|\prod_{k=1}^{m}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i(\beta_k-\beta'_k)y_k}\mathrm{d}y_k\right)\\&=|B|(2\pi)^m\prod_{k=1}^{m}\delta(\beta'_k-\beta_k)\\&=|B|(2\pi)^m\delta(\beta'-\beta),\ \beta'\in R^m,\ \beta\in R^m\end{aligned}$$

$$\int_{R_+^m} E_\beta(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s = (2\pi)^m |B|\delta(\beta'-\beta),\ \beta'\in R^m,\ \beta\in R^m \tag{58}$$

(58)式即(54)式。引理证毕。

由引理 1.5 与引理 1.6 的结论可以引入广义特征函数法[23] [24]求解 数学模型 I。

不妨设解 $u\in C\left(R_+^m\times[0,T]\right)$，将其表为特征函数的积分形式

$$u(s,t) = \int_{R^m} U_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{59}$$

将上式两边乘以 $\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)$ 再关于变量 s 在 R_+^m 积分，利用正交关系(54)则有

$$\begin{aligned}\int_{R_+^m} u(s,t)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s &= \int_{R^m} U_\beta(t)\int_{R_+^m} E_\beta(s)\bar{E}_{\beta'}(s)\rho(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta \\ &= \int_{R^m} U_\beta(t)|B|\left(\prod_{k=1}^m 2\pi\delta(\beta_{k'}-\beta_k)\right)\mathrm{d}\beta \\ &= (2\pi)^m |B| U_{\beta'}(t)\end{aligned} \tag{60}$$

得到

$$U_\beta(t) = \frac{1}{(2\pi)^m |B|}\int_{R_+^m} u(s,t)\bar{E}_\beta(s)\rho(s)\mathrm{d}s,\ \beta\in R^m \tag{61}$$

将方程中的自由项 $f(s,t)$ 也表为特征函数的积分形式

$$f(s,t) = \prod_{k=1}^m \gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k - s_k(t)) = \int_{R^m} f_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{62}$$

由(61)即有

$$f_\beta(t) = \frac{1}{(2\pi)^m |B|}\int_{R_+^m}\left[\prod_{k=1}^m \gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k - s_k(t))\right]\bar{E}_\beta(s)\rho(s)\mathrm{d}s \tag{63}$$

应用 δ -函数的积分性质即得

$$f_\beta(t) = \frac{1}{(2\pi)^m |B|}\bar{E}_\beta(s(t))\rho(s(t))\prod_{k=1}^m \gamma_k(t)s_k^2(t) \tag{64}$$

含参变量积分与算子 L 的运算交换次序即有

$$Lu(s,t) = \int_{R^m} U_\beta(t)LE_\beta(s)\mathrm{d}\beta = -\int_{R^m} U_\beta(t)\lambda_\beta E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{65}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s,t) = \int_{R^m} U'_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{66}$$

由(2)即有

$$\varphi(s) = u(s,T) = \int_{R^m} U_\beta(T)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{67}$$

$$\varphi_\beta = U_\beta(T) = \frac{1}{(2\pi)^m |B|}\int_{R_+^m}\varphi(s)\bar{E}_\beta(s)\rho(s)\mathrm{d}s \tag{68}$$

将(62)，(65)，(66)代入方程(1)即有

$$\int_{R^m}\left[U'_\beta(t) - \lambda_\beta U_\beta(t) + f_\beta(t)\right]E_\beta(s)\mathrm{d}\beta = 0 \tag{69}$$

由特征函数系的完备正交性即有 $U'_\beta(t) - \lambda_\beta U_\beta(t) + f_\beta(t) = 0$，再由(68)式即得

非齐次常微分方程的终值问题

$$\begin{cases} U_\beta'(t)-\lambda_\beta U_\beta(t)+f_\beta(t)=0, 0<t<T \\ U_\beta(T)=\varphi_\beta \end{cases} \tag{70}$$

用常数变易法得到非齐次常微分方程的终值问题的解为

$$U_\beta(t)=\varphi_\beta \mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}+\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(\xi-t)}\mathrm{d}\xi \tag{71}$$

将上式代入(59)式即得

$$u(s,t)=\int_{R^m}U_\beta(t)E_\beta(s)\mathrm{d}\beta=\int_{R^m}\varphi_\beta \mathrm{e}^{-\lambda_\beta(T-t)}E_\beta(s)\mathrm{d}\beta+\int_{R^m}\left[\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-\lambda_\beta(\xi-t)}\mathrm{d}\xi\right]E_\beta(s)\mathrm{d}\beta \tag{72}$$

将 $\lambda_\beta, E_\beta(s)$ 的表达式(52)，(53)代入(72)，并记

$$u(s,t)=V(s,t)+W(s,t) \tag{73}$$

$$V(s,t)=\int_{R^m}\varphi_\beta \mathrm{e}^{-(T-t)\sum_{k=1}^m\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2}}\left[\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln s_j}\right]\mathrm{d}\beta \tag{74}$$

$$W(s,t)=\int_{R^m}[\left[\int_t^T f_\beta(\xi)\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^m\frac{\beta_k{}^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2}}\mathrm{d}\xi\right]\left[\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln s_j}\right]\mathrm{d}\beta \tag{75}$$

其中 φ_β 由(68)， $f_\beta(t)$ 由(64)确定。

由(74)式即有

$$\begin{aligned}
V(s,t)&=\int_{R^m}\varphi_\beta \mathrm{e}^{-(T-t)\sum_{k=1}^m\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2}}\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln s_j}\mathrm{d}\beta \\
&=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\left(\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\xi_j}\mathrm{e}^{-i\beta_k\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\xi_j}\right)\left(\prod_{k=1}^m\frac{1}{\xi_k}\mathrm{e}^{-(1+2d_k)\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\xi_j}\right)\mathrm{d}\xi \\
&=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\left(\prod_{k=1}^m\frac{1}{\xi_k}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}}\right)\mathrm{d}\xi\int_{R^m}\mathrm{e}^{-(T-t)\sum_{k=1}^m\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2}}\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}}\mathrm{d}\beta \\
&=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^m|B|}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\left(\prod_{k=1}^m\frac{1}{\xi_k}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}}\right)\mathrm{d}\xi\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{-(T-t)\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(T-t)\frac{\beta_k^2}{2}}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}}\mathrm{d}\beta_k \\
&=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^m|B|}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\left(\prod_{k=1}^m\frac{1}{\xi_k}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}}\right)\mathrm{d}\xi\prod_{k=1}^m \mathrm{e}^{-(T-t)\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\left(\frac{2\pi}{T-t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}} \\
&=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^m|B|}\left(\frac{2\pi}{T-t}\right)^{\frac{m}{2}}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\left(\prod_{k=1}^m\frac{1}{\xi_k}\mathrm{e}^{\frac{2(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}}{2(T-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{(T-t)^2\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2(T-t)}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\right)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^m|B|}\left(\frac{2\pi}{T-t}\right)^{\frac{m}{2}}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\left(\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2-2(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}+(T-t)^2\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2(T-t)}}\right)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}}}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}\xi$$

于是有

$$V(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}}}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{76}$$

将 $\rho(s),E(s)$ 的表达式代入(64)式，化简即得

$$\begin{aligned}f_\beta(t)&=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(t)}\mathrm{e}^{-i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(t)}\left[\prod_{k=1}^{m}\frac{1}{s_k(t)}\mathrm{e}^{-(1+2d_k)\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(t)}\right]\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k^2(t)\right]\\&=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\left[\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{-\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(t)}\mathrm{e}^{-i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(t)}\right]\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k(t)\right]\end{aligned} \tag{77}$$

将(77)代入(75)式，并化简

$$W(s,t)$$

$$=\int_{R^m}\left[\int_t^T\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\left[\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{-\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(\xi)}\mathrm{e}^{-i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j(\xi)}\right]\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\beta_k^2+\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{2r}{m}}{2}}\mathrm{d}\xi\right]\prod_{k=1}^{m}\mathrm{e}^{\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln s_j}\mathrm{d}\beta$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\int_t^T\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{m}\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\mathrm{d}\xi\prod_{k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{(\xi-t)\beta_k^2}{2}}\mathrm{e}^{i\beta_k\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}}\mathrm{d}\beta_k$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\int_t^T\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{m}\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\mathrm{d}\xi\prod_{k=1}^{m}\left(\frac{2\pi}{\xi-t}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\int_t^T\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\left(\frac{2\pi}{\xi-t}\right)^{\frac{m}{2}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2-2(\xi-t)\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right\}}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^m|B|}\int_t^T\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\left(\frac{2\pi}{\xi-t}\right)^{\frac{m}{2}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left\{\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2-2(\xi-t)\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}+\left[(\xi-t)\frac{1+2d_k}{2}\right]^2-\left[(\xi-t)\frac{1+2d_k}{2}\right]^2\right\}}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}-(\xi-t)\frac{1+2d_k}{2}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{m}|B|}\int_t^T\left[\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(\xi)s_k(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\left(\frac{2\pi}{\xi-t}\right)^{\frac{m}{2}}\mathrm{e}^{-(\xi-t)\sum_{k=1}^{m}\frac{\left(d_k+\frac{1}{2}\right)^2}{2}}\mathrm{e}^{\sum_{k=1}^{m}\frac{1+2d_k}{2}\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi$$

即得

$$W(s,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\left[\prod_{n=1}^{m}\gamma_n(\xi)s_n(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{78}$$

定理 1 (数学模型 I 解的存在定理)：若

1) $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为正定对称矩阵，$|A|=|B|^2$；

2) $s_{j0}(t),t\in[0,T],j\in\{1,\cdots,m\}$ 为充分光滑的单调函数；

3) $\gamma_k(t)\in C([0,T]),k=1,\cdots,m,\varphi(s)\in C(R_+^m)$。

则数学模型 I 有精确解：

$$u(s,t)=V(s,t)+W(s,t) \tag{79}$$

$$V(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}}}\int_{R_+^m}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{80}$$

$$W(s,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\left[\prod_{n=1}^{m}\gamma_n(\xi)s_n(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{81}$$

且数学模型 I.1 的解 $V(s,t)$ 由(80)式给出，数学模型 I.2 的解 $W(s,t)$ 由(81)式给出。

2.1.2. 多维 Black-Scholes 方程奇异内边界 $s(t)\cong(s_1(t),\cdots,s_k(t))$ 的确定

数学模型 II (多维 Black-Scholes 方程确定奇异内边界的终值问题)：

求 $\{w(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}+\dfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\dfrac{\partial}{\partial s_j}\right)w+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\dfrac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\dfrac{\partial w}{\partial s_k}-rw \\ =-\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k-s_k(t)),s=(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^m,0<t<T & (82)\\ w(s,T)=0 & (83)\\ w(s(t),t)=\max_{s\in R_+^m}w(s,t)=\mu(t),t\in(0,T) & (84)\\ \dfrac{\partial w}{\partial s_k}(s(t),t)=0,k=1,\cdots,m & (85)\\ \lim_{s\to0^+}|w|<\infty,\lim_{s\to\infty}|w|<\infty & (86)\end{cases}$$

定理 2 (数学模型 II 解的存在定理)：若

1) $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为正定对称矩阵；

2) $s_j(t),t\in[0,T],j\in\{1,\cdots,m\}$ 为充分光滑的单调函数；

3) $\gamma_k(t) \in C([0,T]), k=1,\cdots,m$。

则数学模型 II 有连续有界的精确解

$$\begin{cases} w(s,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\displaystyle\int_t^T \dfrac{\Upsilon(\xi)\mathrm{e}^{-\xi(\varpi+r)}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k} c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (87) \\ s_k(t) = s_k(T)\mathrm{e}^{\omega_k(T-t)}, k=1,\cdots,m & (88) \end{cases}$$

数学模型 II 有解的相容性条件是

$$\frac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\Upsilon(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\xi(\varpi+r)}\mathrm{d}\xi = \mu(t), 0<t<T \tag{89}$$

其中

$$\prod_{k=1}^{m} s_k(T)\gamma_k(t) \cong \Upsilon(t) \tag{90}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\omega_k = \varpi \tag{91}$$

$$\omega_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}(1+2d_j)}{2}, k=1,\cdots,m \tag{92}$$

$$d_j = \sum_{n=1}^{j}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nj}, j=1,\cdots,m \tag{93}$$

证明：由定理 1(数学模型 I 解的存在定理)的结论，(81)式给出的$W(s,t)$已满足条件(82) (83) (85)三式，让$W(s,t)$满足条件(84)式去确定奇异内边界$s(t) \cong (s_1(t),\cdots,s_k(t))$。

将(81)式$W(s,t)$记为

$$w(s,t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\left[\prod_{n=1}^{m}\gamma_n(\xi)s_n(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{(1+2d_n)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{94}$$

由(94)式对$w(s,t)$关于自变量$s_k, k=1,\cdots,m$求偏导，由复合函数的求导法则有

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s_k}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|s_k}\int_t^T\left[\prod_{n=1}^{m}\gamma_n(\xi)s_n(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{(1+2d_n)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\frac{\sum_{n=k}^{m}\left[\frac{(1+2d_n)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]c_{kn}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}+1}}\mathrm{d}\xi \tag{95}$$

若令

$$\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)} \equiv 0, \forall\xi,t\in(0,T), k=1,\cdots,m \tag{96}$$

则

$$\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}=\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}+\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}$$

$$=\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}$$

$$=-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}$$

即有

$$\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}=-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)} \tag{97}$$

将(97)式代入(95)式即有

$$\frac{\partial w(s,t)}{\partial s_k}=\frac{-1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|s_k}\int_t^T\left[\prod_{n=1}^{m}\gamma_n(\xi)s_n(\xi)\right]\mathrm{e}^{-(\xi-t)r}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\frac{(1+2d_n)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{s_j(\xi)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\frac{\sum_{n=k}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]c_{kn}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}+1}}\mathrm{d}\xi \tag{98}$$

下面建立引理 2.1~引理 2.4 来完成定理 2 的证明。

引理 2.1：条件(96)成立，则有

$$w(s(t),t)=\max_{s\in R_+^m}w(s,t),t\in(0,T) \tag{99}$$

和

$$\frac{\partial w}{\partial s_k}(s(t),t)=0,k=1,\cdots,m \tag{100}$$

证明：若条件(96)成立，则有(98)成立。由(98)式易知(100)式成立。

由(98)即得到对任意 $t\in(0,T)$ 有

1) 当 $s\in E_-(t)$ 有 $\ln\frac{s_j}{s_j(t)}<0, j=1,\cdots,m$

由引理 1.1 的结论 4)即有即有：当 $\ln\frac{s_j}{s_j(t)}<0, j=1,\cdots,m$，有 $\sum_{n=k}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]c_{kn}<0$ 成立，从而

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(s,t)}{\partial s_k}>0,k=1,\cdots,m\\ w(s,t)\le w(s(t),t),s\in \mathrm{E}_-(t)\end{gathered} \tag{101}$$

2) 当 $s\in E_+(t)$ 有 $\ln\frac{s_j}{s_j(t)}>0, j=1,\cdots,m$

由引理 1.1 中结论 4)即有：当 $\ln\frac{s_j}{s_j(t)}>0, j=1,\cdots,m$，有 $\sum_{n=k}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]c_{kn}>0$ 成立，从而

$$\begin{gathered}\frac{\partial w(s,t)}{\partial s_k}<0,k=1,\cdots,m\\ w(s,t)\le w(s(t),t),s\in \mathrm{E}_+(t)\end{gathered} \tag{102}$$

从而(99)式成立。引理证毕。

引理 2.2： 条件

$$\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)} \equiv \omega_j(\xi - t), \forall \xi, t \in (0,T), j \in \{1,\cdots,m\} \tag{103}$$

成立的充要条件为

$$s_j(t) = s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-t)}, t \in (0,T), j \in \{1,\cdots,m\} \tag{104}$$

证明： 1) 必要性，若(103)成立，由 $\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)} = \omega_j(\xi - t)$ 即有

$$\begin{aligned} \frac{s_j(t)}{s_j(\xi)} &= \mathrm{e}^{\omega_j(\xi-t)} = \frac{\mathrm{e}^{\omega_j\xi}}{\mathrm{e}^{\omega_j t}}, \\ s_j(t)\mathrm{e}^{\omega_j t} &= s_j(\xi)\mathrm{e}^{\omega_j\xi} \end{aligned} \tag{105}$$

记

$$I_j(t) \cong s_j(t)\mathrm{e}^{\omega_j t} \tag{106}$$

由(105)式有

$$I_j(t) \equiv I_j(\xi), \forall \xi \in (t,T], t \in (0,T], j \in \{0,1,\cdots,N\} \tag{107}$$

让 $\xi = T$ 即有

$$s_j(t)\mathrm{e}^{\omega_j t} = s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j T} \tag{108}$$

于是有(104)式成立。

2) 充分性，若(104)式成立，即有

$$\begin{aligned} &\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)} - \omega_j(\xi - t) \\ &\equiv \ln\frac{s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-t)}}{s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-\xi)}} - \omega_j(\xi - t) \\ &\equiv \ln\frac{\mathrm{e}^{\omega_j(T-t)}}{\mathrm{e}^{\omega_j(T-\xi)}} - \omega_j(\xi - t) \\ &\equiv \omega_j(T-t) - \omega_j(T-\xi) - \omega_j(\xi - t) \\ &\equiv \omega_j(\xi - t) - \omega_j(\xi - t) \equiv 0 \end{aligned}$$

即(103)成立。引理证毕。

引理 2.3： 当条件

$$\begin{cases} s_j(t) = s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-t)}, t \in (0,T), j \in \{1,\cdots,m\} & (109) \\ \sum_{j=1}^{k} c_{jk}\omega_j - \frac{(1+2d_k)}{2} = 0 & (110) \end{cases}$$

成立时，则条件(96)成立，从而有 $w(s(t),t) = \max_{s \in R_+^m} w(s,t), t \in (0,T), \frac{\partial w}{\partial s_k}(s(t),t) = 0, k = 1,\cdots,m$ 。

证明： 由(109)式则有

$$\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}\equiv\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-t)}}{s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-\xi)}}$$
$$\equiv\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\omega_j(\xi-t)\equiv(\xi-t)\left[\frac{(1+2d_k)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\omega_j\right] \tag{111}$$

再由(110)式即有

$$\frac{(1+2d_k)(\xi-t)}{2}-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{s_j(\xi)}\equiv 0, k=1,\cdots,m \tag{112}$$

即条件(96)成立，由引理 2.1 即有 $w(s(t),t)=\max_{s\in R_+^m}w(s,t), t\in(0,T)$ 成立。引理证毕。

引理 2.4： 未知数 $\omega_k, k=1,\cdots,m$ 的线性方程组(110)的解为

$$\omega_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}(1+2d_j)}{2}, k=1,\cdots,m \tag{113}$$

证明： 线性方程组(110)写成矩阵形式即为

$$C^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\vdots\\\omega_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{(1+2d_1)}{2}\\\frac{(1+2d_2)}{2}\\\vdots\\\frac{(1+2d_m)}{2}\end{bmatrix} \tag{114}$$

由 C 矩阵的定义即有 $C^{\mathrm{T}}=B^{-1}$，从而

$$B^{-1}\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\vdots\\\omega_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{(1+2d_1)}{2}\\\frac{(1+2d_2)}{2}\\\vdots\\\frac{(1+2d_m)}{2}\end{bmatrix} \tag{115}$$

$$\begin{bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\vdots\\\omega_m\end{bmatrix}=B\begin{bmatrix}\frac{(1+2d_1)}{2}\\\frac{(1+2d_2)}{2}\\\vdots\\\frac{(1+2d_m)}{2}\end{bmatrix} \tag{116}$$

由矩阵乘法即得线性方程组(110)的解由(113)式给出。引理证毕。

记

$$s_j(t)=s_j(T)\mathrm{e}^{\omega_j(T-t)}, t\in(0,T), \omega_j=\sum_{n=1}^{j}\frac{b_{jn}(1+2d_n)}{2}, j\in\{1,\cdots,m\} \tag{117}$$

由引理 2.1~引理 2.4 即知：当(117)成立时，有解 $\{w(s,t), s(t)\}$ 其中 $w(s,t)$ 由(94)给出，$s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(s_1(T)e^{\omega_1(T-t)},\cdots,s_m(T)e^{\omega_m(T-t)}\right)$。由(117)式即有(96)成立，由引理 2.1 即有 $w(s(t),t)=\max\limits_{s\in R_+^m} w(s,t), t\in(0,T)$ 和 $\dfrac{\partial w}{\partial s_k}(s(t),t)=0, k=1,\cdots,m$ 成立。

由(117)式即有(97)式成立，将(97)代入(94)即有：

$$w(s,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\left[\prod_{n=1}^m \gamma_n(\xi)s_n(\xi)\right]e^{-(\xi-t)r}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{\sum_{n=1}^m\left[\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi-t)}} d\xi \tag{118}$$

再将(117)式代入(118)式，即有

$$w(s,t)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\left[\prod_{n=1}^m \gamma_n(\xi)s_n(T)\right]e^{(T-\xi)\sum_{n=1}^m\omega_m} e^{-(\xi-t)r}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{\sum_{n=1}^m\left[\sum_{j=1}^k c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi-t)}} d\xi \tag{119}$$

引入记号：$\prod_{k=1}^m s_k(T)\gamma_k(t)\cong\Upsilon(t), \sum_{k=1}^m\omega_k=\varpi$，再由(119)即得到 $w(s,t)$ 由(87)给出。由(87)式给出的解 $w(s,t)$ 满足条件(84)式和(85)式。从而满足数学模型 II，即(87)，(88)两式给出了数学模型 II 的解。由(87)式即知数学模型 II 有解的相容性条件是(89)式。定理证毕。

引入记号

$$X\in R^m, Y\in R^m$$

多维开区间 $(X,Y)\cong\{s\,|\,x_j<s_j<y_j, j=1,\cdots,m\}$，多维闭区间 $[X,Y]\cong\{s\,|\,x_j\le s_j\le y_j, j=1,\cdots,m\}$。

函数的支集 $\operatorname{supp}\varphi=\{s\,|\,\varphi(s)\ne0\}$，支集的闭包 $\overline{\operatorname{supp}\varphi}=\overline{\{s\,|\,\varphi(s)\ne0\}}$，记函数集合 $\Lambda_{(X,Y)}\cong\left\{\varphi\,|\,\varphi\in C(R_+^m), \varphi(s)\ge0, s\in R_+^m, \text{且}\overline{\operatorname{supp}\varphi}\subset(X,Y)\subset R_+^m\right\}$。

$$\Omega\cong\{(s,t)\,|\,s\in R_+^m, t\in(0,T)\}, \Omega_-=\{(s,t)\,|\,s\in E_-(t), t\in(0,T)\}, \Omega_+=\{(s,t)\,|\,s\in E_+(t), t\in(0,T)\}$$
$$E_-(t): 0<s_j<s_j(t), j=1,\cdots,m; E_+(t): s_j(t)<s_j<\infty, j=1,\cdots,m$$
$$\overline{E}_-(t): 0\le s_j\le s_j(t), j=1,\cdots,m; \overline{E}_+(t): s_j(t)\le s_j<\infty, j=1,\cdots,m$$

记

$$s(T)=\vartheta, (s_1(T),\cdots,s_m(T))=(\vartheta_1,\cdots,\vartheta_m) \tag{120}$$

$$s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right) \tag{121}$$

定理 3(数学模型 I.1 解的性质定理)：若 $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为正定矩阵，$s(t)=(s_1(t),\cdots,s_m(t))=\left(\vartheta_1e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$；则

1) 当 $\varphi(s)=\delta(s-\vartheta)$；数学模型 I.1 的解

$$V(s,t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}} e^{-\frac{\sum_{n=1}^m\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^n c_{jn}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}} \tag{122}$$

满足

$$V\left(s(t),t\right)=\max_{s\in R_+^m}V\left(s,t\right)=\frac{c_{\vartheta}\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}},t\in\left(0,T\right) \tag{123}$$

和

$$\frac{\partial V}{\partial s_k}\left(s\left(t\right),t\right)=0,k=1,\cdots,m \tag{124}$$

其中

$$c_{\vartheta}\cong\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left|B\right|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j} \tag{125}$$

2) 当 $\varphi(s)\in\Lambda_{(\vartheta,\infty)}$，则数学模型 I.1 的解

$$V_A\left(s,t\right)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left|B\right|\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi\left(\xi\right)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{126}$$

且解 $V_A\left(s,t\right)$ 满足

$$\max_{s\in\bar{\mathrm{E}}_-(t)}V_A\left(s,t\right)=V_A\left(s\left(t\right),t\right) \tag{127}$$

3) 当 $\varphi(s)\in\Lambda_{(0,\vartheta)}$，数学模型 I.1 的解

$$V_B\left(s,t\right)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left|B\right|\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}}\int_{(0,\vartheta)}\varphi\left(\xi\right)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{128}$$

且解 $V_B\left(s,t\right)$ 满足

$$\max_{s\in\bar{\mathrm{E}}_+(t)}V_B\left(s,t\right)=V_B\left(s\left(t\right),t\right) \tag{129}$$

证 1): 数学模型 I.1 的解由定理 1 的(74)式给出，由 $\varphi(s)=\delta(s-\vartheta)$ 有

$$V\left(s,t\right)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left|B\right|\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}}\int_{R_+^m}\delta\left(\xi-\vartheta\right)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\mathrm{d}\xi \tag{130}$$

应用多维狄拉克 δ -函数的积分性质即得

$$V\left(s,t\right)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}}\frac{1}{\left|B\right|\prod_{k=1}^{m}\vartheta_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}} \tag{131}$$

引入记号 $c_{\vartheta}\cong\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left|B\right|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j}$ 即有

$$V(s,t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}} \tag{132}$$

由于 $\omega_k, k=1,\cdots,m$ 线性方程组(110)的解，由(110)即有

$$\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\omega_j-\frac{(1+2d_k)}{2}=0, k=1,2,\cdots,m \tag{133}$$

由(112)式即有

即有

$$(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{\vartheta_j}=0, t\in(0,T), k=1,\cdots,m \tag{134}$$

由(132)和(134)两式即有

$$V(s(t),t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}, t\in(0,T) \tag{135}$$

由于

$$e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}\le 1, s\in R_+^m, t\in(0,T) \tag{136}$$

从而

$$V(s,t)\le\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}, s\in R_+^m, t\in(0,T) \tag{137}$$

故 $V(s(t),t)=\max_{s\in R_+^m}V(s,t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}, t\in(0,T)$。由(132)对 $V(s,t)$ 关于 $s_k, k=1,\cdots,m$ 求偏导得到

$$\frac{\partial V}{\partial s_k}(s,t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}s_k}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}\left[\frac{\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]c_{kn}}{(T-t)}\right] \tag{138}$$

$$\frac{\partial V}{\partial s_k}(s(t),t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}+1}s_k}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j(t)}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}\left[\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j(t)}{\vartheta_j}\right]c_{kn}\right] \tag{139}$$

由(134)，(139)即得(124)。

证 2)：数学模型 I.1 的解由定理 1 的(74)式给出。任意 $\varphi\in\Lambda_{(\vartheta,\infty)}\cong\left\{\varphi\mid\varphi\in C\left(R_+^m\right),\varphi(s)\ge 0, s\in R_+^m, \text{且}\overline{\operatorname{supp}\varphi}\subset(\vartheta,\infty)\subset R_+^m\right\}$ 即有 $\overline{\operatorname{supp}\varphi}\subset(\vartheta,\infty)$。$\varphi(s)>0, s\in\operatorname{supp}\varphi\subset(\vartheta,\infty);\varphi(s)\equiv 0, s\in R_+^m-\overline{\operatorname{supp}\varphi}$，故 $\varphi(s)\equiv 0$，$s\in(0,\vartheta]$。于是(74)式中积分的积分区域由 R_+^m 变为 (ϑ,∞)。则数学模型 I.1 的解

$$V_A(s,t)=\frac{e^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}}}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}e^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}d\xi \tag{140}$$

由(140)关于 $s_k, k=1,\cdots,m$ 求偏导

$$\frac{\partial V_A}{\partial s_k}(s,t)$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}}}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\frac{\partial}{\partial s_k}\left[-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}+1}s_k}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]c_{kn}\mathrm{d}\xi$$

$$\frac{\partial V_A}{\partial s_k}(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}+1}s_k}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]c_{kn}\mathrm{d}\xi \tag{141}$$

当 $s\in \mathrm{E}_-(t)$ 有 $0<s_j<s_j(t), j=1,\cdots,m$；积分变量 $\xi\in(\vartheta,\infty)$，有 $\vartheta_j\le\xi_j, j=1,\cdots,m$；

$$\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}>1,\ln\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}>0, j=1,\cdots,m \tag{142}$$

又

$$\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]c_{kn}=\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j(t)}{\vartheta_j}+\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j(t)}{\vartheta_j}-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]c_{kn}$$

$$=\sum_{n=k}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{jn}c_{kn}\ln\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}\right] \tag{143}$$

记

$\ln\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}\cong x_j, j=1,\cdots,m;\sum_{n=k}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}c_{kn}\ln\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}=\sum_{n=k}^{m}c_{kn}\sum_{j=1}^{n}c_{jn}x_j\cong I(k;X), k=1,\cdots,m$；由(142)，有 $\ln\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}\cong x_j>0, j=1,\cdots,m$，引理 1.1 的结论 4)即有 $I(k;X)>0, k=1,\cdots,m$；

从而由(143)有

$$\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]>0 \tag{144}$$

再由(141)即有当 $s\in \mathrm{E}_-(t)$，

$$\frac{\partial V_A}{\partial s_n}(s,t)>0, n=1,\cdots,m \tag{145}$$

当 $s\in \mathrm{E}_-(t)$，$V_A(s,t)\le V_A(s(t),t)$，从而有 $\max_{s\in\bar{\mathrm{E}}_-(t)}V_A(s,t)=V_A(s(t),t)$ 成立。

证 3)：当 $\varphi(s)\in\Lambda_{(0,\vartheta)}$，由数学模型 I.1 的解(74)式即有(128)成立。由(128) 式对 $V_B(s,t)$ 关于 $s_k,k=1,\cdots,m$ 求偏导即有

$$\frac{\partial V_B}{\partial s_k}(s,t)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}+1}s_k}\int_{(0,\vartheta)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}\sum_{n=k}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]c_{kn}\mathrm{d}\xi \tag{146}$$

当 $s\in\mathrm{E}_+(t)$，有 $\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}<1,\ln\frac{s_j(t)\xi_j}{\vartheta_j s_j}<0,\ j=1,\cdots,m$，

引理 1.1 的结论 4)即有 $\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]<0$

由(146)即有：当 $s\in\mathrm{E}_+(t)$，$\frac{\partial V_B}{\partial s_n}(s,t)<0,n=1,\cdots,m$。当 $s\in\mathrm{E}_+(t)$，$V_B(s,t)\le V_B(s(t),t)$，从而有 $\max_{s\in\overline{\mathrm{E}}_+(t)}V_B(s,t)=V_B(s(t),t)$ 成立。定理证毕。

2.2. 关于多维 Black-Scholes 方程的自由边界问题的研究

由 $\mathrm{E}_-(t):0<s_j<s_j(t),j=1,\cdots,m;\mathrm{E}_+(t):s_j(t)<s_j<\infty,j=1,\cdots,m$

即有 $\mathrm{E}_-(T):0<s_j<s_j(T),j=1,\cdots,m;\mathrm{E}_+(T):s_j(T)<s_j<\infty,j=1,\cdots,m$

即 $\mathrm{E}_-(T):0<s_j<\vartheta_j,j=1,\cdots,m;\mathrm{E}_+(T):\vartheta_j<s_j<\infty,j=1,\cdots,m$

即 $\mathrm{E}_-(T)\cong(0,\vartheta),\mathrm{E}_+(T)\cong(\vartheta,\infty)$

下面分别讨论关于多维 Black-Scholes 方程在 Ω_- 的**自由边界问题 A** 和在 Ω_+ 的**自由边界问题 B。**

自由边界问题 A (关于多维 Black-Scholes 方程在 $\Omega_-=\{(s,t)\,|\,s\in\mathrm{E}_-(t),t\in(0,T)\}$ 的自由边界问题)：求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\frac{\partial}{\partial s_j}\right)u+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\frac{\partial u}{\partial s_k}-ru=0,s\in\mathrm{E}_-(t),0<t<T & (147)\\ u(s,T)=0,s\in(0,\vartheta) & (148)\\ u(s(t),t)=\max_{s\in\overline{\mathrm{E}}_-(t)}u(s,t)=\mu_A(t),t\in(0,T) & (149)\\ \frac{\partial u}{\partial s_k}(s(t),t)=\psi_{Ak}(t),k=1,\cdots,m & (150)\\ \lim_{s\to0^+}|u|<\infty,\lim_{s\to\infty}|u|<\infty & (151)\end{cases}$$

定理 4 (自由边界问题 A 多解性定理)：若

1) $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为正定矩阵；

2) $\gamma_k(t)\in C([0,T]),\gamma_k(t)\ge0,t\in(0,T),k=1,\cdots,m$；

则自由边界问题 A 的有解 $\{u_A(s,t),s(t)\}$，自由边界为

$$s(t)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right) \tag{152}$$

$u_A(s,t)$ 具有多解性，第一解：

$$u_A(s,t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}+\frac{e^{\varpi T}e^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\Upsilon(\xi)e^{-\xi(\varpi+r)}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi-t)}}d\xi \quad (153)$$

有解的相容性条件

$$\begin{cases}\mu_A(t)=\frac{c_\vartheta e^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}+\frac{e^{\varpi T}e^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\Upsilon(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\xi(\varpi+r)}d\xi & (154)\\ \psi_{Ak}(t)\equiv 0,k=1,\cdots,m & (155)\end{cases}$$

第二解：

$$\begin{aligned}u_A(s,t)=&\frac{e^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}(T-t)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}e^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}d\xi\\&+\frac{e^{\varpi T}e^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\Upsilon(\xi)e^{-\xi(\varpi+r)}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi-t)}}d\xi,\forall\varphi(s)\in\Lambda_{(\vartheta,\infty)}\end{aligned} \quad (156)$$

有解的相容性条件

$$\begin{cases}\mu_A(t)=\frac{e^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}(T-t)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}e^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{\vartheta_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}}d\xi+\frac{e^{\varpi T}e^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\Upsilon(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}e^{-\xi(\varpi+r)}d\xi,\varphi(s)\in\Lambda_{(\vartheta,\infty)} & (157)\\ \psi_{Ak}(t)=\frac{e^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}+1}s_k(t)}\int_{(\vartheta,\infty)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}e^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{\xi_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}\sum_{n=k}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{\xi_j}{\vartheta_j}\right]c_{kn}d\xi,\varphi(s)\in\Lambda_{(\vartheta,\infty)},k=1,\cdots,m & (158)\end{cases}$$

$$c_\vartheta\cong\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j},\Upsilon(t)=\prod_{k=1}^{m}\vartheta_k\gamma_k(t),\varpi=\sum_{k=1}^{m}\omega_k,\omega_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}(1+2d_j)}{2},d_j=\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nj} \quad (159)$$

证明： 当 $s\in E_-(t),0<t<T,s_k\neq s_k(t),\delta(s_k-s_k(t))\equiv 0,f(s,t)=\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k-s_k(t))\equiv 0$ 由定理 2 的(87)式给出的解满足齐次方程(147)，故由(153)式和(156)式给出的解满足齐次方程(147)。再由定理 2，定理 3 的结论即知定理 4 成立。由(112)，(152)两式即有

$$(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j(t)}{\xi_j}=\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{\xi_j}{\vartheta_j},k=1,\cdots,m \quad (160)$$

推证相容性条件(158)，由(141)，(160)两式即得。定理证毕。

附注 1： 定理 4 中的第二解对在函数集合 $\Lambda_{(\vartheta,\infty)}$ 任意给定的 $\varphi(s)$ 都有由(156)式给出的解 $u_A(s,t)$ 与之对应，即得到了一个解族 $\Phi_A\cong\{u_A(s,t)|u_A(s,T)=\varphi(s)\in\Lambda_{(\vartheta,\infty)}\}$。

自由边界问题 B (关于多维 Black-Scholes 方程在 $\Omega_+ = \{(s,t) \mid s \in \mathrm{E}_+(t), t \in (0,T)\}$ 的自由边界问题)：求 $\{u(s,t), s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m} a_{kj}\left(s_k \dfrac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j \dfrac{\partial}{\partial s_j}\right)u + \sum_{k=1}^{m}\left(r - q_k - \dfrac{1}{2}a_{kk}\right)s_k \dfrac{\partial u}{\partial s_k} - ru = 0, s \in \mathrm{E}_+(t), t \in (0,T) & (161) \\ u(s,T) = 0, s \in (\vartheta, \infty) & (162) \\ u(s(t),t) = \max\limits_{s \in \overline{\mathrm{E}}_+(t)} u(s,t) = \mu_B(t), t \in (0,T) & (163) \\ \dfrac{\partial u}{\partial s_k}(s(t),t) = \psi_{Bk}(t), k = 1,\cdots,m & (164) \\ \lim\limits_{s \to 0^+}|u| < \infty, \lim\limits_{s \to \infty}|u| < \infty & (165) \end{cases}$$

定理 5 (自由边界问题 B 多解性定理)：若

1) $A = (a_{kj})_{m \times m}$ 为正定矩阵；

2) $\gamma_k(t) \in C([0,T]), \gamma_k(t) \ge 0, t \in (0,T), k = 1,\cdots,m$；

则自由边界问题 B 有解 $\{u_B(s,t), s(t)\}$，自由边界为

$$s(t) = \left(\vartheta_1 \mathrm{e}^{\omega_1(T-t)}, \cdots, \vartheta_m \mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right) \tag{166}$$

$u_B(s,t)$ 具有多解性，第一解：

$$u_B(s,t) = \frac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_n + \frac{1}{2}\right) - \sum_{j=1}^{n} c_{jn} \ln \frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}} + \frac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\Upsilon(\xi)\mathrm{e}^{-\xi(\varpi + r)}}{(\xi - t)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k} c_{jk} \ln \frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi - t)}} \mathrm{d}\xi \tag{167}$$

有解的相容性条件

$$\begin{cases} \mu_B(t) = \dfrac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}} + \dfrac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\displaystyle\int_t^T \dfrac{\Upsilon(\xi)}{(\xi - t)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{e}^{-\xi(\varpi + r)}\mathrm{d}\xi & (168) \\ \psi_{Bk}(t) \equiv 0, k = 1,\cdots,m & (169) \end{cases}$$

第二解：

$$\begin{aligned} u_B(s,t) = {} & \frac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}} \int_{(0,\vartheta)} \varphi(\xi) \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k + \frac{1}{2}\right) - \sum_{j=1}^{k} c_{jk} \ln \frac{s_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}} \mathrm{d}\xi \\ & + \frac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\Upsilon(\xi)\mathrm{e}^{-\xi(\varpi + r)}}{(\xi - t)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k} c_{jk} \ln \frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi - t)}} \mathrm{d}\xi, \forall \varphi(s) \in \Lambda_{(0,\vartheta)} \end{aligned} \tag{170}$$

有解的相容性条件

$$\mu_B(t) = \frac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}} \int_{(0,\vartheta)} \varphi(\xi) \frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k} \mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k} c_{jk} \ln \frac{\vartheta_j}{\xi_j}\right]^2}{2(T-t)}} \mathrm{d}\xi + \frac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T \frac{\Upsilon(\xi)}{(\xi - t)^{\frac{m}{2}}} \mathrm{e}^{-\xi(\varpi + r)}\mathrm{d}\xi, \varphi(s) \in \Lambda_{(0,\vartheta)} \tag{171}$$

$$\psi_{Bk}(t)=\frac{\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|(T-t)^{\frac{m}{2}+1}s_k(t)}\int_{(0,\vartheta)}\varphi(\xi)\frac{1}{\prod_{k=1}^{m}\xi_k}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{\xi_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}\sum_{n=k}^{m}\left[\sum_{j=1}^{n}c_{jn}\ln\frac{\xi_j}{\vartheta_j}\right]c_{kn}\mathrm{d}\xi,\varphi(s)\in\Lambda_{(0,\vartheta)},k=1,\cdots,m \tag{172}$$

其中

$$c_\vartheta\cong\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j},\Upsilon(t)=\prod_{k=1}^{m}\vartheta_k\gamma_k(t),\varpi=\sum_{k=1}^{m}\omega_k,\omega_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}(1+2d_j)}{2},d_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nk} \tag{173}$$

证明： 当 $s\in\mathrm{E}_+(t),t\in(0,T),s_k\neq s_k(t),\delta(s_k-s_k(t))\equiv0,f(s,t)=\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k-s_k(t))\equiv0$ 由定理 2 的(87)式给出的解满足齐次方程(161)，故由(167)式和(170)式给出的解满足齐次方程(161)。再由定理 2，定理 3 的结论即知定理 5 成立。推证相容性条件(172)由(146) (160)两式即得。定理证毕。

附注 2： 定理 5 中的第二解对在函数集合 $\Lambda_{(0,\vartheta)}$ 任意给定的 $\varphi(s)$ 都有由(170)式给出的解 $u_B(s,t)$ 与之对应，即得到了一个解族 $\Phi_B\cong\{u_B(s,t)\,|\,u_B(s,T)=\varphi(s)\in\Lambda_{(0,\vartheta)}\}$。

2.3. 数学模型 III 与自由边界问题 A 和问题 B 的关系

数学模型 III (多维 Black-Scholes 方程确定奇异内边界的终值问题)：

求 $\{u(s,t),s(t)\}$，使其满足

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{m}a_{kj}\left(s_k\frac{\partial}{\partial s_k}\right)\left(s_j\frac{\partial}{\partial s_j}\right)u+\sum_{k=1}^{m}\left(r-q_k-\frac{1}{2}a_{kk}\right)s_k\frac{\partial u}{\partial s_k}-ru \\ \quad=-\prod_{k=1}^{m}\gamma_k(t)s_k^2(t)\delta(s_k-s_k(t)),s=(s_1,\cdots,s_m)\in R_+^m,0<t<T & (174)\\ u(s,T)=\varphi(s) & (175)\\ u(s(t),t)=\max_{s\in R_+^m}u(s,t)=\mu(t),t\in(0,T) & (176)\\ \frac{\partial u}{\partial s_k}(s(t),t)=0,k=1,\cdots,m & (177)\\ \lim_{s\to0^+}|u|<\infty,\lim_{s\to\infty}|u|<\infty & (178)\end{cases}$$

定理 6 (奇异内边界与问题 A 和 B 的自由边界三线合一定理一)：若

1) $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为正定矩阵；

2) $\gamma_k(t)\in C([0,T]),\gamma_k(t)\geq0,k=1,\cdots,m$；

3) $\varphi(s)=\delta(s-\vartheta)$；

4) $\mu(t)=\mu_A(t)=\mu_B(t)$；

5) $\psi_{Ak}(t)\equiv\psi_{Bk}(t)\equiv0,k=1,\cdots,m$。

则数学模型 III 与问题 A 和问题 B 有相同表达式的解

$$\begin{cases}u(s,t)=\frac{c_\vartheta\mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}+\frac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\Upsilon(\xi)\mathrm{e}^{-\xi(\varpi+r)}}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(\xi-t)}}\mathrm{d}\xi & (179)\\ s(t)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right),t\in(0,T) & (180)\end{cases}$$

有解的相容性条件

$$\mu(t)=\frac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}+\frac{\mathrm{e}^{\varpi T}\mathrm{e}^{tr}}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|}\int_t^T\frac{\Upsilon(\xi)}{(\xi-t)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\xi(\varpi+r)}\mathrm{d}\xi \tag{181}$$

其中

$$\begin{aligned}c_\vartheta &\cong \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j},\Upsilon(t)=\prod_{k=1}^{m}\vartheta_k\gamma_k(t),\varpi=\sum_{k=1}^{m}\omega_k,\omega_k\\&=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}(1+2d_j)}{2},d_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nk}\end{aligned} \tag{182}$$

数学模型 III 的奇异内边界与问题 A 和问题 B 的自由边界三曲线重合成同一指数函数向量 $s(t)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right),t\in(0,T)$；数学模型 III 的解函数是问题 A 和 B 的解函数的共同连续开拓，即

$$u(s,t)=\begin{cases}u_A(s,t),s\in \mathrm{E}_-(t),t\in(0,T)\\u(s(t),t)=u_A(s(t),t)=u_B(s(t),t),t\in(0,T)\\u_B(s,t),s\in \mathrm{E}_+(t),t\in(0,T)\end{cases} \tag{183}$$

定义 2：若 $s(t)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right),t\in(0,T)$，$u(s,t)$ 由(183)定义，称 $\{u(s,t),s(t)\}$ 为数学模型 III 与问题 A 和问题 B 的一致相容解。

定理 7 (奇异内边界与问题 A 和 B 的自由边界三线合一定理二)：若

1) $A=(a_{kj})_{m\times m}$ 为正定矩阵；

2) $\gamma_k(t)\equiv\vartheta_k^{-2}\delta(T-t),t\in(0,T),k=1,\cdots,m$；

3) $\varphi(s)=\delta(s-\vartheta)$；

4) $\mu(t)=\mu_A(t)=\mu_B(t)$；

5) $\psi_{Ak}(t)\equiv\psi_{Bk}(t)\equiv 0,k=1,\cdots,m$ 。

则数学模型 III 与问题 A 和问题 B 的一致相容解

$$\begin{cases}u(s,t)=\dfrac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}}\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}}+\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{n=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{s_j(t)}\right]^2}{2(T-t)}}\right] & (184)\\ s(t)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right),t\in(0,T) & (185)\end{cases}$$

有解的相容性条件

$$\mu(t)=\frac{2c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{(T-t)^{\frac{m}{2}}} \tag{186}$$

$$c_\vartheta\cong\frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}|B|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j},\omega_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}(1+2d_j)}{2},d_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nk} \tag{187}$$

定理 8 (奇异内边界与问题 A 和问题 B 的自由边界三线合一定理三)：若

1) $A=\left(a_{kj}\right)_{m\times m}$ 为正定矩阵；

2) $\gamma_k\left(t\right)\equiv 0, t\in\left(0,T\right), k=1,\cdots,m$；

3) $\varphi\left(s\right)=\delta\left(s-\vartheta\right)$；

4) $\mu\left(t\right)=\mu_A\left(t\right)=\mu_B\left(t\right)$；

5) $\psi_{Ak}\left(t\right)\equiv\psi_{Bk}\left(t\right)\equiv 0, k=1,\cdots,m$。

则数学模型 III 与问题 A 和问题 B 的一致相容解

$$\begin{cases} u\left(s,t\right)=\dfrac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{\sum_{k=1}^{m}\left[(T-t)\left(d_k+\frac{1}{2}\right)-\sum_{j=1}^{k}c_{jk}\ln\frac{s_j}{\vartheta_j}\right]^2}{2(T-t)}} & (188)\\ s\left(t\right)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right), t\in\left(0,T\right) & (189)\end{cases}$$

有解的相容性条件

$$\mu\left(t\right)=\frac{c_\vartheta \mathrm{e}^{-(T-t)r}}{\left(T-t\right)^{\frac{m}{2}}} \tag{190}$$

其中

$$c_\vartheta\cong\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{m}{2}}\left|B\right|\prod_{j=1}^{m}\vartheta_j},\omega_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{b_{kj}\left(1+2d_j\right)}{2},d_k=\sum_{n=1}^{k}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nk} \tag{191}$$

由定理 6，定理 7，定理 8 给出的一致相容解 $u\left(s,t\right)$ 满足条件

$$u\left(s\left(t\right),t\right)=\max_{s\in R_+^m}u\left(s,t\right), t\in\left(0,T\right) \tag{192}$$

即一致相容解 $u\left(s,t\right)$ 在任意时刻 $t\in\left(0,T\right)$ 在 $s\left(t\right)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$ 取 R_+^m 中的最大值 $u\left(s\left(t\right),t\right)=\max_{s\in R_+^m}u\left(s,t\right)$，从而称 $s\left(t\right)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$ 为最佳实施边界。

定理 9 (多资产期权最佳实施边界定理)：$A=\left(a_{kj}\right)_{m\times m}$ 为正定矩阵，则期权价格函数 $u\left(s,t\right)$ 在任意时刻 $t\in\left(0,T\right)$ 在 $s\left(t\right)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right)$ 取 R_+^m 中的最大值 $u\left(s\left(t\right),t\right)=\max_{s\in R_+^m}u\left(s,t\right)$，多资产期权最佳实施边界为指数函数向量

$$s\left(t\right)=\left(\vartheta_1\mathrm{e}^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m\mathrm{e}^{\omega_m(T-t)}\right), t\in\left(0,T\right) \tag{193}$$

满足

$$\omega_k=-\frac{1}{s_k\left(t\right)}\frac{\mathrm{d}s_k\left(t\right)}{\mathrm{d}t}, k=1,\cdots,m \tag{194}$$

且有 ω_k 的计算公式

$$\omega_k=\sum_{j=1}^{k}b_{kj}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{j}\left(\frac{1}{2}a_{nn}+q_n-r\right)c_{nj}\right] \tag{195}$$

公式(195)表明 $\omega_k, k=1,\cdots,m$ 由多维 Black-Scholes 方程中出现的所有参数 a_{kj}，q_j，r 唯一确定。

证明： 由定理 6，定理 7，定理 8 即知期权价格函数 $u(s,t)$ 在任意时刻 $t\in(0,T)$ 在 $s(t)=\left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right)$ 取 R_+^m 中的最大值 $u(s(t),t)=\max\limits_{s\in R_+^m} u(s,t)$，从而多资产期权最佳实施边界为指数函数向量(193)。关于 d_j 的计算公式(93)式代入 ω_k 的计算公式(92)式即得 ω_k 的计算公式(195)，由引理 1.1 即知 $(b_{kj})_{m\times m}, (c_{kj})_{m\times m}$ 皆由 $(a_{kj})_{m\times m}$ 唯一确定，从而 $\omega_k, k=1,\cdots,m$ 由多维 Black-Scholes 方程中出现的所有参数 a_{kj}，q_j，r 唯一确定。定理证毕。

3. 结论

指数函数向量 $s(t)=\left(\vartheta_1 e^{\omega_1(T-t)},\cdots,\vartheta_m e^{\omega_m(T-t)}\right), t\in(0,T)$ 为多资产期权的最佳实施边界，满足条件 $\omega_k \equiv -\frac{1}{s_k(t)}\frac{\mathrm{d}s_k(t)}{\mathrm{d}t}$；且 $\omega_k, k=1,\cdots,m$ 由多维 Black-Scholes 方程中出现的所有参数 a_{kj}，q_j，r 唯一确定。

参考文献 (References)

[1] 姜礼尚. 期权定价的数学模型和方法[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[2] 姜礼尚, 徐承龙, 任学敏, 李少华. 金融数学丛书:金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2013.

[3] 任学敏, 魏嵬, 姜礼尚, 梁进著. 信用风险估值的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[4] 姜礼尚. 金融衍生产品定价的数学模型与案例分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2008.

[5] 黄文礼, 李胜宏. 分数布朗运动驱动下带比例交易成本的期权定价[J]. 高校应用数学学报, 2011, 26(2): 201-208.

[6] 冯骅. 金融产品及其衍生物价格的数学模型研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 中国石油大学(北京), 2011.

[7] 袁世冉. 对一篮子期权定价模型的研究[D]: [硕士学位论文]. 秦皇岛: 燕山大学, 2014.

[8] 胡宗义. 投资选择及资产定价数学模型研究[D]: [博士学位论文]. 长沙: 湖南大学, 2004.

[9] 周杲昕. 多资产期权定价模型的数值新方法研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2013.

[10] 黎伟, 周圣武, Li Wei, Zhou Shengwu. 带交易费的多资产期权定价模型及数值解法[J]. 江苏师范大学学报(自然科学版), 2011, 29(2): 53-56.

[11] 刘莉. 互换与极值期权定价的树网格法[D]: [硕士学位论文]. 桂林: 广西师范大学, 2008.

[12] 许德志. 若干期权定价模型的数值新方法研究[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学(北京), 2010.

[13] 张帆. 两类期权定价模型有限差分的并行计算[D]: [硕士学位论文]. 北京: 华北电力大学, 2014.

[14] Broadie, M and Detemple, J. (1996) American Option Valuation: New Bounds, Approximations, and a Comparison of Existing Methods. *Review of Financial Studies*, **9**, 1211-1250. https://doi.org/10.1093/rfs/9.4.1211

[15] Figlewski, S. and Gao, B. (1999) The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing. *Journal of Financial Economics*, **53**, 313-351. https://doi.org/10.1016/S0304-405X(99)00024-0

[16] Figlewski, S. and Gao, B. (1998) The Adaptive Mesh Model: A New Approach to Efficient Option Pricing. New York University, Leonard N. Stern School of Business, New York.

[17] Whaley, R.E. (1981) On the Valuation of American Call Options on Stocks with Known Dividends. *Journal of Financial Economics*, **9**, 207-211. https://doi.org/10.1016/0304-405X(81)90013-1

[18] Ankudinova, J. and Ehrhardt, M. (2008) On the Numerical Solution of Nonlinear Black-Scholes Equations. *Computers & Mathematics with Applications*, **56**, 799-812. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.005

[19] Lötstedt, P., Persson, J. and Sydow, L.V. (2007) Space-Time Adaptive Finite Difference Method for European Multi-Asset Options. *Computers & Mathematics with Applications*, **53**, 1159-1180. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2006.09.014

[20] Goodman, V. and Stampfli, J. (2001) The Mathematics of Finance: Modeling and Hedging. *Pure and Applied Undergraduate Texts*, **7**, 250.

[21] Broadie, M. and Detemple, J. (1995) American Capped Call Options on Dividend-Paying Assets. *Review of Financial Studies*, **8**, 161-191. https://doi.org/10.1093/rfs/8.1.161

[22] 史荣昌. 矩阵分析[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1996.

[23] 吴小庆. 数学物理方程及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[24] 吴小庆. 偏微分方程理论与实践[M]. 北京: 科学出版社, 2009.