

# Estimates on the Non-Real Eigenvalues of Fourth Order Indefinite Differential Operators

Fan Hu, Jiong Sun, Kun Li, Xiaoling Hao

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia  
Email: 519518546@qq.com, masun@imu.edu.cn

Received: Apr. 21<sup>st</sup>, 2017; accepted: May 6<sup>th</sup>, 2017; published: May 10<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

The present paper gives an estimate on the non-real eigenvalues for a class of fourth order differential operators. Using operator theory and classical analysis, we study the eigenvalue problem for indefinite differential operators produced by the signs of weight function, and discuss the cases of many turning points and a turning point for the weight function respectively, then we get the estimate on the real and imaginary parts of the non-real eigenvalues.

## Keywords

Fourth Order Differential Operators, Non-Real Eigenvalue, Indefinite Weight Function

---

## 四阶不定微分算子非实特征值的估计

胡帆, 孙炯, 李昆, 郝晓玲

内蒙古大学数学科学学院, 内蒙古 呼和浩特  
Email: 519518546@qq.com, masun@imu.edu.cn

收稿日期: 2017年4月21日; 录用日期: 2017年5月6日; 发布日期: 2017年5月10日

---

## 摘要

本文研究了一类关于四阶微分算子非实特征值的估计。利用算子理论和经典分析, 研究了由权函数变号产生的不定微分算子的特征值问题, 对权函数具有多个拐点时和只有一个拐点的情况分别进行了讨论, 得到非实特征值实部和虚部的估计。

## 关键词

四阶微分算子, 非实特征值, 不定权函数

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

本文考虑四阶边值问题

$$y^{(4)} + qy = \lambda wy \quad (1)$$

边界条件为

$$\cos \theta_1 y(-1) - \sin \theta_1 y'''(-1) = 0, \quad (2)$$

$$y'(-1) = 0, \quad (3)$$

$$\cos \theta_2 y(1) - \sin \theta_2 y'''(1) = 0, \quad (4)$$

$$y''(1) = 0, \quad (5)$$

其中  $\theta_j \in [0, \pi)$ ,  $j = 1, 2$ 。  $\lambda$  是谱参数,  $q, w$  都是实值函数, 并且  $q \in L^1[-1, 1]$ 。当  $x \in [-1, 1]$  时,  $w(x) \neq 0$  a.e., 且  $w(x)$  在  $[-1, 1]$  上改变符号。  $L^2_{|w|}[-1, 1]$  表示所有勒贝格可测函数构成的 Hilbert 空间,  $f \in L^2_{|w|}[-1, 1]$  满足  $\int_{-1}^1 |w| |f|^2 < \infty$ 。

常微分算子谱理论的广泛研究使得算子谱的内容更加丰富, 特别是关于特征值的研究取得了许多成果。自二十世纪以来, 研究发现正则不定的 Sturm-Liouville 问题可能具有非实的特征值, 对这类非实特征值实部和虚部的估计至今仍然是一个开放性问题[1] [2]。早在二十世纪初, Haupt, Richardson 等人就对不定性质的问题进行了讨论[3] [4]。近年来一些学者对不定的 Sturm-Liouville 问题进行了更进一步的研究。其中一些学者最早对 Richardson 方程  $-y'' - \mu y = \lambda \operatorname{sgn}(x)y$ ,  $x \in [-1, 1]$  及 Dirichlet 边界条件  $y(1) = y(-1) = 0$  中非实特征值的存在性进行了研究, 之后越来越多的作者对这类问题进行了深入广泛的研究[5] [6] [7] [8]。对于二阶形式不定的 Sturm-Liouville (S-L) 问题, 只要其相应的右定问题有负的特征值

$$\tau y := -(py)'' + qy = \lambda |w|y, \tau y \in L^2_{|w|}[0, 1],$$

$$B_1 y := \cos \theta_1 y(0) - \sin \theta_1 py'(0) = 0,$$

$$B_2 y := \cos \theta_2 y(1) - \sin \theta_2 py'(1) = 0,$$

则二阶不定的 S-L 方程有非实特征值[9] [10]。

对于正则不定的 Sturm-Liouville 问题, 2014 年 Qi 和 Chen 在 Dirichlet 边界条件以及权函数变号一次或绝对连续条件下, 分离实部和虚部给出了不定问题非实特征值上界的估计[11]。2013, Xie 和 Qi 给出在具有一般分离型边界条件以及权函数绝对连续或更弱的条件下, 通过分离实部和虚部给出了不定 Sturm-Liouville 问题非实特征值的上界估计[12]。同年, Behrndt, Chen, Philipp 和 Qi 得到了权函数可以无穷次变号的不定 Sturm-Liouville 问题非实特征值的上界估计[13]。

许多研究工作已对二阶不定 Sturm-Liouville 问题的非实特征值给出了很好的估计。但是由于对函数的导数估计上的一些困难，目前对高阶不定微分算子的研究较少。本文拟研究了一类四阶不定微分算子的非实特征值估计。利用算子理论、经典分析、不等式估计，研究了由权函数变号产生的不定微分算子的特征值问题，对权函数具有多个拐点时和只有一个拐点的情况分别进行了讨论，给出了非实特征值实部和虚部的估计。

## 2. 正文

### 基本符号与引理

本文中： $\lambda$  为边值问题(1)-(5)中的非实特征值， $\Phi$  是对应于特征值  $\lambda$  的特征函数，并且这里  $\Phi$  满足  $\max\{|\Phi(x)|: x \in [-1, 1]\} = 1$ 。为了描述定理 1 和定理 2，我们给出如下记号，令

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{\sqrt{2N_q^\theta}}, \frac{1}{2} \right\}$$

其中  $\delta$  为区间 I 的长度，

$$I \subset [-1, 1], N_q^\theta = |\cot \theta_1| + |\cot \theta_2| + \|q_-\|_1, q_- = \max\{-q, 0\}, \|q\|_1 = \int_{-1}^1 |q|.$$

若  $\theta = 0$ ，定义  $\cot \theta = 0$ 。因为  $w(x) \neq 0$  a.e.

我们可以找到  $\varepsilon_1 > 0$ ，使得：

$$\text{mes}\Omega(\varepsilon_1) \leq \frac{1}{8}\delta, \Omega(\varepsilon_1) = \left\{ x \in [-1, 1] : w(x)^2 \leq \varepsilon_1 \right\}. \quad (6)$$

**引理 1.** 若  $\lambda, \Phi$  如上定义，且  $N_q^\theta = |\cot \theta_1| + |\cot \theta_2| + \|q\|_1$ ，则

$$\int_{-1}^1 |\Phi''|^2 \leq N_q^\theta. \quad (7)$$

**证明** 在方程  $\Phi^{(4)} + q\Phi = \lambda w\Phi$  两边同时乘以  $\bar{\Phi}$ ，并且在  $[-1, 1]$  上进行积分得到

$$\int_{-1}^1 \Phi^{(4)}\bar{\Phi} + \int_{-1}^1 q\Phi\bar{\Phi} = \lambda \int_{-1}^1 w\Phi\bar{\Phi},$$

由分部积分得

$$\begin{aligned} & \Phi''\bar{\Phi}|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \Phi''\bar{\Phi}' + \int_{-1}^1 q|\Phi|^2 \\ &= \Phi''\bar{\Phi}|_{-1}^1 - \left( \Phi''\bar{\Phi}'|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \Phi''\bar{\Phi}'' \right) + \int_{-1}^1 q|\Phi|^2 = \lambda \int_{-1}^1 w|\Phi|^2, \end{aligned}$$

由边界条件(2)-(5) 知

$$\cot \theta_2 |\Phi(1)|^2 - \cot \theta_1 |\Phi(-1)|^2 + \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 + \int_{-1}^1 q|\Phi|^2 = \lambda \int_{-1}^1 w|\Phi|^2,$$

因为  $\text{Im} \lambda \neq 0$ ，由上式可知  $\int_{-1}^1 w|\Phi|^2 = 0$ ，因此

$$\cot \theta_2 |\Phi(1)|^2 - \cot \theta_1 |\Phi(-1)|^2 + \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 + \int_{-1}^1 q|\Phi|^2 = 0, \quad (8)$$

由于  $\max\{|\Phi(x)|: x \in [-1, 1]\} = 1$ ，所以由(8)式得到

$$\int_{-1}^1 |\Phi''|^2 \leq |\cot \theta_1| + |\cot \theta_2| + \|q_-\|_1 = N_q^\theta.$$

证毕。

**引理 2.** 若  $\lambda, \Phi$  如上定义, 且  $N_q^\theta = |\cot \theta_1| + |\cot \theta_2| + \|q_-\|_1$ , 则

$$|\Phi'(x)|^2 \leq 2N_q^\theta. \quad (9)$$

**证明** 由边界条件(3)知

$$|\Phi'(x)|^2 = \left| \int_{-1}^x \Phi''(t) dt \right|^2 \leq \left( \int_{-1}^x |\Phi''(t)| dt \right)^2.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 1 可得

$$|\Phi'(x)|^2 \leq 2 \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 \leq 2N_q^\theta.$$

证毕。

**引理 3.** 若  $\lambda, \Phi$  如上定义, 且  $\delta$  如之前所记, 则

$$\int_{-1}^1 |\Phi|^2 \geq \frac{1}{4} \delta. \quad (10)$$

**证明** 假定  $x_0 \in [-1, 1]$ , 使得  $\Phi(x_0) = \max \{|\Phi(x)| : x \in [-1, 1]\} = 1$ , 则由引理 2 可知, 对  $\forall x \in [-1, 1]$  且  $|x - x_0| \leq \frac{\delta}{2}$ , 有

$$|\Phi(x) - 1| = |\Phi(x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_{x_0}^x \Phi' \right| \leq \frac{1}{2}.$$

因此  $|\Phi(x)| \geq \frac{1}{2}$ ,  $x \in \mathbf{I}$ , 其中  $\mathbf{I} = \left[ x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2} \right]$ 。所以

$$\int_{-1}^1 |\Phi|^2 > \int_{\mathbf{I}} |\Phi|^2 \geq \frac{1}{4} \delta.$$

证毕。

### 3. 结论

#### 3.1. 权函数具有多个拐点时非实特征值的估计

**定理 1.** 若  $w' \in AC[-1, 1]$ ,  $w'' \in L^2[-1, 1]$ ,  $\lambda, \Phi$  如上定义, 则边值问题(1)-(5)的非实特征值  $\lambda$  满足

$$|\operatorname{Re} \lambda| \leq \frac{8}{\varepsilon_1 \delta} \left\{ w_0 (|\cot \theta_1| + |\cot \theta_2| + \|q\|_1) + \left( \|w''\|_2 \sqrt{N_q^\theta} + 2\sqrt{2} \|w'\|_2 N_q^\theta + w_0 N_q^\theta \right) \right\}, \quad (11)$$

$$|\operatorname{Im} \lambda| \leq \frac{8}{\varepsilon_1 \delta} \left\{ \|w''\|_2 \sqrt{N_q^\theta} + 2\sqrt{2} \|w'\|_2 N_q^\theta + w_0 N_q^\theta \right\}, \quad (12)$$

其中  $w_0 = \max \{|w(x)| : x \in [-1, 1]\}$ 。

**证明** 在方程  $\Phi^{(4)} + q\Phi = \lambda w\Phi$  两边同时乘以  $w\bar{\Phi}$ , 并且在  $[-1, 1]$  上进行积分得到

$$\int_{-1}^1 w\bar{\Phi}\Phi^{(4)} + \int_{-1}^1 wq|\Phi|^2 = \lambda \int_{-1}^1 w^2 |\Phi|^2.$$

由分部积分得

$$w\bar{\Phi}\Phi''' \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})' \Phi''' + \int_{-1}^1 wq|\Phi|^2 = w\bar{\Phi}\Phi'' \Big|_{-1}^1 - \left[ (w\bar{\Phi})' \Phi'' \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})'' \Phi'' \right] + \int_{-1}^1 wq|\Phi|^2 = \lambda \int_{-1}^1 w^2 |\Phi|^2,$$

由边界条件(2)-(5)知

$$w(1)\cot\theta_2|\Phi(1)|^2 - w(-1)\cot\theta_1|\Phi(-1)|^2 + \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})'' \Phi'' + \int_{-1}^1 wq|\Phi|^2 = \lambda \int_{-1}^1 w^2 |\Phi|^2,$$

分离实部和虚部得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda \int_{-1}^1 w^2 |\Phi|^2 &= w(1)\cot\theta_2|\Phi(1)|^2 - w(-1)\cot\theta_1|\Phi(-1)|^2 \\ &\quad + \int_{-1}^1 wq|\Phi|^2 + \operatorname{Re} \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})'' \Phi'', \end{aligned} \quad (13)$$

$$\operatorname{Im} \lambda \int_{-1}^1 w^2 |\Phi|^2 = \operatorname{Im} \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})'' \Phi''. \quad (14)$$

由  $w_0 = \max\{|w(x)|: x \in [-1, 1]\}$  和  $\max\{|\Phi(x)|: x \in [-1, 1]\} = 1$  可得

$$w(1)\cot\theta_2|\Phi(1)|^2 - w(-1)\cot\theta_1|\Phi(-1)|^2 + \int_{-1}^1 wq|\Phi|^2 \leq w_0(|\cot\theta_1| + |\cot\theta_2| + \|q\|_1), \quad (15)$$

$$\left| \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})'' \Phi'' \right| = \left| \int_{-1}^1 w'' \bar{\Phi} \Phi'' + 2 \int_{-1}^1 w' \bar{\Phi}' \Phi'' + \int_{-1}^1 w \bar{\Phi}'' \Phi'' \right|.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 1 及引理 2 知

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 w'' \bar{\Phi} \Phi'' \right| &\leq \left( \int_{-1}^1 |w''|^2 |\bar{\Phi}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|w''\|_2 \sqrt{N_q^\theta}, \\ \left| 2 \int_{-1}^1 w' \bar{\Phi}' \Phi'' \right| &\leq 2 \left( \int_{-1}^1 |w'|^2 |\bar{\Phi}'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{2} \|w'\|_2 \sqrt{N_q^\theta} \sqrt{N_q^\theta} = 2\sqrt{2} \|w'\|_2 N_q^\theta, \\ \int_{-1}^1 w \bar{\Phi}'' \Phi'' &= \int_{-1}^1 w |\Phi''|^2 \leq w_0 N_q^\theta. \end{aligned}$$

所以由上可得

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 (w\bar{\Phi})'' \Phi'' \right| &= \left| \int_{-1}^1 w'' \bar{\Phi} \Phi'' + 2 \int_{-1}^1 w' \bar{\Phi}' \Phi'' + \int_{-1}^1 w \bar{\Phi}'' \Phi'' \right| \\ &\leq \|w''\|_2 \sqrt{N_q^\theta} + 2\sqrt{2} \|w'\|_2 N_q^\theta + w_0 N_q^\theta. \end{aligned} \quad (16)$$

由(6)式定义的  $\varepsilon_1$  及引理 3 得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 w^2 |\Phi|^2 &\geq \varepsilon_1 \int_{[-1, 1]/\Omega(\varepsilon_1)} |\Phi|^2 = \varepsilon_1 \left( \int_{-1}^1 |\Phi|^2 - \int_{\Omega(\varepsilon_1)} |\Phi|^2 \right) \\ &\geq \varepsilon_1 \left( \frac{1}{4} \delta - \operatorname{mes} \Omega(\varepsilon_1) \right) \geq \varepsilon_1 \left( \frac{1}{4} \delta - \frac{1}{8} \delta \right) \geq \frac{1}{8} \varepsilon_1 \delta. \end{aligned} \quad (17)$$

综上, 由(13)-(17)可得

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} \lambda| &\leq \frac{8}{\varepsilon_1 \delta} \left\{ w_0(|\cot\theta_1| + |\cot\theta_2| + \|q\|_1) + \left( \|w''\|_2 \sqrt{N_q^\theta} + 2\sqrt{2} \|w'\|_2 N_q^\theta + w_0 N_q^\theta \right) \right\}, \\ |\operatorname{Im} \lambda| &\leq \frac{8}{\varepsilon_1 \delta} \left\{ \|w''\|_2 \sqrt{N_q^\theta} + 2\sqrt{2} \|w'\|_2 N_q^\theta + w_0 N_q^\theta \right\}, \end{aligned}$$

证毕。

### 3.2. 权函数只有一个拐点时非实特征值的估计

在这部分, 我们考虑权函数变号一次时对非实特征值的估计。为此我们假定  $y''(-1) = 0, xw(x) > 0$  在  $[-1, 1]$  上几乎处处成立, 则可以找到  $\varepsilon_2 > 0$ , 使得:

$$\text{mes } \Omega(\varepsilon_2) \leq \frac{1}{8} \delta, \Omega(\varepsilon_2) = \{x \in [-1, 1]: xw(x) \leq \varepsilon_2\}. \quad (18)$$

**定理 2.** 若  $\lambda, \Phi$  如上定义,  $w \in L^1[-1, 1]$  且  $w(x)$  满足(18)式, 则边值问题(1)-(5)的非实特征值  $\lambda$  满足

$$|\text{Re } \lambda| \leq \frac{16}{\varepsilon_2 \delta} \{|\cot \theta_2| + \|q\|_1 + 3N_q^\theta\}, \quad (19)$$

$$|\text{Im } \lambda| \leq \frac{32}{\varepsilon_2 \delta} N_q^\theta. \quad (20)$$

**证明** 在方程  $\Phi^{(4)} + q\Phi = \lambda w\Phi$  两边同时乘以  $\bar{\Phi}$ , 并且在  $[x, 1]$  上进行积分得到

$$\int_x^1 \bar{\Phi} \Phi^{(4)} + \int_x^1 q |\Phi|^2 = \lambda \int_x^1 w |\Phi|^2,$$

由分部积分得

$$\bar{\Phi} \Phi''' \Big|_x^1 - \int_x^1 \bar{\Phi}' \Phi'' + \int_x^1 q |\Phi|^2 = \bar{\Phi} \Phi''' \Big|_x^1 - \left( \bar{\Phi}' \Phi'' \Big|_x^1 - \int_x^1 \bar{\Phi}'' \Phi'' \right) + \int_x^1 q |\Phi|^2 = \lambda \int_x^1 w |\Phi|^2,$$

由边界条件(4)和(5)知

$$\cot \theta_2 |\Phi(1)|^2 - \bar{\Phi} \Phi'''(x) + \bar{\Phi}' \Phi''(x) + \int_x^1 |\Phi''|^2 + \int_x^1 q |\Phi|^2 = \lambda \int_x^1 w |\Phi|^2,$$

对上式分离实部和虚部得到

$$\text{Re } \lambda \int_x^1 w |\Phi|^2 = \cot \theta_2 |\Phi(1)|^2 + \int_x^1 |\Phi''|^2 + \int_x^1 q |\Phi|^2 + \text{Re} [\bar{\Phi}' \Phi''(x) - \bar{\Phi} \Phi'''(x)], \quad (21)$$

$$\text{Im } \lambda \int_x^1 w |\Phi|^2 = \text{Im} [\bar{\Phi}' \Phi''(x) - \bar{\Phi} \Phi'''(x)], \quad (22)$$

在(21)和(22)式中令  $x = -1$  得到

$$\text{Re } \lambda \int_{-1}^1 w |\Phi|^2 = \cot \theta_2 |\Phi(1)|^2 + \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 + \int_{-1}^1 q |\Phi|^2 - \cot \theta_1 |\Phi(-1)|^2,$$

$$\text{Im } \lambda \int_{-1}^1 w |\Phi|^2 = \text{Im} [\bar{\Phi}' \Phi''(-1) - \bar{\Phi} \Phi'''(-1)] = \text{Im} [-\cot \theta_1 |\Phi(-1)|^2] = 0.$$

由于  $\text{Im } \lambda \neq 0$ , 所以  $\int_{-1}^1 w |\Phi|^2 = 0$ 。对(21)式从  $[-1, 1]$  进行积分得

$$\begin{aligned} |\text{Re } \lambda| \int_{-1}^1 \int_x^1 w |\Phi|^2 &= |\text{Re } \lambda| \int_{-1}^1 xw |\Phi|^2 \\ &= \left| \int_{-1}^1 \cot \theta_2 |\Phi(1)|^2 + \int_{-1}^1 \int_x^1 |\Phi''|^2 + \int_{-1}^1 \int_x^1 q |\Phi|^2 + \text{Re} \int_{-1}^1 (\bar{\Phi}' \Phi'' - \bar{\Phi} \Phi''') \right|, \end{aligned} \quad (23)$$

由分部积分和边界条件得

$$\int_{-1}^1 \bar{\Phi} \Phi''' = \bar{\Phi} \Phi'' \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \bar{\Phi}' \Phi'' = -\int_{-1}^1 \bar{\Phi}' \Phi''.$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 1 及引理 2 知

$$\int_{-1}^1 |\bar{\Phi}' \Phi''| \leq \left( \int_{-1}^1 |\bar{\Phi}'|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{-1}^1 |\Phi''|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\sqrt{N_q^\theta} \sqrt{N_q^\theta} = 2N_q^\theta,$$

并且由(23)式及  $\max \{|\Phi(x)|: x \in [-1, 1]\} = 1$  可知

$$\begin{aligned} |\text{Re } \lambda| \int_{-1}^1 xw |\Phi|^2 &\leq 2|\cot \theta_2| + 2N_q^\theta + 2\|q\|_1 + 2N_q^\theta + 2N_q^\theta \\ &= 2|\cot \theta_2| + 2\|q\|_1 + 6N_q^\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

由(18)式定义的  $\varepsilon_2$  及引理 3 得

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 xw|\Phi|^2 &\geq \varepsilon_2 \int_{[-1,1]/\Omega(\varepsilon_2)} |\Phi|^2 = \varepsilon_2 \left( \int_{-1}^1 |\Phi|^2 - \int_{\Omega(\varepsilon_2)} |\Phi|^2 \right) \\ &\geq \varepsilon_2 \left( \frac{1}{4} \delta - \text{mes } \Omega(\varepsilon_2) \right) \geq \varepsilon_2 \left( \frac{1}{4} \delta - \frac{1}{8} \delta \right) \geq \frac{1}{8} \varepsilon_2 \delta. \end{aligned} \quad (25)$$

同理可得

$$|\text{Im } \lambda| \int_{-1}^1 xw|\Phi|^2 \leq 4N_q^\theta.$$

综上, 由(21)-(25)可得

$$\begin{aligned} |\text{Re } \lambda| &\leq \frac{16}{\varepsilon_2 \delta} \{ |\cot \theta_2| + \|q\|_1 + 3N_q^\theta \}, \\ |\text{Im } \lambda| &\leq \frac{32}{\varepsilon_2 \delta} N_q^\theta. \end{aligned}$$

证毕。

## 资助信息

本文由国家自然科学基金项目(11561050, 11401325)、高等学校博士学科点专项科研基金(新教师类)(20121501120003)支持。

## 参考文献 (References)

- [1] Mingarelli, A.B. (1986) A Survey of the Regular Weighted Sturm-Liouville Problem—The Non-Definite Case. *Mathematics*, 109-137.
- [2] Zettl, A. (2005) Sturm-Liouville Theory. American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, 121,
- [3] Haupt, O. (1915) Über eine Methode zum Beweis von oszillations Theoremen. *Mathematische Annalen*, **76**, 67-104. <https://doi.org/10.1007/BF01458673>
- [4] Richardson, R.G.D. (1912) Theorems of Oscillation for Two Linear Differential Equations of Second Order with Two Parameters. *Transactions of the American Mathematical Society*, **13**, 22-34. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500902-8>
- [5] Atkinson, F.V. and Jabon, D. (1988) Indefinite Sturm-Liouville Problems. Kaper, H.G., Kwong, M.K. and Zettl, A., Eds., *Proceedings of the Focused Research Program on Spectral Theory and Boundary Value Problems*, Argonne National Laboratory, Lemont, 31-45.
- [6] Binding, P. and Volkmer, H. (1996) Eigencurves for Two-Parameter Sturm-Liouville Equations. *SIAM Review*, **38**, 27-48. <https://doi.org/10.1137/1038002>
- [7] Fleckinger, J. and Mingarelli, A.B. (1984) On the Eigenvalues of Non-Definite Elliptic Operators. *North-Holland Mathematics Studies*, **92**, 219-227. [https://doi.org/10.1016/S0304-0208\(08\)73696-X](https://doi.org/10.1016/S0304-0208(08)73696-X)
- [8] Turyn, L. (1980) Sturm-Liouville Problems with Several Parameters. *Journal Differential Equations*, **38**, 239-259. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(80\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0022-0396(80)90007-8)
- [9] Curgus, B. and Langer, H. (1989) A Krein Space Approach to Symmetric Ordinary Differential Operators with an Indefinite Weight Functions. *Journal Differential Equations*, **79**, 31-61. [https://doi.org/10.1016/0022-0396\(89\)90112-5](https://doi.org/10.1016/0022-0396(89)90112-5)
- [10] Mingarelli, A.B. (1982) Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Lecture Notes in Mathematics*, **964**, 519-528. <https://doi.org/10.1007/BFb0065022>
- [11] Qi, J.G. and Chen, S.Z. (2014) A Priori Bounds and Existence of Non-Real Eigenvalues of Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Journal of Spectral Theory*, **4**, 53-63. <https://doi.org/10.4171/JST/61>
- [12] Xie, B. and Qi, J.G. (2013) Non-Real Eigenvalues of Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Journal Differential Equations*, **255**, 2291-2301. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2013.06.013>

- [13] Behrndt, J., Chen, S.Z., Philipp, F. and Qi, J.G. (2013) Estimates on the Non-Real Eigenvalues of Regular Indefinite Sturm-Liouville Problems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **144**, 1113-1126.  
<https://doi.org/10.1017/S0308210513001212>

期刊投稿者将享受如下服务:

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [pm@hanspub.org](mailto:pm@hanspub.org)