Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(4), 297-300
Published Online July 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74039

On the Finite *p*-Group with a Small Central Quotient

Xing Wu, Yulong Ma, Hailin Liu*

School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming Yunnan
Email: 18388262192@163.com, 1170777214@qq.com, *hailinliuqp@163.com

Received: Jun. 23rd, 2017; accepted: Jul. 8th, 2017; published: Jul. 17th, 2017

Abstract

Let *G* be a finite noncyclic *p*-group of order greater than p^2. If $|G|$ divides $|\mathrm{Aut}(G)|$, then *G* is called a LA-group. The purpose of this paper was to consider the class of *p*-group $G=\langle a,b\rangle$ such that $|G:Z(G)|=p^5$ with the prime $p\ge 7$. We showed that such group *G* is LA-group.

Keywords

Finite p-Group, LA-Group, Automorphism Group

具有小中心商的有限*p*-群

伍　星，马玉龙，刘海林*

云南大学数学与统计学院，云南　昆明
Email: 18388262192@163.com, 1170777214@qq.com, *hailinliuqp@163.com

收稿日期：2017年6月23日；录用日期：2017年7月8日；发布日期：2017年7月17日

摘　要

假设*G*是一个有限非交换*p*-群，并且*G*的阶大于p^2，如果$|G|$整除$|\mathrm{Aut}(G)|$，那么称*G*为LA-群。本文考虑了二元生成的有限*p*-群$G=\langle a,b\rangle$，并且满足$|G:Z(G)|=p^5$，其中素数$p\ge 7$。我们证明了这样的有限*p*-群是LA-群。

*通讯作者。

文章引用: 伍星, 马玉龙, 刘海林. 具有小中心商的有限 p-群[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 297-300.
https://doi.org/10.12677/pm.2017.74039

关键词

有限*p*-群，LA-群，自同构群

1. 引言

设 G 是一个， N 是 G 的正规子群。在本文中我们用 G'， $\mathrm{Aut}(G)$， $Z(G)$ 和 G/N 分别表示群 G 的导群，自同构群，中心和商群。用 $|G|$ 表示群 G 的阶。

假设群 G 是一个有限非循环 p-群，并且 G 的阶大于 p^2，如果 $|G|$ 整除 $|\mathrm{Aut}(G)|$，那么我们称这个 p-群 G 为 LA-群。对 LA-群的研究有很久的历史。下面我们列出一些关于 LA-群的一些结果：假设 G 是一个阶 p^n 的有限非循环 p-群，并且 $n>2$。如果 G 满足下列条件之一，那么 G 是 LA-群。

1) G 是一个 PN-群 B 和一个交换群 P 的直积，并且 $|B|$ 整除 $|\mathrm{Aut}(G)|$ (见[1])；
2) G 是 p-交换 p-群(见[2])；
3) $p>2$，并且 G 是亚循环的(见[3])；
4) $n\le 7$ (见[4] [5])；
5) $|G|\le 2^9$ (见[6])；
6) $p>2$，并且 G 是有限的模 p-群(见[7])；
7) Frattini 子群 $\Phi(G)$ 循环(见[8])；
8) G 是一个指数为 p^2 的循环子群(见[9])；
9) G 是一个极大类 p-群(见[1])；
10) 对任意的 $\alpha\in G/Z(G)$， $\alpha Z(G)\subseteq\alpha^G$ (见[10])；
11) $|G/Z(G)|\le p^4$ (见[11])；
12) G 是余类为 2 的 p-群(见[12])。

此外，在文献[13]中，作者刻画了满足 $|\mathrm{Aut}(G)|_p=|G|$ 的极大类 p-群 G，其中 $|\mathrm{Aut}(G)|_p$ 表示 $\mathrm{Aut}(G)$ 的 Sylow-*p* 子群的阶。再者满足 $|\mathrm{Aut}(G)|=|G|$ 的 p-群 G 在文献[14]中被分类。

本文我们将 LA-群推广到一类 p-群 G 上：满足 $G=\langle a,b\rangle$， $|G:Z(G)|=p^5$， 其中 $p\ge 7$ 为素数。现在我们陈述本文的主要结果。

定理 1.1. 假设 $G=\langle a,b\rangle$ 是一个阶大于等于 p^2 的有限非循环 p-群， $p\ge 7$ 为素数，并且满足 $|G:Z(G)|=p^5$， 则 $|G|$ 整除 $|\mathrm{Aut}(G)|$， 即 G 为 LA-群。

注 1.1. 由引理 2.1，我们可以假设群 G 的幂零类 $\mathrm{cl}(G)$ 大于 2。进一步，由文献和，我们可以假设 G 不是 p-交换的，并且 $|Z(G)|>p$。

2. 预备引理

在本小节，我们将给出一些必要的预备结果。

首先，我们给出两个关于 LA-群的结果， 见文献[15] [16]。

引理 2.1. ([16], THEOREM)假设 G 是一个有限非交换 p-群，幂零类 $\mathrm{cl}(G)=2$，则 G 的阶整除于

$\mathrm{Aut}(G)$ 的阶。

引理 2.2. ([15], THEOREM]) 假设 G 是一个有限 p-群 $(p>2)$，并且满足 $G/Z(G)$ 是一个非平凡的亚循环，则 $|G|$ 整除 $|\mathrm{Aut}(G)|$。

接下来的引理给出了有限亚循环 p-群的判别准则。

引理 2.3. ([17], K.III, S.11.4]) 假设 G 是一个有限 p-群 $(p>2)$，则 G 是亚循环的当且仅当 $|G:\mho_1(G)|\le p^2$，其中 $\mho_1(G)=\langle g^p \mid g\in G\rangle$。

最后我们给出有限 p-群正则的判别准则。

引理 2.4. 假设 G 是一个有限 p-群，

1) 如果 $\mathrm{cl}(G)<p$，那么 G 正则；
2) 如果 $|G|\le p^p$，那么 G 正则；
3) 如果 $p>2$，并且 G' 循环，那么 G 正则；
4) 如果 $\exp(G)=p$，那么 G 正则。

3. 定理证明

首先，我们考虑正则的情形：$G=\langle a,b\rangle$ 是一个正则 p-群，其中素数 p 没有限制。

引理 3.1. 假设 $G=\langle a,b\rangle$ 是一有限非循环 p-群，满足 $|G/Z(G)|=p^5$，则 $|G|$ 整除 $|\mathrm{Aut}(G)|$。

证明： 假设 G 是一个正则 p-群。注意到正则 2-群是交换的，因此 $p\ne 2$。因为 G 不是 p-交换的，所以我们有 $[a,b]^p\ne 1$。又因为 G 正则，所以 $[a^p,b]\ne 1$，$[a,b^p]\ne 1$。因此 $a^p\notin Z(G)$ 并且 $b^p\notin Z(G)$。接下来我们有：$\langle a^p\rangle Z(G)/Z(G)$ 和 $\langle b^p\rangle Z(G)/Z(G)$ 的交非平凡。事实，如果假设 $\langle a^p\rangle Z(G)/Z(G)\cap\langle b^p\rangle Z(G)/Z(G)\ne Z(G)$，那么存在 $y\in Z(G)$ 满足 $a^p\in\langle b\rangle$，因此 $[a^py,b]=[a^p,b]=1$，与前面的事实矛盾。若假设 $H=\langle a,b\rangle Z(G)/Z(G)$，则很容易可得 $|H|=p^5$ 并且 $H=G/Z(G)$。进一步，由前面的事实可得 $|\mho_1(H)|=p^3$，所以 $|H:\mho_1(H)|=p^2$。从而由引理 2.3，我们可得 $H=G/Z(G)$ 是亚循环的。因此由引理 2.2，定理得证。

即使 G 是一个非正则 p-群，G 也是亚循环的。

命题 3.2. 假设 $G=\langle a,b\rangle$ 是一个阶大于等于 p^2 的有限非循环 p-群，并且满足 $|G:Z(G)|=p^5$，$G'Z(G)\ne\Phi(G)$，则 G 是亚交换的。

证明： 由前面的讨论我们可知 G 具有下面的子群链：$Z(G)<G_2Z(G)<\Phi(G)<G$。因此我们有 $|G_2Z(G):Z(G)|=p$ 或者 $|G_2Z(G):Z(G)|=p^2$。如果 $G_2Z(G)/Z(G)$ 是 p 阶的循环群，那么 $G_2Z(G)$ 交换，所以 G 是亚交换的；接下来，假设 $G_2Z(G)/Z(G)=aZ(G)\times bZ(G)$ 其中 $a,b\in G$。如果 $\mathrm{cl}(G)=3$，由文献 ([17], K.III, H.2.11, b])，那么我们可以在 G_2 中选择 a 和 b 满足 $[a,b]$ 在 $G_4=E$ 中，如果 $\mathrm{cl}(G)=4$，那么可以在 G_2 中选择 a，在 G_3 中选择 b 满足 $[a,b]$ 属于 $G_5=E$；最后，如果 $\mathrm{cl}(G)=5$，你们可以在 G_2 中选择 a，在 G_4 中选择 b 满足 $[a,b]$ 属于 $G_6=E$。因为 $G_2Z(G)=\langle a,b,Z\rangle$，所以 $G_2Z(G)$ 是交换的，因此 G 是亚交换的。

定理 1.1 的证明。 注意到 G 的幂零类 $\mathrm{cl}(G)=3,4$ 或者 5。由于 $\mathrm{cl}(G)<p$，所以 G 是正则的。因此由引理 3.1 可得定理 1.1 对所以的素数 $p\ge 7$ 均成立。

定理 1. 的证明已完成，接下来我们给出一个推论。

推论 3.3. 假设 $G=\langle a,b\rangle$ 是一个有限非循环 p-群，满足 $p^3\le|G|\le p^7$ 并且 $p\ge 7$，则 $|G|$ 整除 $|\mathrm{Aut}(G)|$。

证明： 注意到 $|Z(G)|\ge p^2$，所以 $|G/Z(G)|\le p^5$。由定理 1.1 和文献，推论得证。

本文中，我们仅仅只考虑了这种情形：$G=\langle a,b\rangle$，其中 $p\ge 7$。但是由引理 3.1，我们可知定理 1.1 对这种情况也是成立的：G 是正则的 p-群，其中对素数 p 没有限制。因此，自然地我们有下面可以考虑的

问题。

问题：定理 1.1 对这种情形是否成立：$G=\langle a,b\rangle$ 是一个非正则的 2-群，非正则 3-群或者非正则 5-群。对于这个问题我们也在进一步研究。我们可以预见到这种情形的复杂性。这将是一个巨大的工作。

基金项目

国家自然科学基金(11301468)、云南省自然科学基金(2013FB001)和云南大学第八届研究生科研创新项目资助(ynuy201688)。

参考文献 (References)

[1] Otto, A. (1966) Central Automorphisms of a Finite P-Group. *Duke Math*, **125**, 280-287.

[2] Davitt, R.M. (1972) The Automorphism Group of Finite P-Abelian P-Groups Ill. *Journal of Mathematics*, **16**, 76-85.

[3] Davitt, R.M. (1970) The Automorphism Group of a Finite Metacyclic *P*-Group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **25**, 876-879. https://doi.org/10.2307/2036770

[4] Exarchakos, T. (1989) On P-Group of Small Order. *Publications de l'Institut Mathématique*, **45**, 73-76.

[5] Gavioli, N. (1993) The Number of Automorphisms of Groups of Order p^7. *Proceedings of the Royal Irish Academy Section*, **A2**, 177-184.

[6] Flynm, J., Machale, D. and O'Brien, E.A. (1994) Finite Groups Whose Automorphism Groups Are 2-Group. *Proceedings of the Royal Irish Academy Section*, **A2**, 137-145.

[7] Davitt, R.M. and Otto, A. (1972) On the Automorphism Group of a Finite Modular P-Group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **35**, 399-404.

[8] Fouladi, S., Jamali, A.R. and Orfi, R. (2008) On the Automorphism Group of a Finite P-Group with Cyclic Frattinisubgroup. *Proceedings of the Royal Irish Academy*, **108 A**2, 165-175.

[9] Xiao, C.C. (1990) A Conjecture on the Automorphism Group of a Finite P-Group. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, **2**, 347-351.

[10] Yadav, M.K. (2007) On Automorphisms of Finite P-Groups. *Journal of Group Theory*, **10**, 859-866. https://doi.org/10.1515/jgt.2007.064

[11] Davitt, R.M. (1980) On the Automorphism Group of a Finite *P*-Group with a Small Central Quotient. *Canadian Mathematical Society*, **5**, 1168-1176. https://doi.org/10.4153/CJM-1980-088-3

[12] Fouladi, S., Jamali, A.R. and Orfi, R. (2007) Automorphism Groups of Finite P-Groups of Co-Class 2. *Journal of Group Theory*, **10**, 437-440. https://doi.org/10.1515/jgt.2007.036

[13] Malinowska, I. (2001) Finite P-Groups with Few P-Automorphisms. *Journal of Group Theory*, **4**, 395-400. https://doi.org/10.1515/jgth.2001.029

[14] Attar, M.S. (2015) On Equality of Order of a Finite P-Group and Order of Its Automorphism Group. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **38**, 461-466. https://doi.org/10.1007/s40840-014-0030-z

[15] Davitt, R.M. and Otto, A.D. (1971) On the Automorphism Group of a Finite P-Group with the Central Quotient Metacyclic. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **30**, 467-472. https://doi.org/10.2307/2037717

[16] Faudree, R. (1968) A Note on the Automorphism Group of a Group. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **19**, 1379-1382.

[17] Huppert, B. and Endliche Gruppen, I. (1967) Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Band 134. Springer-Verlag, Berlin and New York.