**Pure Mathematics 理论数学, 2017, 7(5), 378-385**
Published Online September 2017 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2017.75049

Hans汉斯

# Travelling Wave Solution of the Generalized KDV Equation

**Xiaojiao Wang*, Xianlin Zhou, Fangqi Wei**

College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu Sichuan
Email: *767309123@qq.com

Received: Aug. 17th, 2017; accepted: Aug. 31st, 2017; published: Sep. 6th, 2017

## Abstract

**By combining the fractional transform with Cn-expansion method, we give the improved elliptic expansion method to solve the generalized fraction KDV equations, and obtain some new periodic solution and solitary wave solutions.**

## Keywords

**Complex-Transform-Cn Expansion Method, Modified Riemann-Liouville Derivative, Fractional Generalized KDV Equation**

# 分数阶广义KDV方程的精确解

**王小娇*，周贤林，韦方棋**

四川师范大学数学与软件科学学院，四川 成都
Email: *767309123@qq.com

收稿日期：2017年8月17日；录用日期：2017年8月31日；发布日期：2017年9月6日

## 摘 要

本文将分数阶复变换方法和椭圆函数展开法相结合，给出了求解分数阶广义KDV方程的复变换椭圆函数展开法。进而得到了分数阶广义KDV方程的周期波解和孤立波解。

## 关键词

复变换椭圆函数展开法，修正Riemann-Liouville函数，分数阶广义KDV方程

*通讯作者。

文章引用: 王小娇, 周贤林, 韦方棋. 分数阶广义 KDV 方程的精确解[J]. 理论数学, 2017, 7(5): 378-385.
DOI: 10.12677/pm.2017.75049

## 1. 引言

自然科学中的定律及原理是用偏微分方程来表达的，因而偏微分方程是联结数学与自然科学的关键性纽带，求解偏微分方程的显示解，特别是行波解，在理论和实际中有重要的作用，并受到数学和物理学家的广泛关注。许多数学工具和方法被用来求解非线性偏微分方程的行波解。如反散色法[1]，Backlund 法[2]，Darboux 变换法[3]，Hirota 双线性法[4]，延拓法[5]，Painleve 分析法[6]，有限差分法[7]，Tanh 法[8]和 Sin-Cos 法[9]，首次积分法[10]，试探函数法[11]等。由于非线性偏微分方程形式和特征的多样性，尚无一种适用于求解所有类型偏微分方程的方法。

本文研究如下广义 KDV 方程的行波解

$$D_t^{\alpha} u + \left(a u^n - b u^{2n}\right) u_x + u^k \left(u^m\right)_{xxx} = 0 \tag{1}$$

其中，分数阶微分算子 $D_t^{\alpha}$ 是 Jumarie 的修正 Riemann-Liouville 导数[12]，其定义如下：

$$D_x^{\alpha} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\alpha)} \displaystyle\int_0^x (x-\xi)^{-\alpha-1} \left(f(\xi) - f(0)\right) \mathrm{d}\xi, \alpha < 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \displaystyle\int_0^x (x-\xi)^{-\alpha} \left(f(\xi) - f(0)\right) \mathrm{d}\xi, 0 < \alpha < 1, \\ \left(D_x^{\alpha-n} f(x)\right)^{(n)}, n \le \alpha < n+1, n \ge 1, \end{cases} \tag{2}$$

$\Gamma(.)$ 为 Gamma 函数，定义为：

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x, \alpha > 0. \tag{3}$$

Jumarie 的修正 Riemann-Liouville 导数有如下性质：

$$\begin{cases} D_x^{\alpha} c = 0, \\ D_x^{\alpha} x^{\gamma} = \dfrac{\Gamma(1+\gamma)}{\Gamma(1+\gamma-\alpha)} x^{\gamma-\alpha}, \gamma > 0, \\ \left(u(x) v(x)\right)^{(\alpha)} = u(x)^{(\alpha)} v(x) + u(x) v^{(\alpha)}(x), \\ \left(f\left[u(x)\right]\right)^{(\alpha)} = f_u'(u) u^{(\alpha)}(x) = f_u^{(\alpha)}(u) (u_x')^{\alpha}. \end{cases} \tag{4}$$

显然，方程(1)为一类典型的非线性偏微分方程。分数阶非线性偏微分方程是整数阶非线性偏微分方程的自然推广，可以解释许多整数阶非线性偏微分方程无法解释的现象，因而得到了生物、化学、物理、数学等领域学者的广泛关注和高度重视。现已广泛运用到流体力学[13]、生物医学[14]、固态物理[15]等工程领域，并对这些领域的发展产生了深远的影响。寻求分数阶微分方程的精确解已成了数学工作者的重要研究课题，得到了一些求解分数阶非线性方程的方法。如分数阶 $G'/G$ 展开法[16]，分数阶子方程法[17]，分数阶微分变换法[18]，分数阶同伦扰动法[19]等。

最近，Li Zheng Biao 和 He Ji Huan 等人提出了分数阶复变换法[20]，运用该方法可将分数阶偏微分方程转化为整数阶偏微分方程。本文将分数阶复变换法与 Cn 函数展开法[21]相结合，求解了分数阶广义

的 KDV 方程(1)。最终，我们获得了方程(1)的周期解和孤立波解，当分数阶导数 $\alpha=1$ 时，所得到的精确解就是通常的行波解，大大丰富了此方程的解系，为专家学者在某些问题的研究上提供了帮助。

## 2. 复变换-Cn 函数展开法

基于复变换方法和 Cn 函数展开法，得到下面的复变换-Cn 函数展开法，该方法主要步骤如下：

第一步，考虑如下分数阶微分方程：

$$p\left(u,D_t^{\alpha}u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{xxx},\cdots\right)=0\quad\left(0<\alpha\le 1\right). \tag{5}$$

其中 $D_t^{\alpha}u$ 是代数函数 $u\left(x,t\right)$ 关于自变量 $t$ 和 $x$ 的 Jumarie 的修正 Riemann-Liouville 导数，$P$ 是关于函数 $u$ 及偏导数的多项式，$P$ 中含有最高阶导数和非线性项。

作分数阶复变换：

$$u\left(x,t\right)=u\left(\xi\right),\xi=\mu\left(x-\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma\left(1+\alpha\right)}\right),0<\alpha\le 1. \tag{6}$$

其中 $\mu,\lambda$ 是常数，当 $\alpha=1$ 时，式(6)就是通常的行波变换，在式(6)的作用下，式(5)变为：

$$p\left(u,-\mu\lambda u',\mu u',-\mu\lambda u',\mu^2u'',-\lambda\mu^2u'',\mu^3u''',\cdots\right)=0. \tag{7}$$

第二步，假设(7)式的解 $u$ 可以表示为 $C$ 的多项式形式：

$$u=\sum_{i=0}^{K}a_iC^i \tag{8}$$

其中 $C=Cn\left(\xi,\omega\right),a_i\left(i=0,1,2,\cdots,K\right)$ 是待定常数，$a_K\ne 0$。正整数 $K$ 通过式(7)中的最高阶导数项和非线性项来确定。

记 $D=dn\left(\xi,\omega\right),S=sn\left(\xi,\omega\right)$，由椭圆函数的导数公式有：

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}SD}{\mathrm{d}\xi}=H\left(C\right)=C\left(2\omega^2-1-2\omega^2C^2\right),\\
&S^2D^2=J\left(C\right)=\left(1-C^2\right)\left(1-\omega^2+\omega^2C^2\right),\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}=-SD\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C},\\
&\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2}=H\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}+J\left(C\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2},\\
&\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}\xi^3}=-SD\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}\left[H\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}+J\left(C\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}\right],\\
&\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}\xi^4}=-H\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}\left[H\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}+J\left(C\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}\right]+J\left(C\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}\left[H\left(C\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}C}+J\left(C\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}C^2}\right].
\end{aligned} \tag{9}$$

若以 $O\left(u\left(\xi\right)\right)$ 表示 $u$ 的最高幂次的次数 $K$，则 $\frac{\mathrm{d}^ju}{\mathrm{d}\xi^j}$ 最高幂次的次数应为：

$$O\left(\frac{\mathrm{d}^ju}{\mathrm{d}\xi^j}\right)=K+j,\quad j=1,2,\cdots \tag{10}$$

而 $u^l\frac{\mathrm{d}^ju}{\mathrm{d}\xi^j}$ 的最高幂次的系数为

$$O\left(u^{l}\frac{\mathrm{d}^{j}u}{\mathrm{d}\xi^{j}}\right)=(l+1)K+j,\ j=1,2,\cdots,l=0,1,2,\cdots \tag{11}$$

将(8)式代入(7)式，平衡方程(7)中的最高阶导数项和非线性项的幂次，可以确定参数 $K$ 的值，同时利用(9)式等可以导出代数方程

$$P_1(C)+SDP_2(C)=0 \tag{12}$$

其中 $P_1$ 和 $P_2$ 为 $C$ 的多项式，令 $P_1$ 和 $P_2$ 中 $C$ 的各幂次系数为零，便得到确定 $a_i\left(i=1,2,\cdots,K\right)$ 及 $\mu$ 和 $\lambda$ 的代数方程组。运用 Wu 消元法求解这个代数方程组，就得到(5)式的形如(8)的周期波解。特别地，令模数 $w\to 1$，就可以得到相应的孤立波解。

## 3. 分数阶广义 KDV 方程

考虑如下分数阶广义 KDV 方程：

$$D_t^{\alpha}u+\left(au^{n}-bu^{2n}\right)u_x+u^{k}\left(u^{m}\right)_{xxx}=0 \tag{13}$$

对(13)式作复变换：

$$u(x,t)=u(\xi),\ \xi=\mu\left(x-\frac{\lambda t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)}\right),\ (0<\alpha\le 1) \tag{14}$$

经过整理变形，方程(14)化为

$$\frac{-\lambda\left(u^{-k+1}\right)_{\xi}}{-k+1}+\frac{a\left(u^{n-k+1}\right)_{\xi}}{n-k+1}-\frac{b\left(u^{2n-k+1}\right)_{\xi}}{2n-k+1}+\mu^{2}\left(u^{m}\right)_{\xi\xi\xi}=0 \tag{15}$$

假设 $k\ne 1,m\ne 0,n\ne 0,n-k+1\ne 0,2n-k+1\ne 0$。对方程(15)积分，并忽略积分常数，得到关于 $\xi$ 的二阶常微分方程

$$\frac{-\lambda u^{-k+1}}{-k+1}+\frac{au^{n-k+1}}{n-k+1}-\frac{bu^{2n-k+1}}{2n-k+1}+\mu^{2}\left(u^{m}\right)_{\xi\xi}=0 \tag{16}$$

平衡式(16)中的最高阶导数项和非线性项得到

$$(2n+1)M=kM+mM+2 \tag{17}$$

所以

$$M=\frac{2}{2n+1-k-m} \tag{18}$$

情况 3.1 当 $m+k=1$ 时，方程(16)化为

$$\frac{-\lambda u^{m}}{m}+\frac{au^{n-k+1}}{m+n}-\frac{bu^{2n-k+1}}{2n+m}+\mu^{2}\left(u^{m}\right)_{\xi\xi}=0 \tag{19}$$

令 $u=v^{\frac{1}{n}}$，代入到(19)中得到

$$\begin{aligned}&-\lambda n^{2}(2n+m)(n+m)v^{2}+an^{2}m(2n+m)v^{3}-bn^{2}m(n+m)v^{4}\\&+\mu^{2}m^{2}(n+m)(2n+m)(m-n)(v')^{2}+\mu^{2}m^{2}n(n+m)(2n+m)vv''=0\end{aligned} \tag{20}$$

假设式(20)具有如下形式解

$$v=\sum_{i=0}^{K}a_iC^i \tag{21}$$

平衡式(20)中最高阶导数项和非线性项得到 $K=1$，将(21)代入式(20)，其中

$$\begin{aligned}
&v'=-a_1SD,\\
&v''=2a_1w^2C^3-a_1\left(2w^2-1\right)C,\\
&v^2=a_0^2+2a_0a_1C+a_1^2C^2,\\
&v^3=a_1^3C^3+3a_0a_1^2C^2+3a_1a_0^2C+a_0^3,\\
&v^4=a_1^4C^4+4a_1^3a_0C^3+6a_1^2a_0^2C^2+4a_1a_0^3C+a_0^4,\\
&vv''=2a_1^2w^2C^4+2a_0a_1w^2C^3-a_1^2\left(2w^2-1\right)C^2-a_0a_1\left(2w^2-1\right)C,\\
&\left(v'\right)^2=-a_1^2w^2C^4+a_1^2\left(w^2-1\right)C^2-a_1^2\left(w^2-1\right),
\end{aligned} \tag{22}$$

合并 $C$ 相同幂次，并令每一项系数为零，得到一组关于 $a_0,a_1,\lambda,\mu$ 的方程组

$$\begin{aligned}
&C^0:-\lambda n^2\left(2n+m\right)\left(n+m\right)a_0^2+an^2m\left(2n+m\right)a_0^3-bmn^2\left(n+m\right)a_0^4\\
&\quad-\mu^2m^2\left(m-n\right)\left(2n+m\right)\left(n+m\right)a_1^2\left(w^2-1\right)=0,\\
&C^1:-2\lambda n^2\left(2n+m\right)\left(n+m\right)+3amn^2\left(2n+m\right)a_0-4bmn^2\left(n+m\right)a_0^2\\
&\quad-m^2n\left(2n+m\right)\left(n+m\right)\mu^2\left(2w^2-1\right)=0,\\
&C^2:-\lambda n^2\left(2n+m\right)\left(n+m\right)+3amn^2\left(2n+m\right)a_0-6bmn^2\left(n+m\right)a_0^2\\
&\quad+m^2\left(2n+m\right)\left(n+m\right)\mu^2\left(w^2-1\right)-m^2n\left(m+n\right)\left(2n+m\right)\mu^2\left(2\omega^2-1\right)=0,\\
&C^3:amn^2\left(2n+m\right)a_1^2-4bmn^2\left(n+m\right)a_0a_1^2+2\mu^2m^2n\left(2n+m\right)\left(n+m\right)a_0\omega^2=0,\\
&C^4:-bmn^2\left(n+m\right)a_1^2-m^2\left(m-n\right)\left(2n+m\right)\left(n+m\right)\mu^2w^2\\
&\quad+2\mu^2m^2n\left(2n+m\right)\left(n+m\right)w^2=0.
\end{aligned} \tag{23}$$

借助 Wu 消元法求解方程组得到

$$\begin{aligned}
&a_0=\frac{a\left(2n+m\right)\left(3n-m\right)}{2b\left(m+n\right)\left(5n-2m\right)},\\
&a_1=\pm\frac{\left(2n+m\right)\left(3n-m\right)w}{b\left(m+n\right)\left(5n-2m\right)}\sqrt{\frac{a^2\left(9n-4m\right)k_1-2ak_2}{2n\left(2w^2-1\right)k_1}},\\
&\lambda=\frac{am\left(2n+m\right)\left(3n-m\right)k_2}{2b\left(n+m\right)^2\left(5n-2m\right)^2k_1},\\
&\mu=\pm\frac{1}{\left(n+m\right)\left(5n-2m\right)}\sqrt{\frac{na\left(2n+m\right)\left(3n-m\right)\left[a\left(9n-4m\right)k_1-2k_2\right]}{2bm\left(2w^2-1\right)k_1}}.
\end{aligned} \tag{24}$$

其中

$$k_1=2\left(m-n\right)\left(w^2-1\right)-n\left(2w^2-1\right), \tag{25}$$

$$k_2=n\left(3n-w\right)\left(2w^2-1\right)-a\left(9n-4m\right)\left(m-n\right)\left(w^2-1\right) \tag{26}$$

于是

$$v(x,t)=\frac{(2n+m)(3n-m)}{b(m+n)(5n-2m)}\left(\frac{a}{2}\pm w\sqrt{\frac{a^2(9n-4m)k_1-2ak_2}{2n(2w^2-1)k_1}}\right)$$
$$\times Cn\left[\frac{1}{(n+m)(5n-2m)}\sqrt{\frac{na(2n+m)(3n-m)\left[a(9n-4m)k_1-2k_2\right]}{2bm(2w^2-1)k_1}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right),w\right]. \tag{27}$$

特别的，当 $w\to 1$ 时

$$v(x,t)=\frac{(2n+m)(3n-m)}{b(m+n)(5n-2m)}\left(\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2(9n-4m)k_1-2ak_2}{2nk_1}}\right)$$
$$\times Sech\left[\frac{1}{(n+m)(5n-2m)}\sqrt{\frac{na(2n+m)(3n-m)\left[a(9n-4m)k_1-2k_2\right]}{2bmk_1}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right]. \tag{28}$$

其中 $0<\alpha\le 1$，$\lambda,k_1,k_2$ 的值由上给出，因此得到广义 KDV 方程精确解如下：

$$u(x,t)=\left[\frac{(2n+m)(3n-m)}{b(m+n)(5n-2m)}\left(\frac{a}{2}\pm w\sqrt{\frac{a^2(9n-4m)k_1-2ak_2}{2n(2w^2-1)k_1}}\right)\right.$$
$$\left.\times Cn\left[\frac{1}{(n+m)(5n-2m)}\sqrt{\frac{na(2n+m)(3n-m)\left[a(9n-4m)k_1-2k_2\right]}{2bm(2w^2-1)k_1}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right),w\right]\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{29}$$

$$u(x,t)=\left[\frac{(2n+m)(3n-m)}{b(m+n)(5n-2m)}\left(\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2(9n-4m)k_1-2ak_2}{2nk_1}}\right)\right.$$
$$\left.\times Sech\left[\frac{1}{(n+m)(5n-2m)}\sqrt{\frac{na(2n+m)(3n-m)\left[a(9n-4m)k_1-2k_2\right]}{2bmk_1}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right]\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{30}$$

情况 3.2　当 $m+k=n+1$ 时，方程(16)化为

$$\frac{-\lambda u^{m-n}}{m-n}+\frac{au^m}{m}-\frac{bu^{m+n}}{m+n}+\mu^2\left(u^m\right)_{\xi\xi}=0 \tag{31}$$

令 $u=v^{\frac{2}{n}}$，代入到(31)得到

$$-\lambda mn^2(n+m)+an^2(n+m)(m-n)v^2-bn^2m(m-n)v^4$$
$$+2\mu^2m^2(n+m)(2n-m)(m-n)(v')^2+2\mu^2m^2n(n+m)(m-n)vv''=0 \tag{32}$$

假设式(31)具有如下形式解

$$v=\sum_{i=0}^{K}a_iC^i \tag{33}$$

平衡式(32)中最高阶导数项和非线性项得到 $K$=1，将(33)代入式(32)，合并 $C$ 的相同幂次，并令每一项系数为零，得到一组关于 $a_0,a_1,\lambda,\mu$ 的方程组

$$\begin{aligned}
&C^0: -\lambda mn^2(n+m)+an^2(m-n)(n+m)a_0^2-bmn^2(m-n)a_0^4\\
&\quad -2\mu^2m^2(n-m)(2m-n)(n+m)a_1^2(w^2-1)=0,\\
&C^1: 2an^2(m-n)(n+m)-4bmn^2(m-n)a_0^2\\
&\quad -2m^2n(m-n)(n+m)\mu^2(2w^2-1)=0,\\
&C^2: an^2(m-n)(n+m)-6bmn^2(m-n)a_0^2\\
&\quad +2m^2(2n-m)(n+m)\mu^2(m-n)(w^2-1)-2m^2n(m-n)(n+m)\mu^2(2\omega^2-1)=0,\\
&C^3: -bmn^2(m-n)a_1^2+\mu^2m^2n(m-n)(n+m)\omega^2=0,\\
&C^4: -bmn^2(m-n)a_1^2-2m^2(m-n)(2m-n)(n+m)\mu^2w^2\\
&\quad +4\mu^2m^2n(m-n)(n+m)w^2=0.
\end{aligned} \tag{34}$$

借助 Wu 消元法求解方程组得到

$$\begin{aligned}
&a_0=0,\\
&a_1=\pm\frac{w}{mn}\sqrt{\frac{2anm(m+n)(3n-2m)}{(2w^2-1)b}},\\
&\lambda=\frac{2a(2m-n)(m-n)(m+n)(2m-3n)w^2(w^2-1)}{bm^2n^2(2w^2-1)^2}\\
&\mu=\pm\sqrt{\frac{an}{m^2(2w^2-1)}}.
\end{aligned} \tag{35}$$

于是

$$v(x,t)=\pm\frac{w}{mn}\sqrt{\frac{2amn(m+n)(3n-2m)}{(2w^2-1)b}}Cn\left[\sqrt{\frac{an}{m^2(2w^2-1)}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right),w\right]. \tag{36}$$

特别的，当 $w\to 1$ 时

$$v(x,t)=\pm\frac{1}{mn}\sqrt{\frac{2amn(m+n)(3n-2m)}{b}}Sech\left[\sqrt{\frac{an}{m^2}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right]. \tag{37}$$

其中 $0<\alpha\le 1$，$\lambda$ 的值由上给出.因此得到广义 KDV 方程精确解如下：

$$u(x,t)=\left[\pm\frac{w}{mn}\sqrt{\frac{2amn(m+n)(3n-2m)}{(2w^2-1)b}}Cn\left[\sqrt{\frac{an}{m^2(2w^2-1)}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right),w\right]\right]^{\frac{2}{n}}. \tag{38}$$

$$u(x,t)=\left[\pm\frac{1}{mn}\sqrt{\frac{2amn(m+n)(3n-2m)}{b}}Sech\left[\sqrt{\frac{an}{m^2}}\left(x-\frac{\lambda t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right)\right]\right]^{\frac{2}{n}}. \tag{39}$$

## 4. 结语

将分数阶复变换方法和 Cn 函数展开法相结合，得到了求解分数阶非线性方程的精确解的一种新方法。本文求解了广义 KDV 方程，得到了此方程的新的精确解。当分数阶导数 $\alpha=1$ 时，所得到的精确解就是通常的行波解。

## 基金项目

四川省杰出青年基金(2014JQ0039)，国家自然科学基金(11501395)。

## 参考文献 (References)

[1] Rosenau, P. (1997) On Nonanalytic Solitary Waves Formed by a Nonlinear Dispersion. *Physical Letters A*, **230**, 305-318. https://doi.org/10.1016/S0375-9601(97)00241-7

[2] Lai, S.Y. and Yin, Q. (2001) A New Study for the Modified Nonlinear Dispersive mK(m,n)Equations in Higher Dimensional Spaces. *Journal of Pure and Applied Mathematical Science in China*(*Series A*), **44**, 396-401.

[3] Pelinovsky, D. and Grimshaw, R. (1996) An Asymptotic Approach to Solitary Wave Instability and Critical Collapse in Long-Wave KdV-Type Evolution Equations. *Physica D*, **98**, 139-155. https://doi.org/10.1016/0167-2789(96)00093-0

[4] Klaus, M., Pelinovsky, D. and Rothos, V. (2006) Evans Function for Lax Operators with Algebraically Decaying Potentials. *Journal of Nonlinear Science*, **16**, 1-44. https://doi.org/10.1007/s00332-005-0652-7

[5] Pelinovsky, D., Afanasjev, V. and Kivshar, V. (1996) Nonlinear Theory of Oscillating, Decaying and Collapsing Solitions in the Generalized Nonlinear Schrodinger Equation. *Physical Review E*, **53**, 1940-1953. https://doi.org/10.1103/PhysRevE.53.1940

[6] Wazwaz, A.M. (2006) Compactons and Soltary Wave Solutions for the Businesq Wave Equation and Its Generalized Form. *Applied Mathematics Computation*, **182**, 529-535. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.04.014

[7] Wazwaz, A.M. (2006) The Sine-Cosine and the Tanh Methods: Reliable Tools for Analytic Treatment of Nonlinear Dispersive Equations. *Applied Mathematics Computation*, **173**, 150-164. https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.02.047

[8] Wazwaz, A.M. (2005) Nonlinear Variants of the Improved Boussinesq Equation with Compact and Noncompact Structures. *Applied Mathematics Computation*, **49**, 565-574. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2004.07.016

[9] Wazwaz, A.M. (2006) Kinks and Solitons Solutions for the Generalized KdV Equation with Two Power Nonlinearities. *Applied Mathematics Computation*, **183**, 1181-1189. https://doi.org/10.1016/j.amc.2006.06.042

[10] Wazwaz, A.M. (2001) A Study of Nonlinear Dispersive Equations with Solitary-Wave Solutions Having Compact Support. *Mathematics and Computers in Simulation*, **56**, 269-276. https://doi.org/10.1016/S0378-4754(01)00291-9

[11] Ismail, M.S. and Taha, T.R. (1998) A Numerical Study of Compactons. *Mathematics and Computers in Simulation*, No. 47, 519-530.

[12] Jumarie, G. (2006) Modified Riemann-Liouville Derivative and Fractional Taylor Series of Non-Differentiable Functions Further Results. *Computers and Mathematics with Applications*, **51**, 1367-1376.

[13] Sabatier, J., Agrawal, O.P. and Tenreiro Machado, J.A. (2007) Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. Springer, 50, 1648-1650.

[14] Baleanu, D., Diethelm, K., Scalas, E., *et al*. (2012) Fractional Calculus Models and Numerical Methods in Series on Complexity, Monlinearity and Chaos. World Scientific, Singapore, 216, 67-75.

[15] Liu, Y.Q. and Xin, B.G. (2011) Numerical Solutions of a Fractional Predator-Prey System. *Advances in Difference Equations*, **51**, 1159-1162.

[16] Wang, M.L., Li, X.Z. and Zhang, J.L. (2008) The G/G-Expansion Method and Travelling Wave Solutions of Nonlinear Evolution Equations in Mathematical Physics. *Physics Letters A*, **37**, 417-423.

[17] Liu, Y.Q. and Yan, L.M. (2013) Solutions of Fractional Konopelchenko-Dubrovsky and Nizhnik-Novikov-Veselov Equations using a Generalized Fractional Sub-Equation Method. *Abstract and Applied Analysis*, **11**, 515-521.

[18] Khan, N.A., Ara, A. and Mahmood, A. (2012) Numerical Solutions of Time Fractional Burgers Equations: A Comparison between Generalized Differential Transformation Technique and Homotopy Perturbation Methon. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, **24**, 175-193. https://doi.org/10.1108/09615531211199818

[19] He, J.H. (2003) Homotopy Perturbation Method: A New Nonlinear Analytical Technique. *Applied Mathematics and Computation*, **135**, 73-79.

[20] Li, Z.B. and He, J.H. (2010) Fractional Complex Transform for Fractional Differential Equations. *Mathematical and Computational Applications*, **15**, 970-973. https://doi.org/10.3390/mca15050970

[21] 刘式达, 傅遵涛. 一类非线性方程的新周期解[J]. 物理学报, 2002, 51(1): 10-14.

**期刊投稿者将享受如下服务：**

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org