

# The Study of Meromorphic Function Solution of Function Equation of

$$f^{15}(z) + g^{15}(z) + h^{15}(z) + w^{15}(z) = 1$$

E Liang

School of Mathematics, Yunnan normal University, Kunming Yunnan  
Email: 1262558394@qq.com

Received: Dec. 20<sup>th</sup>, 2017; accepted: Jan. 2<sup>nd</sup>, 2018; published: Jan. 12<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

This paper proves that nonconstant meromorphic function  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  in the pole is not more than a single pole with public, and  $\min\{\rho_f, \rho_g, \rho_h, \rho_w\} < \frac{1}{2}$ , the solution of Fermat function equations  $f^{15}(z) + g^{15}(z) + h^{15}(z) + w^{15}(z) = 1$  does not exist.

## Keywords

Fermat Type Functional Equation, Meromorphic Functions, Order of Growth

---

# 函数方程 $f^{15} + g^{15} + h^{15} + w^{15} = 1$ 的亚纯函数解的研究

梁 娥

云南师范大学数学学院, 云南 昆明  
Email: 1262558394@qq.com

收稿日期: 2017年12月20日; 录用日期: 2018年1月2日; 发布日期: 2018年1月12日

---

## 摘 要

本文证明了若非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  的极点中至多只有一个公共单级极点, 且

$\min\{\rho_f, \rho_g, \rho_h, \rho_w\} < \frac{1}{2}$ , 则  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  一定不是 Fermat 型函数方程  $f^{15}(z) + g^{15}(z) + h^{15}(z) + w^{15}(z) = 1$  的解。

## 关键词

Fermat 型函数方程, 亚纯函数, 增长极

Copyright © 2018 by author and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言及主要结果

本文使用 Nevanlinna 值分布理论的基本结果及其标准记号[1]。我们考虑如下费马型函数方程:

$$f^n + g^n + h^n + w^n = 1 \quad (1)$$

的非常数亚纯函数解, G.G.GUNDERSEN 在文献[2]中给出了当  $n = 8$  时, 函数方程(1)的超越亚纯函数解的例子。

我们也知道, 用 Cartan 定理易证  $n \geq 16$  时, 函数方程(1)不存在非常数亚纯函数解, 那么就存在一个公开性的问题: 当  $9 \leq n \leq 15$  时, 函数方程(1)是否存在非常数亚纯函数解?

基于这个问题, 本文我们将研究当  $n = 15$  时, 函数方程(1)的亚纯函数解的状况。

之前苏敏、李玉华[3]证明了: 费马型函数方程  $f^6(z) + g^6(z) + h^6(z) = 1$  无级小于 1 的非常数整函数解以及费马型函数方程  $f^8(z) + g^8(z) + h^8(z) = 1$  不存在级小于 1 的非常数亚纯函数解。

加上直接研究费马型函数方程  $f^{15}(z) + g^{15}(z) + h^{15}(z) + w^{15}(z) = 1$  的非平凡亚纯解较难, 从而在引入级小于 1 的条件的启发下, 本文得到了以下结果:

定理 1: 若非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  的极点中至多只有一个是公共单级极点, 且  $\min\{\rho_f, \rho_g, \rho_h, \rho_w\} < 1/2$ , 则  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  一定不是 Fermat 型函数方程  $f^{15}(z) + g^{15}(z) + h^{15}(z) + w^{15}(z) = 1$  的解。

## 2. 几个辅助结果

引理 1 [4]: 设函数  $f(z)$  于开平面亚纯,  $n$  为正整数, 则  $f(z)$  与  $f^{(n)}(z)$  有相同的级与下级。

引理 2 [5]: 若  $f_j(z) (j=1, 2, \dots, k)$  是非常数亚纯函数, 且  $\max\{\rho_{f_1}, \rho_{f_2}, \dots, \rho_{f_k}\} < 1$ , 那么

$$\liminf_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{|z|=r} \sum_{j=1}^k \left| \frac{f'_j(z)}{f_j(z)} \right| \right\} = 0.$$

特别的, 若非常数亚纯函数  $f(z)$  的级  $\rho_f < 1$ , 则有  $\liminf_{r \rightarrow +\infty} \left\{ \max_{|z|=r} \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \right\} = 0$ 。

引理 3 [6]: 若  $\psi_j(z) (j=1, 2, \dots, k)$  为区域  $D$  上  $k$  个亚纯函数, 且  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$  线性无关, 那么  $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k$  的 Wronskian 行列式

$$W(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_k) \triangleq \begin{vmatrix} \psi_1 & \cdots & \psi_k \\ \psi_1' & \cdots & \psi_k' \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1^{(k-1)} & \cdots & \psi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

引理 4: 若非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  无公共单级极点, 且  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  满足函数方程

$$f^{15} + g^{15} + h^{15} + w^{15} = 1, \tag{2}$$

令

$$\tau = \begin{vmatrix} f^3 & g^3 & h^3 & w^3 \\ f^2 f' & g^2 g' & h^2 h' & w^2 w' \\ 14f(f')^2 + f^2 f'' & 14g(g')^2 + g^2 g'' & 14h(h')^2 + h^2 h'' & 14w(w')^2 + w^2 w'' \\ L_3(f) & L_3(g) & L_3(h) & L_3(w) \end{vmatrix},$$

其中  $L_3(\mu) = 182(\mu')^3 + 42\mu\mu'\mu'' + \mu^2\mu'''$ , ( $\mu$  为非常数亚纯函数)。

则  $\tau$  是整函数。

引理 4 的证明:

因为非常数亚纯函数  $f, g, h, w$  满足函数方程(2), 则  $f^{15}, g^{15}, h^{15}, w^{15}$  线性无关。事实上, 若  $f^{15}, g^{15}, h^{15}, w^{15}$  线性相关, 则  $f, g, h, w$  中至少有一个为常数函数, 矛盾。结合引理 3, 则有:

$$W(f^{15}, g^{15}, h^{15}, w^{15}) = \begin{vmatrix} f^{15} & g^{15} & h^{15} & w^{15} \\ 15f^{14}f' & 15g^{14}g' & 15h^{14}h' & 15w^{14}w' \\ L_1(f) & L_1(g) & L_1(h) & L_1(w) \\ L_2(f) & L_2(g) & L_2(h) & L_2(w) \end{vmatrix} = 3375f^{12}g^{12}h^{12}w^{12}\tau \neq 0 \tag{3}$$

其中  $L_1(\mu) = 210\mu^{13}(\mu')^2 + 15\mu^{14}\mu''$ ;  $L_2(\mu) = 2730\mu^{12}(\mu')^3 + 630\mu^{13}\mu'\mu'' + 15\mu^{14}\mu'''$ , (其中  $\mu$  为非常数亚纯函数)。

故  $\tau \neq 0$ 。此外, 结合函数方程  $f^{15} + g^{15} + h^{15} + w^{15} = 1$  以及伏朗斯基行列式的特点可得到:

$$\begin{aligned} W(f^{15}, g^{15}, h^{15}, w^{15}) &= \begin{vmatrix} 15g^{14}g' & 15h^{14}h' & 15w^{14}w' \\ L_1(g) & L_1(h) & L_1(w) \\ L_2(g) & L_2(h) & L_2(w) \end{vmatrix} \\ &= 3375g^{12}h^{12}w^{12} \begin{vmatrix} g^2g' & h^2h' & w^2w' \\ 14g(g')^2 + g^2g'' & 14h(h')^2 + h^2h'' & 14w(w')^2 + w^2w'' \\ L_3(g) & L_3(h) & L_3(w) \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{4}$$

其中  $L_3(\mu) = 182(\mu')^3 + 42\mu\mu'\mu'' + \mu^2\mu'''$ , (其中  $\mu$  为非常数亚纯函数)。

由(3)、(4)可得

$$\tau = \frac{1}{f^{12}} \begin{vmatrix} g^2g' & h^2h' & w^2w' \\ 14g(g')^2 + g^2g'' & 14h(h')^2 + h^2h'' & 14w(w')^2 + w^2w'' \\ L_3(g) & L_3(h) & L_3(w) \end{vmatrix} \tag{5}$$

同理, 可得:

$$\tau = \frac{1}{g^{12}} \begin{vmatrix} f^2 f' & h^2 h' & w^2 w' \\ 14f(f')^2 + f^2 f'' & 14h(h')^2 + h^2 h'' & 14w(w')^2 + w^2 w'' \\ L_3(f) & L_3(h) & L_3(w) \end{vmatrix} \quad (6)$$

$$\tau = \frac{1}{h^{12}} \begin{vmatrix} f^2 f' & g^2 g' & w^2 w' \\ 14f(f')^2 + f^2 f'' & 14g(g')^2 + g^2 g'' & 14w(w')^2 + w^2 w'' \\ L_3(f) & L_3(g) & L_3(w) \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\tau = \frac{1}{w^{12}} \begin{vmatrix} f^2 f' & g^2 g' & h^2 h' \\ 14f(f')^2 + f^2 f'' & 14g(g')^2 + g^2 g'' & 14h(h')^2 + h^2 h'' \\ L_3(f) & L_3(g) & L_3(h) \end{vmatrix} \quad (8)$$

实际上, 因为定义的  $\tau(z)$  为涉及  $f, g, h, w$  的行列式, 则若  $\tau(z)$  有极点, 其极点只会在  $f, g, h, w$  的极点处产生, 设  $z_\infty$  为  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  的  $m, n, p, q$  重极点, 设  $f, g, h, w$  在  $z_\infty$  处的洛朗展开式为

$$f(z) = \frac{A}{(z-z_\infty)^m} (1+o(1)), \quad g(z) = \frac{B}{(z-z_\infty)^n} (1+o(1)),$$

$$h(z) = \frac{C}{(z-z_\infty)^p} (1+o(1)), \quad w(z) = \frac{D}{(z-z_\infty)^q} (1+o(1)),$$

由(2)式成立可知, 若继续  $\max\{m, n, p, q\} = m$ , 根据等式两边对称性, 则  $f, g, h, w$  中至少有两个亚纯函数的极点重数是相同的, 不妨设  $\max\{m, n, p, q\} = m = n \geq p \geq q$ 。根据(5)式,

$$\tau = \frac{g^2 g' h^2 h' w^2 w'}{f^{12}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 \frac{g'}{g} + \frac{g''}{g'} & 14 \frac{h'}{h} + \frac{h''}{h'} & 14 \frac{w'}{w} + \frac{w''}{w'} \\ L_4(g) & L_4(h) & L_4(w) \end{vmatrix}, \quad (9)$$

其中  $L_4(\mu) = 182 \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2 + 42 \frac{\mu''}{\mu} + \frac{\mu'''}{\mu'}$ , (其中  $\mu$  为非常数亚纯函数)。

而行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 14 \frac{g'}{g} + \frac{g''}{g'} & 14 \frac{h'}{h} + \frac{h''}{h'} & 14 \frac{w'}{w} + \frac{w''}{w'} \\ L_4(g) & L_4(h) & L_4(w) \end{vmatrix} = \left\{ \left[ \left( 14 \frac{h'}{h} + \frac{h''}{h'} \right) - \left( 14 \frac{g'}{g} + \frac{g''}{g'} \right) \right] \left[ \left( 182 \left( \frac{w'}{w} \right)^2 + 42 \frac{w''}{w} + \frac{w'''}{w'} \right) - \left( 182 \left( \frac{g'}{g} \right)^2 + 42 \frac{g''}{g} + \frac{g'''}{g'} \right) \right] \right. \\ \left. - \left[ \left( 14 \frac{w'}{w} + \frac{w''}{w'} \right) - \left( 14 \frac{g'}{g} + \frac{g''}{g'} \right) \right] \left[ \left( 182 \left( \frac{h'}{h} \right)^2 + 42 \frac{h''}{h} + \frac{h'''}{h'} \right) - \left( 182 \left( \frac{g'}{g} \right)^2 + 42 \frac{g''}{g} + \frac{g'''}{g'} \right) \right] \right\} \quad (10)$$

通过代换  $f, g, h, w$  的洛朗展开式进行运算可得, 上面的行列式实际可以表示为

$$\frac{3375(nq^2 - np^2 - pq^2 + qp^2 + pn^2 - qn^2)}{(z - z_\infty)^3} (1 + o(1)),$$

同样通过代换  $f, g, h, w$  的洛朗展开式计算可得到

$$\frac{g^2 g' h^2 h' w^2 w'}{f^{12}} = R(z - z_\infty)^{12m - 3(n + p + q + 1)} (1 + o(1))$$

(其中  $R = \frac{-B^3 C^3 D^3 npq}{A^{12}}$  是常数), 从而由(9)式可知, 当

$$12m - 3(n + p + q + 1) \geq 3 \tag{*}$$

时,  $z_\infty$  不是  $\tau$  的极点。下面我们将分类讨论如下:

I) 若  $m = n = p = q \geq 2$ ,

易见此情况下满足(\*)式, 故此时  $z_\infty$  不是  $\tau$  的极点。

II) 若  $m = n = p > q > 1$ ,

此情况下  $q \geq 2, m \geq 3$ , 也是符合(\*)式, 故此时  $z_\infty$  不是  $\tau$  的极点。

III) 若  $m = n > p \geq q \geq 1$ ,

此情况下  $q \geq 1, p \geq 1, m \geq 2$ , 也是符合(\*)式, 故此时  $z_\infty$  不是  $\tau$  的极点。

IV)  $m = n \geq p > q \geq 1$ ,

此情况下  $q \geq 1, p \geq 2, m \geq 2$ , 符合(\*)式, 故此时  $z_\infty$  不是  $\tau$  的极点。

V)  $m = n \geq p > q = 0$ ,

即在  $z_\infty$  处函数  $g(z)$  解析而另外三个函数不解析, 该情况下  $q = 0, p \geq 1, m = n \geq 1$ , 显然符合(\*)式, 故此时  $z_\infty$  不是  $\tau$  的极点。

VI)  $m = n = p = q = 1$ ,

不妨设  $z_\infty = 0$  为  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  的公共单级极点, 则  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  在 0 处的洛朗展开式为

$$f(z) = \frac{A}{z} + A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + O(z^4), \quad g(z) = \frac{B}{z} + B_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 z^3 + O(z^4),$$

$$h(z) = \frac{C}{z} + C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + O(z^4), \quad w(z) = \frac{D}{z} + D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 z^3 + O(z^4).$$

通过计算可知(10)式在公共单级极点处可能产生一阶极点, 从而  $\tau$  在公共单级极点  $z_\infty = 0$  处可能不解析。

综上所述, 若非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  无公共单级极点, 则  $\tau$  为整函数, 引理 4 得证。

### 3. 定理 1 的证明

记  $\tau(z)$  为引理 4 中所定义的行列式, 由引理 4 的证明过程知  $\tau(z) \neq 0$ , 且由(5)、(6)、(7)、(8)可得

$$\tau^4 = \frac{1}{(fghw)^3} \begin{vmatrix} \frac{g'}{g} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w} \\ L_5(g) & L_5(h) & L_5(w) \\ L_6(g) & L_6(h) & L_6(w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{f'}{f} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w} \\ L_5(f) & L_5(h) & L_5(w) \\ L_6(f) & L_6(h) & L_6(g) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{w'}{w} \\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(w) \\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(w) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{h'}{h} \\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(h) \\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(h) \end{vmatrix}$$

其中  $\tau^4 = L_5(\mu) = 14 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^2 + \frac{\mu''}{\mu}$ ;  $L_6(\mu) = 182 \left( \frac{\mu'}{\mu} \right)^3 + 42 \frac{\mu'}{\mu} \cdot \frac{\mu''}{\mu} + \frac{\mu'''}{\mu}$  ( $\mu$  为非常数亚纯函数)。

从而有

$$\tau^{15} = \frac{\tau^3}{(fghw)^9} \begin{vmatrix} \frac{g'}{g} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w} \\ L_5(g) & L_5(h) & L_5(w) \\ L_6(g) & L_6(h) & L_6(w) \end{vmatrix}^3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{f'}{f} & \frac{h'}{h} & \frac{w'}{w} \\ L_5(f) & L_5(h) & L_5(w) \\ L_6(f) & L_6(h) & L_6(g) \end{vmatrix}^3 \quad (**)$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{w'}{w} \\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(w) \\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(w) \end{vmatrix}^3 \cdot \begin{vmatrix} \frac{f'}{f} & \frac{g'}{g} & \frac{h'}{h} \\ L_5(f) & L_5(g) & L_5(h) \\ L_6(f) & L_6(g) & L_6(h) \end{vmatrix}^3$$

因为非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  满足费马型函数方程(2), 所以  $\rho_f = \rho_g = \rho_h = \rho_w$ , 又  $\min\{\rho_f, \rho_g, \rho_h, \rho_w\} < \frac{1}{2}$ , 所以有  $\rho_f = \rho_g = \rho_h = \rho_w < \frac{1}{2}$ , 下面分两种情况来讨论:

情况一: 若非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  无公共单级极点, 则采用反证法, 假设函数方程(2)存在级小于  $\frac{1}{2}$  的非常数亚纯函数解, 根据引理 1 知

$$\rho_f = \rho_{f'} = \rho_{f''} = \rho_{f'''}, \rho_g = \rho_{g'} = \rho_{g''} = \rho_{g'''},$$

$$\rho_h = \rho_{h'} = \rho_{h''} = \rho_{h'''}, \rho_w = \rho_{w'} = \rho_{w''} = \rho_{w'''}.$$

于是  $\max\{\rho_f, \dots, \rho_{f'''}, \rho_g, \dots, \rho_{g'''}, \rho_h, \dots, \rho_{h'''}, \rho_w, \dots, \rho_{w'''}\} < \frac{1}{2}$ , 又根据引理 2 和(\*\*)式有

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|z|=r} |\tau(z)|^4 \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \max_{|z|=r} (14 \times 182)^{12} \left( \left| \frac{f'}{f} \right| + \left| \frac{f''}{f'} \right| + \left| \frac{f'''}{f''} \right| + \left| \frac{g'}{g} \right| \right. \\ \left. + \left| \frac{g''}{g'} \right| + \left| \frac{g'''}{g''} \right| + \left| \frac{h'}{h} \right| + \left| \frac{h''}{h'} \right| + \left| \frac{h'''}{h''} \right| + \left| \frac{w'}{w} \right| + \left| \frac{w''}{w'} \right| + \left| \frac{w'''}{w''} \right| \right)^{12} = 0$$

再结合引理 4 的结论知  $\tau$  为整函数, 则  $\tau(z) = 0$ , 这与  $\tau(z) \neq 0$  矛盾.

情况二: 若非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  仅有一个公共单级极点  $z_0$ , 不妨设  $z_0 = 0$ , 由函数方程(2)有  $f^{15}(z^2) + g^{15}(z^2) + h^{15}(z^2) + w^{15}(z^2) = 1$  成立, 兹令

$$F(z) = f(z^2), G(z) = g(z^2), H(z) = h(z^2), W(z) = w(z^2)$$

则有  $F^{15}(z) + G^{15}(z) + H^{15}(z) + W^{15}(z) = 1$ , 且  $\rho_F = \rho_G = \rho_H = \rho_W = 2\rho_f < 2 \times \frac{1}{2} = 1$ , 而非常数亚纯函数  $f(z), g(z), h(z), w(z)$  仅有一个公共单重极点 0, 则  $F(z), G(z), H(z), W(z)$  无公共单级极点, 此时可转化为同情况一一样的讨论亦得出矛盾.

综上, 定理 1 得证.

## 参考文献 (References)

- [1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京: 科学出版社, 1982.

- [2] Gundersen, G.G. (2003) Complex Functional Equations.
- [3] 苏敏, 李玉华. 关于函数方程非平凡亚纯解的研究[J]. 云南师范大学学报: 自然科学版, 2009, 29(2): 44.
- [4] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [5] Li, Y.H. (2000) Uniqueness Theorems for Meromorphic Functions of Order Less than One. *Northeastern Mathematical Journal*, **16**, 411-416.
- [6] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

**知网检索的两种方式:**

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2160-7583, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [pm@hanspub.org](mailto:pm@hanspub.org)