Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(2), 174-181
Published Online March 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.82022

Hans汉斯

Two Classes of Optical Orthogonal Code with Weight 3

Yuemei Huang[1], Guizhi Zhang[2*]

[1]College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Huhehot Inner Mongolia
[2]Elementary Education College of Hulunbuir University, Hailar Inner Mongolia
Email: yuemei1981@126.com, *zgz_hlbr@163.com

Received: Mar. 4th, 2018; accepted: Mar. 18th, 2018; published: Mar. 26th, 2018

Abstract

The optical orthogonal code had been studied since 1989. The study of optical orthogonal codes has been motivated by applications in optical code-division multiple access system. In this paper, the maximum volume has been determined for two classes of two dimensional optical orthogonal codes of hamming weight 3 with auto-correlation parameter that is 1,2 and cross-correlation parameter is 2, and gave the direct construction of it.

Keywords

Two-Dimensional, Optical Orthogonal Code, Orbit, Maximum

两类权重为3的二维光正交码的容量及构造

黄月梅[1]，张桂芝[2*]

[1]内蒙古师范大学，数学科学学院，内蒙古 呼和浩特
[2]呼伦贝尔学院，初等教育学院，内蒙古 海拉尔
Email: yuemei1981@126.com, *zgz_hlbr@163.com

收稿日期：2018年3月4日；录用日期：2018年3月18日；发布日期：2018年3月26日

摘　要

自1989年提出光正交码的概念以来，关于光正交码的最大容量及构造方法一度成为组合设计与编码理论领域的研究热点。光正交码是为码分多址光纤信道而设计的专用码。本文运用组合计数和代数方法确定了汉明重为3，自相关值为1、2，互相关值为2的两类二维光正交码的最大容量，并给出相应码字结构。

*通讯作者。

文章引用: 黄月梅, 张桂芝. 两类权重为 3 的二维光正交码的容量及构造[J]. 理论数学, 2018, 8(2): 174-181.
DOI: 10.12677/pm.2018.82022

关键词

二维，光正交码，轨道，最大容量

1. 引言

设 n,m,λ_a 和 λ_c 是正整数，则一个参数为 $(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)$ 的二维光正交码，C（简单记作 $2\text{-}D(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$），是满足特定条件的 $n\times m$ 阶 $(0,1)$-矩阵(码字)的集合，其中 k，λ_a 和 λ_c 分别称为该正交码的权重，自相关值和互相关值。令 $\Omega(n\times m,k)$ 表示 $I_n\times Z_m$ 中所有 k 元组的集合，其中 $I_n=\{0,1,\cdots,n-1\}$，Z_m 是模 m 的剩余类加法群。设 C 是一给定的二维光正交码，对每个 $(0,1)$-矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times m}\in C$，令其行标和列标分别取值于集合 I_n 和 Z_m，使得 $(i,j)\in X_A$ 当且仅当矩阵 A 的元素 $a_{ij}=1$。于是，二维 $(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$，$C$，可以视作集合 $\Omega(n\times m,k)$ 的一个子集，其元素满足下列两个条件：

1) 自相关性：对任意 $X\in C$ 和每个 $\tau\in Z_m\setminus\{0\}$，有 $|X\cap(Y+\tau)|\le\lambda_a$；

2) 互相关性：对任意的 $X\in C$，$Y\in C$ 且 $X\ne Y$ 和每个 $\tau\in Z_m$，有 $|X\cap(Y+\tau)|\le\lambda_c$。

其中 $X+\tau=\{(x,i+\tau):(x,i)\in X\}$ 且所有加法模 m 计算。

当 $n=1$ 时，一个 $2\text{-}D(1\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$ 通常称作一维 $(m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$。二维光正交码中所含码字个数称为其容量。对给定的正整数 n 和 m，用 $\Phi(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)$ 表示所有 $2\text{-}D(n\times m,k,\lambda_a,\lambda_c)-OOC$ 的最大容量。若 $\lambda_a=\lambda_c=\lambda$，上述符号可简写为 $(m,k,\lambda)-OOC$ 和 $\Phi(n\times m,k,\lambda)$。

光正交码是为码分多址(OCDMA)光纤信道而设计的一种专用码。光正交码的研究始于 1989 年[1]。关于一维光正交码已有许多研究结果，参见文献[2] [3]及其中所列参考文献。实际应用，需要大容量相关性能好的光正交码。二维光正交码正是为克服一维光正交码的码字长，稳定性差等不足而提出的。二维光正交码的研究主要集中在 $k=3,4,5$ 的情况，参见文献[4]中所列的参考文献。当 $\lambda_a=\lambda_c=1$ 时，王建民等[5]，冯弢等[2]和王小苗等[6]给出 $2\text{-}D(n\times m,3,1)-OOC$，$2\text{-}D(n\times m,3,2,1)-OOC$ 的最大容量及部分无限类的构造方法。本文确定当 $\lambda_a=1,2$ 时，$2\text{-}D(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$ 的最大容量，并给出直接构造法。我们主要证明

定理 1. 设 n 和 m 是正整数，则

$$\Phi(n\times m,3,1,2)=\begin{cases}\dfrac{n\left[n^2m^2-3nm-3m+5\right]}{6}, & (m,12)=1,5,7,11,\\ \dfrac{n\left[n^2m^2-6nm-3m+14\right]}{6}, & (m,12)=2,10,\\ \dfrac{n\left[n^2m^2-3nm-3m+3\right]}{6}, & (m,12)=3,9,\\ \dfrac{n\left[n^2m^2-6nm-3m+20\right]}{6}, & (m,12)=4,8,\\ \dfrac{n\left[n^2m^2-6nm-3m+18\right]}{6}, & (m,12)=6,\\ \dfrac{n\left[n^2m^2-6nm-3m+24\right]}{6}, & (m,12)=0.\end{cases}$$

2. 基础知识

下面先介绍在证明结论时所涉及到的基本概念和相关结论。

对任意的 $g\in Z_m$ 和 $X\in\Omega(n\times m,k)$，定义 $X+g=\{(x,i+g):(x,i)\in X\}$，称为 X 的平移。于是，群 Z_m 作用于 $\Omega(n\times m,k)$。集合 $O(X)=\{X+g:g\in Z_m\}$ 称为 X 所生成的轨道。包含 m 个元素的轨道称为长轨道，否则称为短轨道。显然，在群 Z_m 的作用下集合 $\Omega(n\times m,k)$ 被划分成若干个轨道。

设 $X\in\Omega(n\times m,k)$。对任意 $X\in I_n$，定义 X 的 (x,x)-纯差是一个多重集合 $\Delta_{xx}(X)=\{j-i:(x,i),(x,j)\in X,i\neq j\}$，其中加法模 m 计算。再令 $\lambda(X)$ 表示多重集 $\bigcup_{x\in I_n}\Delta_{xx}(X)$ 中元素的最大重数。于是由文献[4]，

$$\lambda(X)=\max\{|X\cap(X+\tau)|:\tau\in Z_m\setminus\{0\}\} \tag{1.1}$$

例 1. 下列四个 $(0,1)$-矩阵构成一个 $2\text{-}D(3\times 2,3,1,2)-OOC$。

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&1&0&0\end{pmatrix}$$

通过标记矩阵中 1 的位置，四个矩阵可以转换成 $I_2\times Z_4$ 上的四个 3-元组

$$X_1=\{(0,0),(0,1),(1,0)\},\quad X_2=\{(0,0),(0,1),(1,1)\},$$

$$X_3=\{(0,0),(1,0),(1,1)\},\quad X_3=\{(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

3. 当 $\lambda_a=1,2$ 时，$2\text{-}D(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$ 的最大容量

根据二维光正交码的定义和式(1.1)，不难证明一个 $2\text{-}D(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$，$C$，是集合 $\Omega(n\times m,3)$ 在群 Z_m 作用下一些长轨道代表元 X 的集合。从而 $\Phi(n\times m,3,\lambda_a,2)$ 是 $\Omega(n\times m,3)$ 在群 Z_m 作用下满足 $\lambda(X)\le\lambda_a$ 的长轨道 $O(X)$ 的个数。

我们在文献[4]中证明了一个 $2\text{-}D(n\times m,k,k-1)-OOC$ 的最大容量就是集合 $\Omega(n\times m,k)$ 在群 Z_m 作用下所有长轨道个数。

引理 2.1：([4])设 n，m 和 k 是正整数。$\mu(x)$ 是莫比乌斯函数，则

$$\Phi(n\times m,k,k-1)=\frac{1}{m}\sum_{d|(k,m)}\mu(d)\binom{\frac{nm}{d}}{\frac{k}{d}}$$

因此 $\Phi(n\times m,3,2)$ 恰好是 $\Omega(n\times m,3)$ 在群 Z_m 作用下所有长轨道的个数。因此引理 2.1 中取 $k=3$ 得下面的推论。

推论 2.2：设 n 和 m 是正整数。则

$$\Phi(n\times m,3,2)=\begin{cases}\dfrac{n(nm-1)(nm-2)}{6}, & m\equiv 1,2\pmod 3,\\[2mm] \dfrac{n^2m(nm-3)}{6}, & m\equiv 0\pmod 3.\end{cases}$$

由平移的定义，一个 $2\text{-}D(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$ 的轨道代表元的形式总可以写作 $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\}$，其中 $x,y,z\in I_n,i,j\in Z_m$，并且可以分如下三种形式：

形式 1：$X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m$ 且 $i\neq j$；

形式 2： $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\}, x,y\in I_n, x\neq y, i,j\in Z_m$；

形式 3： $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\}, x,y,z\in I_n$， x,y,z 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

令 $B=\{0,i,j\}$ 表示码字 $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\}$ 的导出组。定义 $B=\{0,i,j\}$ 的差集为多重集合 $\Delta B=\{j-i(\mathrm{mod}\,m)\,|\,i,j\in B\}$，并且 ΔB 中基础元素的集合又称为 ΔB 的支集，记作 $supp(\Delta B)$。则由文献[3]的引理 2.2 得

$$|supp(\Delta B)|=\begin{cases}2, B=\left(\dfrac{m}{3}\right)Z_m,\\ 3, B\subset\left(\dfrac{m}{4}\right)Z_m,\\ 4, B=\{0,i,2i\}\text{且}|supp(\Delta B)|\neq 2,3,\\ 5, B=\left\{0,i,\dfrac{m}{2}\right\}\text{且}|supp(\Delta B)|\neq 3,\\ 6, B=\{0,i,j\}\text{且}|supp(\Delta B)|\neq 2,3,4,5.\end{cases}$$

由此可得下列结论：

引理 2.3：设 m 是正整数。码字 $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\}$ 满足 $\lambda(X)=2$ 当且仅当 $B=\{0,i,j\}$ 有下列形式之一：

1) $B\subset\left(\dfrac{m}{4}\right)Z_m$；

2) $B=\{0,i,2i\}$，其中 $ri\neq 0(\mathrm{mod}\,m)$， $r=3,4$；

3) $B=\{0,i,m/2\}$，其中 $4i\neq 0(\mathrm{mod}\,m)$。

设 Q 是 $\Omega(n\times m,3)$ 在群 Z_m 作用下的任意轨道。若 $X,Y\in Q$，则 $\bigcup_{x\in I_n}\Delta_{xx}(X)=\bigcup_{x\in I_n}\Delta_{xx}(Y)$ 且 $\lambda(X)=\lambda(Y)$。于是，有下列结论：

引理 2.4：对 $X\in\Omega(n\times m,3)$，若 $\lambda(X)=2$，则 X 只能有下列形式之一：

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\}$，其中 $x\in I_n$， $i,j\in Z_m\setminus\{0\}$ 且 $i\neq j$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\}$，其中 $x\neq y\in I_n$， $i,j\in Z_m$ 且 $i\neq 0$。

4. 当 $\lambda_a=1,2$ 时， $2\text{-}D(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$ 的最大容量

为确定 $\Phi(n\times m,3,1,2)$ 的值，我们首先要确定满足条件 $\lambda(X)=2$ 的所有长轨道的个数。令 $\Theta(2)$ 表示 $\Omega(n\times m,3)$ 在群 Z_m 作用下所有满足条件 $\lambda(X)=2$ 的长轨道 $O(X)$ 的集合。根据引理 2.4， $\Theta(2)$ 可以写成两个互不相交的集合的并，不妨设 $\Theta(2)=\Theta_1\cup\Theta_2$， 其中

$$\Theta_1=\{O(X):X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m\setminus\{0\},i\neq j\text{且}\lambda(X)=2\};$$

$$\Theta_2=\{O(X):X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m,i\neq 0\text{且}\lambda(X)=2\}$$

于是， $|\Theta(2)|=|\Theta_1|+|\Theta_2|$。下面分别计算 Θ_1 和 Θ_2 的大小。

根据引理 2.3， Θ_1 又可以写成下列三个互不相交的子集合的并， $\Theta_1=\bigcup_{i=1}^{3}\Theta_{1i}$，其中

$$\Theta_{11}=\{O(X):X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},i,j\in\{m/4,m/2,3m/4\}\text{且}i\neq j\};$$

$$\Theta_{12}=\{O(X):X=\{(x,0),(x,i),(x,2i)\},ri\neq 0(\mathrm{mod}\,m),r=3,4\};$$

$$\Theta_{13}=\left\{O(X):X=\left\{(x,0),(x,i),(x,m/2)\right\},4i\neq 0(\bmod m)\right\}。$$

引理 3.1：设 n 和 m 是正整数，若 $4|m$，则 $|\Theta_{11}|=n$，否则为 0。

证明：根据集合 Θ_{11} 的定义，对给定的 $x\in I_n$，若 $O(X)\in\Theta_{11}$，则 $X=\left\{(x,0),(x,m/4),(x,m/2)\right\}$，$X=\left\{(x,0),(x,m/4),(x,3m/4)\right\}$ 或 $X=\left\{(x,0),(x,m/2),(x,3m/4)\right\}$。显然此三个区组属于同一条轨道。于是，结论得证。

引理 3.2：设 n 和 m 是正整数，则

$$|\Theta_{12}|=\begin{cases}\dfrac{n(m-1)}{2}, & (m,12)=1,5,7,11,\\ \dfrac{n(m-2)}{2}, & (m,12)=2,10,\\ \dfrac{n(m-3)}{2}, & (m,12)=3,9,\\ \dfrac{n(m-4)}{2}, & (m,12)=4,6,8,\\ \dfrac{n(m-6)}{2}, & (m,12)=0.\end{cases}$$

证：设 Q 是 Θ_{12} 中任意轨道，则必有 $X=\left\{(x,0),(x,i),(x,2i)\right\}$，$ri\neq 0(\bmod m)$ 且 $r=3,4$ 使得 $Q=O(X)$。故 $\Delta_{xx}(X)=\left\{\pm i,\pm 2i\right\}$。再令 $X'=\left\{(x',0),(x',i'),(x',2i')\right\}$，$ri'\neq 0(\bmod m)$ 且 $r=3,4$。若 X 和 X' 属于同一条轨道，则总存在某个 $d\in Z_m$ 使得 $X=X'+d$。这等价于 $\left\{(x,0),(x,i),(x,2i)\right\}=\left\{(x',0),(x',i'+d),(x',2i'+d)\right\}$，即，$x=x'$ 且 $\left\{0,i,2i\right\}=\left\{d,i'+d,2i'+d\right\}$。由此得 $d\in\left\{0,i,2i\right\}$。若 $d=0$，则 $\left\{i,2i\right\}=\left\{i',2i'\right\}$。由此得 $i'=i$，否则若 $i'=2i$，$2i'=i$。于是得 $3i\equiv 0(\bmod m)$，这与 Θ_{12} 的定义矛盾。若 $d=i$，则 $\left\{0,2i\right\}=\left\{i'+i,2i'+i\right\}$。由此得 $i'+i=0$，$2i'+i=2i$ 或 $2i'+i=0$，$i'+i=2i$。经计算仍得 $3i\equiv 0(\bmod m)$，矛盾。若 $d=2i$，则 $\left\{0,i\right\}=\left\{i'+2i,2i'+2i\right\}$。由此得 $2i'+2i=0$，即 $i'=-i$。否则若 $i'+2i=0$，则仍得 $3i\equiv 0(\bmod m)$，矛盾。综上分析，若 X 和 X' 属于同一条轨道，则 $i'\in\left\{i,-i\right\}$。反之显然。故，$|\Theta_{12}|=n(m-\varepsilon_1)/2$，其中 ε_1 表示满足方程 $ri\equiv 0(\bmod m)$，$r=3,4$ 的 i 的个数。经详细计算引理结论得证。

引理 3.3：设 n 和 m 是正整数。则

$$|\Theta_{13}|=\begin{cases}0, & (m,2)=1,\\ \dfrac{n(m-2)}{2}, & (m,4)=2,\\ \dfrac{n(m-4)}{2}, & (m,4)=4.\end{cases}$$

证：证明过程与引理 **3.1** 类似。

引理 3.4：设 n 和 m 是正整数。则

$$|\Theta_{1}|=\begin{cases}\dfrac{n(m-1)}{2}, & (m,12)=1,5,7,11,\\ n(m-2), & (m,12)=2,10,\\ \dfrac{n(m-3)}{2}, & (m,12)=3,9,\\ n(m-3), & (m,12)=4,6,8,\\ n(m-4), & (m,12)=0.\end{cases}$$

证：由 $\Theta_1=\bigcup_{i=1}^{3}\Theta_{1i}$，且 $\Theta_{1i},i=1,2,3$ 互不相交，故 $|\Theta_1|=\sum_{i=1}^{3}|\Theta_{1i}|$。经详细计算结论得证。

引理 3.5：设 n 和 m 是正整数。则

$$|\Theta_2|=\begin{cases}0, & (m,2)=1,\\ \dfrac{n(n-1)m}{2}, & (m,2)=0.\end{cases}$$

证：设 Q 是 Θ_2 中任意一条轨道。则由引理 2.3 知，必存在 $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\}$ 使得 $Q=O(X)$，其中 $x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m,i\neq 0$ 且 $\lambda(X)=2$。而且 $\Delta_{xx}X=\{\pm i\}$，$\Delta_{xy}X=\{j,j-i\}$。这里 $j\neq j-i$，否则 $i\equiv 0(\operatorname{mod} m)$，这与 $i\neq 0$ 矛盾。因此若 $2|m$，则 $\lambda(X)=2$ 当且仅当 $i=-i$ 即 $i=\dfrac{m}{2}$。于是，若 $2|m$，则集合 Θ_2 可以改写为

$$\bar{\Theta}_2=\left\{O(Y):Y=\left\{(x,0),\left(x,\frac{m}{2}\right),(y,j)\right\},x\neq y\in I_n,j\in Z_m\right\}$$

为确定 $\bar{\Theta}_2$ 中轨道个数，我们定义映射 $\sigma:\bar{\Theta}_2\to|\bar{\Theta}_2|$ 使得 $\sigma(Y)=O(Y)$。对任意 $Q\in\bar{\Theta}_2$，下面先确定 $\sigma^{-1}(Q)\subseteq\bar{\Theta}_2$ 的值。

设 $Q=O(Y)$，其中 $Y\in\bar{\Theta}_2$。若 $Y'=\left\{(x',0),\left(x',\frac{m}{2}\right),(y',j')\right\}\in\sigma^{-1}(Q)$，其中 $x'\neq y'\in I_n$，$j'\in Z_m$。则 $O(Y)=O(Y')$，故存在 $d\in Z_m$ 使得 $Y=Y+d$，即 $\left\{(x,0),\left(x,\frac{m}{2}\right),(y,j)\right\}=\left\{(x',d),\left(x',\frac{m}{2}+d\right),(y',j'+d)\right\}$，这等价于 $\left\{(x,0),\left((x,\frac{m}{2}\right)\right\}=\left\{(x',d),\left(x',\frac{m}{2}+d\right)\right\}$ 且 $(y,j)=(y',j'+d)$。由此得 $(x,y)=(x',y')$ 且 $d=0$ 或 $\dfrac{m}{2}$。于是 $j'\in\left\{j,j-\frac{m}{2}\right\}$。反之显然。故

$$\sigma^{-1}(Q)=\left\{\left\{(x,0),\left(x,\frac{m}{2}\right),(y,j')\right\},x,y\in I_n,j'\in\left\{j,j-\frac{m}{2}\right\}\right\}$$

这表明，对任意的 $Q\in\bar{\Theta}_2$，有 $|\sigma^{-1}(Q)|=2$。故，$|\Theta_2|=|\bar{\Theta}_2|/2=\dfrac{n(n-1)m}{2}$。

根据前面引理的结果定理 1 证明如下：

证：根据引理 2.1，得 $\Phi(n\times m,3,1,2)=\Phi(n\times m,3,2)-|\Theta(2)|$，其中 $|\Theta(2)|=|\Theta_1|+|\Theta_2|$ 再结合推论 2.2，引理 3.4，和引理 3.5，加以详细计算定理的结论得证。

5. 码字结构

根据前面分析，我们给出最大二维 $(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$ 的直接构造法。

一个最大二维 $(n\times m,3,2)-OOC$ 的任意码字 X 满足 $\lambda(X)\leq 2$，所以 $\Omega(n\times m,3)$ 的码字中舍掉 $\lambda(X)=3$ 的码字，剩余的码字既是最大二维 $(n\times m,3,2)-OOC$ 的所有码字。既有

定理 2：设 n 是任意正整数，一个最大二维 $(n\times m,3,2)-OOC$ 的码字结构如下：

$m\equiv 1,5(\operatorname{mod} 6)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j$ 且 $j\neq 2i$；
2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$；
3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$，互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 2,4(\bmod 6)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j$ 且 $j\neq 2i$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$ 且 $2i\neq 0(\bmod m)$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$，互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 3(\bmod 6)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i<j\in Z_m,(i,j)\notin(m/3,2m/3)$ 且 $i<j,\ j\neq 2i$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$，互不相同且 $i,j\in Z_m$。

定理 3 设 n 是任意正整数，一个最大二维 $(n\times m,3,1,2)-OOC$ 的码字结构如下：

$m\equiv 0(\bmod 12)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i<j\in Z_m,(i,j)\notin\{(m/4,3m/4),(m/3,2m/3)\}$ 且 $j\neq 2i$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$ 且 $2i\neq 0(\bmod m)$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$ 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 1,5,7,11(\bmod 12)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j$ 且 $j\neq 2i$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$ 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 2,10(\bmod 12)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j$ 且 $j\neq i,2i$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$ 且 $2i\neq 0(\bmod m)$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$ 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 3,9(\bmod 12)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j,\ j\neq 2i$ 且 $i\neq m/3$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$ 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 4,8(\bmod 12)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j,\ j\neq 2i$ 且 $(i,j)\neq(m/4,3m/4)$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$ 且 $2i\neq 0(\bmod m)$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$ 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

$m\equiv 6(\bmod 12)$ 时，

1) $X=\{(x,0),(x,i),(x,j)\},x\in I_n,i,j\in Z_m,i<j,\ j\neq 2i$ 且 $i\neq m/3$；

2) $X=\{(x,0),(x,i),(y,j)\},x\neq y\in I_n,i,j\in Z_m$ 且 $2i\neq 0(\bmod m)$；

3) $X=\{(x,0),(y,i),(z,j)\},x,y,z\in I_n$ 互不相同且 $i,j\in Z_m$。

本文用组合计数和代数方法，对任意正整数 n，m 和 $\lambda_a=1,2$，确定了二维光正交码 $(n\times m,3,\lambda_a,2)-OOC$ 的最大容量，并给出相应码字结构。希望我们的结果对权重为 3 的二维光正交码最大容量和码字构造问题的研究的完善有一定的参考价值。

基金项目

本文得到国家自然科学基金项目(11401326、11271042 和 11601137)；内蒙古自然科学基金项目(2015MS0125、2015BS0103 和 NJZC16049)；内蒙古自治区高等学校“青年科技英才支持计划”

(NJYT-17-B12)，内蒙古师范大学科研启动基金(2013YJRC026)的支持。

参考文献

[1] Chung, F.R.K., Salehi, J.A. and Wei, V.K. (1989) Optical Orthogonal Codes: Design, Analysis and Applications. *IEEE Transactions on Information Theory*, **35**, 595-604. https://doi.org/10.1109/18.30982

[2] Feng, T., Wang, L., Wang, X. and Zhao, Y. (2017) Optimal Two Dimensional Optical Orthogonal Codes with the Best Cross-Correlation Contraint. *Journal of Combinatorial Designs*, **25**, 1-32. https://doi.org/10.1002/jcd.21554

[3] Momihara, K. and Buratti, M. (2009) Bounds and Constructions of Optimal $(n,4,2,1)$ Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **55**, 514-523. https://doi.org/10.1109/TIT.2008.2009852

[4] Huang, Y. and Chang, Y. (2012) Two Classes of Optimal Two-Dimensional OOCs. *Designs, Codes and Cryptography*, **63**, 357-363. https://doi.org/10.1007/s10623-011-9560-7

[5] Wang, J., Shan, X. and Yin, J. (2010) On Constructions for Optimal Two-Dimensional Optical Orthogonal Codes. *Designs Codes Cryptography*, **54**, 43-60. https://doi.org/10.1007/s10623-009-9308-9

[6] Wang, X., Chang, Y. and Feng, T. (2013) Optimal 2-D $(n\times m,3,2,1)$-Optical Orthogonal Codes. *IEEE Transactions on Information Theory*, **59**, 710-725. https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2214025