Pure Mathematics 理论数学, 2018, 8(3), 273-277
Published Online May 2018 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2018.83036

Hans汉斯

The Jacobi Iteration of Eigenvalue of Real Self-Adjoint Quaternion Matrices

Zhe Ouyang[1], Yun Wang*

College of Information Sciences and Engineering, Shandong Agricultural University, Tai'an Shandong
Email: *wangyun@sdau.edu.cn

Received: May 5th, 2018; accepted: May 18th, 2018; published: May 25th, 2018

Abstract

Quaternion matrix has a wide range of applications in the field of engineering technology, physics and computer science. In this paper, we describe the background and development of quaternion and quaternion matrices. Moreover some basic definitions and theorems of quaternion and quaternion matrices are demonstrated. Finally, we discuss the Jacobi iteration of right eigenvalues of real self-adjoint quaternion matrices based on the real-representation.

Keywords

Quaternion, Quaternion Matrices, Right Eigenvalue, Jacobi Iteration

四元数矩阵特征值的Jacobi迭代

欧阳哲，王　韵*

山东农业大学信息科学与工程学院，山东　泰安
Email: *wangyun@sdau.edu.cn

收稿日期：2018年5月5日；录用日期：2018年5月18日；发布日期：2018年5月25日

摘　要

四元数矩阵在工程技术、物理学和计算机科学等学科有广泛的应用。本文首先简述了四元数及四元数矩阵的背景和发展状况；其次列出了基本定义和定理；最后借助于四元数矩阵的实表示，讨论了实自共轭四元数矩阵右特征值的Jacobi迭代。

*通讯作者。

文章引用: 欧阳哲, 王韵. 四元数矩阵特征值的 Jacobi 迭代[J]. 理论数学, 2018, 8(3): 273-277.
DOI: 10.12677/pm.2018.83036

关键词

四元数，四元数矩阵，右特征值，Jacobi迭代

1. 引言

四元数是继复数之后的又一新的数系，它是英国数学家哈密尔顿在 1843 年首先提出来的，至今已有一个半世纪了。哈密尔顿建立四元数理论最初的目的是为研究空间矢量，通过类似解决平面问题中使用的复数方法寻找到了四元数。但由于当时数学工具所限，四元数最初只是在刚体定位中得到某些简单应用，学者并未发掘四元数真正的优越性，因而在整整一个世纪中四元数的研究基本上是停滞的。随着研究不断深入，数学物理学者们发现四元数和四元数矩阵可以较好地处理刚体运动学，尤其是旋转矩阵运算与单位四元数的运算非常相似，因此四元数作为一种非常有效的工具被运用到理论力学刚体运动的研究中。之后，在计算机图形学中，四元数被广泛的用于彩色图像处理。如今，四元数及其矩阵在越来越多的领域得到运用，得到了国内外学者的关注[1] [2] [3] [4]。而矩阵与其特征值不仅仅是数学理论研究中重要组成部分，在理论物理、工程力学和计算机科学中也有非常重要的应用。因此，国内外许多学者对四元数矩阵特征值在理论和实际应用方面做了很多研究[5] [6] [7] [8]。借助于经典的矩阵特征值的计算方法，我们希望可以对四元数矩阵的特征值问题做简单的理论研究，直观地分析特征值的性质，继而可以进一步地研究四元数矩阵的特征值的精确计算问题。

本文讨论了自共轭实四元数矩阵特征值的 Jacobi 迭代。第二部分简单介绍了四元数与四元数矩阵，第三部分将经典的 Jacobi 迭代推广到对自共轭四元数矩阵的特征值的计算中，最后一部分对文章内容进行了小结。

2. 基础知识

首先介绍一些四元数和四元数矩阵基础的概念和命题，更多其他相关知识可以参考文献[1] [2]。

定义 2.1：设

$$q = a + bi + cj + dk \quad a,b,c,d \in R \tag{2.1.1}$$

其中 i,j,k 满足 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$，$ij = -ji = k$，$jk = -kj = i$，$ki = -ik = j$，则称形为(2.1.1)的数为四元数，四元数的全体记为 Q，即

$$Q = \{a + bi + cj + dk \mid a,b,c,d \in R\}.$$

设 $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k \in Q$，$q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k \in Q$，则两个四元数的相等、加法与乘法分别规定如下：

$$q_1 = q_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2$$

$$q_1 + q_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

$$\begin{aligned} q_1 q_2 = {} & (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ & + (a_1 c_2 + a_2 c_1 + b_2 d_1 - d_2 b_1)j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_1)k \end{aligned}$$

容易验证四元数的乘法不满足交换律，即 $ab = ba$ 不一定成立。这是它与实数和复数最显著的差异，

使得对它的研究要比对实数、复数的研究困难得多。

对于四元数 $q = a + bi + cj + dk \in Q$，定义它的共轭和模分别为：$\overline{q} = a - bi - cj - dk$ 和 $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$。

定义 2.2：设矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$a_{ij} \in Q$，则称 A 为 m × n 阶四元数矩阵，m × n 阶四元数矩阵的全体记为 $Q^{m\times n}$。

众所周知，矩阵的特征值无论是在理论研究还是实际应用中都有非常重要的作用。1989 年，Bunse-Gerstner 等将复矩阵的 QR 算法应用到四元数矩阵中，给出了四元数矩阵的 QR 分解和 Schur 分解，从而得到该四元数矩阵的右特征值和右特征向量。下面给出四元数矩阵的特征值的定义。

定义 2.3：对 Q 上 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在 $\lambda \in Q$ 与 n 维非零列(或行)向量 α 使得 $A\alpha = \alpha\lambda$ (或 $A\alpha = \lambda\alpha$)，则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的右(左)特征值，α 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于右(或左)特征值 λ 的右(或左)特征向量。

由于四元数不满足乘法交换律，因此与通常矩阵的特征值不同，一般情况下，四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右特征值不一定是左特征值，反之，其左特征值也不一定为右特征值。到目前为止，关于四元数矩阵右特征值的研究已经得到了很多令人满意的结果，有兴趣的读者可以参见[1] [2]。

定理 2.1：[见 2，定理 3.6.1]设 $\boldsymbol{A} \in Q^{n\times n}$，则 $\boldsymbol{A}$ 的右特征值存在，且有

1) A 的为复数的右特征值的集合 = A_σ 的复特征值的集合；

2) A 的右特征值的集合 = $\{a^{-1}\lambda a \mid 0 \neq a \in Q$，$\lambda$ 为 A_σ 的复特征值$\}$，

其中，$\boldsymbol{A}_\sigma = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A_2} & \overline{A_1} \end{pmatrix}$ 为四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的复表示矩阵，$\boldsymbol{A} = A_1 + A_2 j \in Q^{m\times n}$ (其中 $A_1, A_2 \in C^{m\times n}$)是 $\boldsymbol{A}$ 在复数域 C 上的分解式。

但四元数矩阵左特征值的性质非常复杂，得到的成果还很有限。本文也只是对右特征值和右特征向量做简单研究。

3. 自共轭实四元数矩阵的特征值

四元数的计算本质上要化为复数的计算，而复数的计算又要化为实数的计算。因此，任何实四元数矩阵右特征值的计算本质上就是其复表示矩阵复特征值的计算。

定义 3.1：设 $\boldsymbol{A} \in Q^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是 Q 上的一个 n 阶自共轭实四元数矩阵，其全体记为 $Q(n,*)$。$\boldsymbol{A}^*$ 表示四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的共轭转置矩阵。

为了研究四元数矩阵的特征值，将 n 阶自共轭实四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 写成

$$\boldsymbol{A} = A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

其中 A_0, A_1, A_2, A_3 均为实矩阵。

由 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$ 得

$$A_0^{\mathrm{T}} = A_0,\ A_1^{\mathrm{T}} = -A_1,\ A_2^{\mathrm{T}} = -A_2,\ A_3^{\mathrm{T}} = -A_3 \tag{3.1.1}$$

设自共轭实四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右特征值为 λ，且对应特征向量为 $U + Vi + Wj + Gk$，其中 U, V, W, G 均为实的 n 维列向量，则

$$(A_0 + A_1 i + A_2 j + A_3 k)(U + Vi + Wj + Gk) = \lambda(U + Vi + Wj + Gk) \tag{3.1.2}$$

由文献[10]可知自共轭实四元数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为实数，所以(3.1.2)式可以写成

$$\begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ G \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ G \end{pmatrix}$$

令

$$S=\begin{pmatrix} A_0 & -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ A_1 & A_0 & -A_3 & A_2 \\ A_2 & A_3 & A_0 & -A_1 \\ A_3 & -A_2 & A_1 & A_0 \end{pmatrix}$$

由(3.1.1)式知 $\boldsymbol{S}$ 为实对称矩阵。因而自共轭实四元数矩阵的特征值问题就可转化成实对称矩阵的特征值问题，再通过 Jacobi 方法、分治法或 QR 方法进行估计或求解，这比直接对自共轭实四元数矩阵求特征值和特征向量问题方便，也较容易理解。在此介绍经典的 Jacobi 方法，其他方法可以参考文献[9] [10]。

定义 3.2：称矩阵

$$G_{ij}(\theta)=\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& \cos\theta &&&& \sin\theta &&& \\ &&&& 1 &&&&&& \\ &&&&& \ddots &&&&& \\ &&&&&& 1 &&&& \\ &&& -\sin\theta &&&& \cos\theta &&& \\ &&&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}$$

为 n 维空间 R^n 中(i,j)平面上的旋转矩阵或 Givens 矩阵。

经典 Jacobi 方法的基本思想是：对 $S_0=S$，构造一系列平面旋转矩阵 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，并计算：

$$S_k=G_kS_{k-1}G_k^{\mathrm{T}}\ \left(k=1,2,\cdots\right) \tag{3.1.3}$$

虽然一般很难在经过有限次变换后将给定的矩阵 S 化为对角矩阵，但有如下收敛性定理。

定理 3.1 [10]：按经典 Jacobi 方法生成的矩阵序列 $\{S_k\}$ 的非对角元素均收敛于 0，即 $\lim\limits_{k\to\infty}S_k=diag\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right)$。

由此我们可以通过上述 Jacobi 方法求出 $\boldsymbol{S}$ 的特征值，这同时也是实自共轭矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值。

由于经典 Jacobi 方法非常容易利用程序实现实对称矩阵的全部特征值及对应的特征向量的计算，这使得我们可以利用这种简单易于操作的方法求解实共轭四元数矩阵的特征值。

4. 小结

由于四元数的非交换性，四元数矩阵具有与复矩阵所不同的性质和特点。本文主要对自共轭四元数矩阵特征值的简单计算做了一些讨论，其中所介绍的 Jacobi 迭代法是复矩阵研究特征值问题的一种重要结论，借助于四元数矩阵的复表示，将复矩阵的研究方法到四元数矩阵中，希望通过这些尝试，我们可以对四元数矩阵特征值有进一步直观的了解。

参考文献

[1] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2002.

[2] 庄瓦金. 体上矩阵理论引导[M]. 北京: 科学出版社, 2006.

[3] Zhang, F.H. (1997) Quaternion and Matrices of Quaternion. *Linear Algebra and its Applications*, **251**, 21-57. https://doi.org/10.1016/0024-3795(95)00543-9

[4] Huang, L.P. (2000) On Two Questions about Quaternion Matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **318**, 79-86. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00154-3

[5] 李桃生. 四元数矩阵的特征值与特征向量[J]. 华中师范学院学报, 1995, 29(4): 407-411.

[6] 黄礼平. 自共轭实四元数矩阵特征值的极值原理[J]. 数学研究与评论, 1997, 17(1): 101-104.

[7] Brualdi, R.A. (2003) The Spectral Theorem in Quaternions. *Linear Algebra and its Applications*, **371**, 75-102. https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00276-8

[8] 黄敬频, 陆云双. 自共轭四元数循环矩阵的特征值问题[J]. 数学的实践与认识, 2016(13): 251-257.

[9] 曾祥金, 张亮. 矩阵分析简明教程[M]. 北京: 科学出版社, 2010.

[10] 翟瑞彩, 谢伟松. 数值分析[M]. 天津: 天津大学出版社, 2000: 87-95.