Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(1), 54-61
Published Online January 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.91008

Existence and Uniqueness Solution of Nonlinear SDE Driven by α-Stable Process

Yunfang Lu, Jinying Tong

College of Science, Donghua University, Shanghai
Email: luyunfanghome@163.com, jytong@dhu.edu.cn

Received: Dec. 17th, 2018; accepted: Jan. 3rd, 2019; published: Jan. 10th, 2019

Abstract

The main purpose of this paper is to investigate the existence and uniqueness solution of nonlinear SDE driven by α-stable process. Firstly, we give the assumptions to obtain the existence and uniqueness solution of such model which both drift coefficient and diffusion coefficient are both highly nonlinear. Then we prove the existence and uniqueness of the solution. Finally, we prove the convergence of the solution in finite time.

Keywords

α-Stable Process, Stochastic Differential Equation

α-稳定过程驱动的非线性随机微分方程解的存在唯一性

陆芸芳，童金英

东华大学，理学院，上海
Email: luyunfanghome@163.com, jytong@dhu.edu.cn

收稿日期：2018年12月17日；录用日期：2019年1月3日；发布日期：2019年1月10日

摘　要

本文的主要目的是研究α-稳定过程驱动的非线性随机微分方程解的存在唯一性。首先我们给出了漂移系数和扩散系数都是高度非线性的随机微分方程解存在唯一的假设条件，其次我们证明了该解的存在唯一性，最后，我们给出了在有限时间内解的收敛性证明。

文章引用: 陆芸芳, 童金英. α-稳定过程驱动的非线性随机微分方程解的存在唯一性[J]. 理论数学, 2019, 9(1): 54-61.
DOI: 10.12677/pm.2019.91008

关键词

***α*-稳定过程，随机微分方程**

1. 引言

近些年来，由布朗运动驱动的随机微分方程已经在很多文章中被广泛讨论了，例如 Mao [1]，Mao [2] 等。考虑标量随机微分方程

$$\mathrm{d}x(t)=\left(ax(t)-bx^3(t)\right)\mathrm{d}t+cx(t)\mathrm{d}B(t) \tag{1.1}$$

其中 $B(t)$ 是一个标准的布朗运动，a,b,c 是三个正常数，我们称这样的随机微分方程为 Ginzburg-Landan 方程。这一类的随机微分方程有很多好的性质，例如：L^r 强收敛性，解的二阶矩渐近稳定性(见 Guo [3])。

最近，关于 $\mathrm{d}x(t)=f\left(\left(x(t)\right)\mathrm{d}t+g\left(x(t)\right)\right)\mathrm{d}B(t)$ (highly nonlinear SDEs)的数值解得到了广泛的讨论。其中 f 和 g 都是 $R\to R$ 上的非线性函数。然而在现实世界中，许多问题都需要我们用 α-稳定过驱动的随机微分方程搭建的数学模型来解决，例如：Mandelbrot [4]指出 1890 年至 1937 年月度羊毛价格变化的分布遵循 $\alpha=1.7$ 的 α-稳定分布。从 Embrechts [5]我们可知 SDE 驱动因子为 0.018 时，对于 $\mathrm{d}x(t)=0.018x(t)\mathrm{d}Z(t)$，初始值为 $x_0=1$，$x(t)$ 的取值可能随着时间而取负值，也就是说这个 SDE 的数值解随时会爆炸，然而现实生活中的许多问题都需要我们用收敛的数值解去解决，但是，在讨论数值解之前，我们必须确保 SDE 的解是存在的，所以我们有足够的理由去讨论以下 SDE：

$$\mathrm{d}x(t)=\left(ax(t)-bx^3(t)\right)\mathrm{d}t+cx(t)\mathrm{d}Z(t) \tag{1.2}$$

其中 $Z(t)$ 是一个 α-稳定过程，且 $0<\alpha<2$ 在 R_* 上的 Lévy 测度 ν 定义为：

$$\nu^\alpha(\mathrm{d}z)=\frac{c_1}{|z|^{\alpha+1}}1_{(0,+\infty)}(z)\mathrm{d}z+\frac{c_2}{|z|^{\alpha+1}}1_{(-\infty,0)}(z)\mathrm{d}z$$

令 $N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$ 为 $[0,+\infty)\times R_*$ 上的泊松测度，$\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$ 为补偿泊松测度，写做：

$$\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)=N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)-\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}s$$

α-稳定过程 $\left(Z(t)\right)_{t\geq 0}$ 定义如下：

$$\begin{cases} Z(t)=\int_0^t\int_{R_*} zN(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),\alpha\in(0,1) \\ Z(t)=\int_0^t\int_{R_*} z\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z),\alpha\in(1,2), \end{cases}$$

过程 $\left(Z(t)\right)_{t\geq 0}$ 含有参数 c_1,c_2，当 $c_1=c_2$ 时，我们称该过程为对称 α 稳定过程。本文仅对对称 α 稳定过程进行讨论，且规定 $\alpha\in(1,2)$，也就是说

$$\nu(\mathrm{d}z)=\frac{C_\alpha}{|z|^{\alpha+1}}\mathrm{d}z,$$

其中 $C_\alpha=\dfrac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma\left((1+\alpha)/2\right)}{\pi^{1/2}\Gamma(1-\alpha/2)}$ 以及 $\Gamma(\cdot)$ 是一个 Gamma 函数，定义为：

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}t^{s-1}e^{-t}\mathrm{d}t,s\in(0,+\infty).$$

更为一般的，我们讨论漂移算子和积分算子都是非线性的随机微分方程，即：

$$\mathrm{d}x(t)=f\left(x(t)\right)\mathrm{d}t+g\left(x(t)\right)\mathrm{d}Z(t) \tag{1.3}$$

其中 $Z(t)$ 是一个定义在 $\alpha\in(1,2)$ 且 $t\geq 0$ 上的对称 α-稳定过程，规定初始值为 $x(0)=x_0\in R$，其中

$$f:R\to R,g:R\to R.$$

假设 f 和 g 能够分解为

$$f(x)=F_1(x)+F(x),g(x)=G_1(x)+G(x),$$

其中函数 $F_1,F:R\to R$ 且 $G_1,G:R\to R.$

由 α-稳定过程驱动的 SDE 在近几年已经被很多学者探讨(参见 Applebaum [6])，然而，目前为止还没有人给出 SDE(1.3)的数值解，在此之前，讨论 SDE (1.3)解的存在唯一性就成了我们需要解决的问题。在解决这个问题之前，我们先来对文中出现的符号和需要用到的预备知识进行说明。

2. 符号说明和预备知识

2.1. 符号说明

首先，我们队文本中出现的随机过程进行符号解释。(Ω,F,P) 是一个完备概率空间，其中 F 是域流，满足 F_t 右连续并且 F_0 包含了所有 P 空集。E 表示 P 对应的数学期望。$B(t)$ 表示定义在 (Ω,F,P) 上的标准布朗运动。$Z(t)$ 表示定义在 (Ω,F,P) 上的 α-稳定过程。如果 G 是一个集合，它的示性函数表示为当 $x\in G$ 时，$1_G(x)=1$ 否则为 0。我们用 R 和 R_* 表示实数集以及不包含 0 的实数集，定义 $\tilde{N}(\mathrm{d}t,\mathrm{d}z)=N(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)-\nu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}t$ 以及 $x(t-)=\lim\limits_{s\to t}x(s).$

2.2. α-稳定过程的无穷小生成元

我们介绍由谱正稳定过程驱动的带马尔科夫调制穷小生成元。

只有正跳的稳定过程叫做谱正稳定过程，谱正稳定过程的 Lévy 测度 ν 为

$$\nu(\mathrm{d}z)=\begin{cases}\dfrac{C_\alpha 1_{(z>0)}}{z^{\alpha+1}}\mathrm{d}z,若z\neq 0,\\ 0,若z=0.\end{cases}$$

对于由 $\alpha\in(1,2)$ 的普正稳定过程驱动的模型

$$\mathrm{d}x(t)=f\left(x(t)\right)\mathrm{d}t+g\left(x(t)\right)\mathrm{d}Z_t,t\in[0,T],$$

其中 $f\left(x(t)\right)$ 和 $g\left(x(t)\right)$ 均为 R 上的函数。

对任意 $V(x)\in R_+$，随机过程 $x(t)$ 的无穷小生成元 LV 满足：

$$LV(x)=f(x)\frac{\partial V(x)}{\partial x}+\int_{R_*}\left[V\left(x+g(x)z\right)-V(x)-\frac{\partial V(x)}{\partial x}g(x)z1_{\{|z|\leq 1\}}\right]\nu(\mathrm{d}z)$$

3. 解的存在并且唯一满足的假设条件

为了方便下文的证明，我们提出以下几个基本假设。

3.1. 假设 A1

假设 F_1, F, G_1, G 满足以下条件：

$$\left|F_1(x)-F_1(y)\right| \vee \left|G_1(x)-G_1(y)\right| \le L_1|x-y| \tag{3.1}$$

且

$$\left|F(x)-F(y)\right| \vee \left|G(x)-G(y)\right| \le L_1\left(1+|x|^{\gamma}+|y|^{\gamma}\right)|x-y| \tag{3.2}$$

从(3.1)可得线性增长条件，即存在一个 $K_1>0$ 使得

$$\left|F_1(x)\right| \vee \left|G_1(x)\right| \le K_1\left(1+|x|\right) \tag{3.3}$$

对所有的 $x \in R$ 都成立。

3.2. 假设 A2

假设 $g(x)$ 满足条件：对 $\alpha\in(1,2), z\in(0,1], \bar{p}\in(0,1]$ 以及 $p\in(0,\bar{p})$，存在一对常数 $L_2\ge 0$ 及 $\theta\ge 0$，令 $\omega(x)=\min\left(\left\||x|-|g(x)z|\right\|\right)$，则

$$\left(\frac{C_\alpha}{2(2-\alpha)}\left(\frac{|g(x)|}{\omega(x)}\right)^{2-p}\frac{C_\alpha}{\alpha-p}\right) \le L_2\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}, x\in(0,1). \tag{3.4}$$

3.3. 假设 A3

假设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足条件：存在常数 $\theta>0, p\in(0,\bar{p}), M_1\ge \operatorname{sgn}(g(x))L_2$ 及 $L_3>0$ 使得

$$pxf(x)+M_1|g(x)|^p \le L_3\left(x^2+\theta^2\right) \tag{3.5}$$

对所有 $x\in R$ 成立。

4. 解存在唯一性定理及解的收敛性

这小结分为两部分，第一部分给出 SDE (1.3)解存在唯一的证明，第二部分给出解收敛的证明。

注：从此刻起，C 代表一个取值依赖于 T, p, L_1, L_2, L_3, X_0 的常数。

4.1. 解的存在唯一性

定理 B1：若假设 A1~A3 成立，则 SDE (1.3)有一个唯一的全局解 $x(t)$。

证明：令 $k_0>0$ 充分大且 $x_0<k_0$。对各个整数规定 $k>k_0$，定义停时

$$\tau_k=\inf\left\{t\in[0,\tau_e): x(t)\notin\left(\frac{1}{k},k\right)\right\}$$

因为 SDE (1.3)的系数满足局部 Lipschitz 条件，所以，对于给定的初始值 $x_0\in R$，在 $t\in[0,\tau_e)$ 上存在一个唯一的局部解 $x(t)$，其中 τ_e 是爆炸的时刻。(参见 Bao 等[7]，Bao 和 Yuan [8]，Bass [9])。令 $k_0>0$ 充分大且 $x_0<k_0$。对于各个整数 $k>k_0$，设 $\tau_\infty=\lim_{k\to\infty}\tau_k$，其中 $\tau_\infty<\tau_e$ a.s.若我们得到 $\tau_\infty=\infty$ a.s.则 $x(t)\in R$ a.s.对所有的 $t\ge 0$。对于 $\theta>0, 0<p<1$，令

$$V_\theta(x)=\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}},x\in R \tag{3.6}$$

令 $T>0$，对任意 $0\le t\le T$，由 $It\hat{o}$ 公式(参见 Applebaum [6])可得

$$V_\theta\left(x\left(t\wedge\tau_k\right)\right)=V_\theta\left(x_0\right)+\int_0^{t\wedge\tau_k}LV_\theta\left(x(s)\right)\mathrm{d}s+M_1\left(t\wedge\tau_k\right) \tag{3.7}$$

其中 $LV_\theta:R\to R$ 定义为：

$$\begin{aligned}LV_\theta&=px\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}f(x)+\int_0^1\left[V_\theta\left(x+g(x)z\right)-V_\theta(x)-V_\theta'(x)g(x)z1_{\{0\le z<1\}}\right]\frac{C_\alpha}{|z|^{1+\alpha}}\mathrm{d}z\\&=:A(x)+B(x)+C(x)\end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $M_1(t)$ 是一个局部鞅，定义如下：

$$M_1\left(t\wedge\tau_k\right)=\int_0^{t\wedge\tau_k}\int_{R_*}\left(\left(V_\theta\left(x(s-)\right)+g\left(x(s-)\right)\right)-V_\theta\left(x(s-)\right)\right)\tilde{N}(\mathrm{d}s,\mathrm{d}z)$$

且

$$\begin{aligned}A(x)&=px\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}f(x),\\B(x)&=\int_0^1\left[V_\theta\left(x+g(x)z\right)-V_\theta(x)-V_\theta'(x)g(x)z\right]\frac{C_\alpha}{|z|^{1+\alpha}}\mathrm{d}z,\\C(x)&=\int_0^{+\infty}\left[V_\theta\left(x+g(x)z\right)-V_\theta(x)\right]\frac{C_\alpha}{|z|^{1+\alpha}}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

令 $g(x)z=y$，首先，我们计算 $B(x)$

由 Taylor 公式可知，存在一个 ξ 取值介于 x 与 $x+y$ 之间，使得

$$\begin{aligned}B(x)&=\int_0^1\left[V_\theta\left(x+g(x)z\right)-V_\theta(x)-V_\theta'(x)g(x)z\right]\frac{C_\alpha}{|z|^{1+\alpha}}\mathrm{d}z\\&\le\operatorname{sgn}\left(g(x)\right)\left|g(x)\right|^\alpha\int_0^{g(x)}\left[V_\theta(x+y)-V_\theta(x)-V_\theta'(x)y\right]\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y\\&=\operatorname{sgn}\left(g(x)\right)\left|g(x)\right|^\alpha\int_0^{g(x)}\frac{1}{2}V_\theta''(\xi)\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{3.9}$$

其中

$$V_\theta''(\xi)=p\left(\xi^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}-2}\left((p-1)\xi^2+\theta^2\right) \tag{3.10}$$

由基本不等式可知

$$-\xi^2-\theta^2\le(p-1)\xi^2+\theta^2\le\xi^2+\theta^2$$

从这个式子我们立即得到

$$\left|(p-1)\xi^2+\theta^2\right|\le\left|\xi^2+\theta^2\right| \tag{3.11}$$

当 $|x|\ne|y|$，即 $\left|g(x)z\right|\ne|x|$，将式(3.11)带入式(3.10)我们得到

$$V_\theta''(\xi)\le p\left(\xi^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}-1}\le p\xi^{p-2}$$

结合式(3.9)可得

$$\begin{aligned} B(x) &\le \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\int_0^{g(x)}\frac{1}{2}y^2p\left||x|-|g(x)z|\right|^{p-2}\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y \\ &\le \operatorname{sgn}(g(x))\frac{C_\alpha p|\omega(x)|^{p-2}}{2(2-\alpha)}|g(x)|^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

当 $|g(x)z|=|x|$，从式(3.9)我们可得

$$\begin{aligned} B(x) &= \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\int_0^{g(x)}\frac{1}{2}y^2V_\theta''\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y \\ &\le \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\int_0^{g(x)}\frac{1}{2}y^2p\left(\xi^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y \\ &\le \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\int_0^{g(x)}\frac{1}{2}y^2p\left(\left||x|-|g(x)z|\right|+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y \\ &\le \frac{C_\alpha p\theta^{p-2}}{2(2-\alpha)}|g(x)|^2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

从我们选择的 p 值不难看出

$$\lim_{\theta\to\infty}\frac{C_\alpha p\theta^{p-2}}{2(2-\alpha)}|g(x)|^2=0 \tag{3.14}$$

即，对一个充分大的 θ，$B(x)$ 在 $|g(x)z|=|x|$ 条件下是收敛的。

接下来，我们处理 $C(x)$。

令 $f(\theta)=V_\theta(x+y)-V_\theta(x)$，则

$$f'(\theta)=p\theta\left[\left((x+y)^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}-\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\right]$$

当 $|x+y|>x, f'(\theta)<0$ 且 $f'(\theta)<0$，可得 $f(\theta)<f(0)$

当 $|x+y|<x, f'(\theta)<0$ 且 $f'(\theta)>0$，可得 $-f(\theta)=|f(\theta)|<f(0)$

那么，我们的到

$$|f(\theta)|=|V_\theta(x+y)-V_\theta(x)|<|f(0)|=\left|(x+y)^p-x^p\right|$$

结合我们对 p 的选择，由基本不等式可得

$$|V_\theta(x+y)-V_\theta(x)|<|y|^p \tag{3.15}$$

则

$$\begin{aligned} C(x) &= \int_1^{+\infty}\left[V_\theta(x+g(x)z)-V_\theta(x)\right]\frac{C_\alpha}{|z|^{1+\alpha}}\mathrm{d}z \\ &\le \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\int_{g(x)}^{+\infty}|V_\theta(x+y)-V_\theta(x)|\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y \\ &\le \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\int_{g(x)}^{+\infty}|y|^p\frac{C_\alpha}{|y|^{1+\alpha}}\mathrm{d}y \\ &= \operatorname{sgn}(g(x))|g(x)|^{\alpha}\frac{C_\alpha}{\alpha-p}|g(x)|^p \end{aligned} \tag{3.16}$$

当 $x\in(-1,1)$，将式(3.12)和式(3.16)加入式(3.8)我们可以得到

$$\begin{aligned}LV_\theta(x)&\le px\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}f(x)\\&\quad+\operatorname{sgn}(g(x))\frac{C_\alpha p\left|\omega(x)\right|^{p-2}}{2(2-\alpha)}\left|g(x)\right|^2+\operatorname{sgn}(g(x))\frac{C_\alpha}{\alpha-p}\left|g(x)\right|^p\\&=px\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}f(x)\\&\quad+\operatorname{sgn}(g(x))\frac{C_\alpha}{2(2-\alpha)}\left|g(x)\right|^p\left(\frac{\left|g(x)\right|}{\left|\omega(x)\right|}\right)^{2-p}+\operatorname{sgn}(g(x))\frac{C_\alpha}{\alpha-p}\left|g(x)\right|^p\\&=px\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}f(x)+\operatorname{sgn}(g(x))C_\alpha\left|g(x)\right|^p\left(\frac{1}{2(2-\alpha)}\left(\frac{\left|g(x)\right|}{\left|\omega(x)\right|}\right)^{2-p}+\frac{1}{\alpha-p}\right)\end{aligned}\tag{3.17}$$

结合假设式(3.2)，可得

$$\begin{aligned}LV_\theta(x)&\le px\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}f(x)+L_2\operatorname{sgn}(g(x))C_\alpha\left|g(x)\right|^p\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\\&\le\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(pxf(x)+M_1\left|g(x)\right|^p\right)\\&\le\left(x^2+\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}L_3\left(x^2+\theta^2\right)\\&\le CV_\theta(x)\end{aligned}\tag{3.18}$$

当 $x=0$， $V_\theta(x)=V_\theta(0)=\theta^p$，则， $V_\theta'(x)=0$ 且

$$LV_\theta(x)\le L_2\operatorname{sgn}(g(0))C_\alpha\left|g(0)\right|^p\left(\theta^2\right)^{\frac{p-2}{2}}\le C$$

由 *Itô* 公式，依据 $x(t\wedge\tau_k)\in R$， $0\le t\le T$，

$$EV_\theta\left(x(T\wedge\tau_k)\right)=V_\theta(x_0)+E\int_0^{t\wedge\tau_k}LV_\theta(x(s))\mathrm{d}s\tag{3.19}$$

则，由式(3.19)我们可得

$$EV_\theta\left(x(T\wedge\tau_k)\right)\le V_\theta(x_0)+CE(T\wedge\tau_k)\le V_\theta(x_0)+CT\tag{3.20}$$

注意到对于所有的 $\sigma\in\{\tau_k\le T\}$，对于一个充分大的数 k，满足 $x(\tau_k,\sigma)\ge k$ 或者 $x(\tau_k,\sigma)\le\frac{1}{k}$

由于 $V_\theta(x)$ 在 $x\in(-\infty,0)$ 是非增的并且在 $x\in(0,+\infty)$ 是非减的，所以 $V_\theta(x(\tau_k,\sigma))$ 不小于 $\left(k^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}}$ 或 $\left(1/k^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}}$，即

$$V_\theta\left(x(\tau_k,\sigma)\right)\ge\left(k^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}}\wedge\left(1/k^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}}\tag{3.21}$$

从式(3.2.23)和式(3.2.24)可得

$$\left(k^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}}\wedge\left(1/k^2+\theta^2\right)^{\frac{p}{2}}P(\tau_k\le T)\le E\left(V_\theta(\tau_k,\sigma)1_{\{\tau_k\le T\}}\right)\le V_\theta(x_0)+CT$$

令 $k\to\infty$ 可得

$$P\left(\tau_{\infty} \le T\right)=0$$

由 T 的任意性可知

$$P\left(\tau_{\infty}=\infty\right)=1$$

综上，SDE (1.3)在 $t \ge 0$ 上存在一个唯一的全局解 $x(t) \in R$。

4.2. 解的收敛性

若 SDE (1.3)的解存在且唯一，即，定理 B1 成立下，对任意的 $\bar{p} \in (0,1], p \in (0,\bar{p})$，有

$$\sup_{0 \le t \le T} E\left|x(t)\right|^{p} < C, \forall T > 0. \tag{4.1}$$

证明：由 *Itô* 公式，对所有的 $x(0)=x_0 \in R$ 且 $0 \le t \le T$ 满足

$$EV_{\theta}\left(x(t)\right)=V_{\theta}\left(x_0\right)+E\int_0^t LV_{\theta}\left(x(s)\right)\mathrm{d}s \tag{4.2}$$

由式(3.18)可得

$$EV_{\theta}\left(x(t)\right)=V_{\theta}\left(x_0\right)+E\int_0^t LV_{\theta}\left(x(s)\right)\mathrm{d}s \le V_{\theta}\left(x_0\right)+ECV_{\theta}\left(x(s)\right)\mathrm{d}s$$

由 Gronwall 不等式

$$\begin{aligned} E\left|x(t)\right|^{p} &\le EV_{\theta}\left(x(t)\right) \\ &\le V_{\theta}\left(x_0\right)\exp(Ct) \\ &\le V_{\theta}\left(x_0\right)\exp(CT) \\ &\le C \end{aligned}$$

证毕。

参考文献

[1] Mao, X. (2015) The Truncated Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **290**, 370-384. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.06.002

[2] Mao, X. (2016) Convergence Rates of the Truncated Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **296**, 362-375. https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.09.035

[3] Guo, Q., Liu, W. and Mao, X. (2017) The Partially Truncated Euler-Maruyama Method and Its Stability and Boundedness. *Applied Numerical Mathematics*, **115**, 235-251.

[4] Mandelbrot, B.B. (1963) The Variation of Certain Speculative Prices. *The Journal of Business*, **36**, 394-419. https://doi.org/10.1086/294632

[5] Embrechts, P. (2012) Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer, Germany.

[6] Applebaum, D. (2004) Lévy Process and Stochastic Calculus. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511755323

[7] Bao, J. and Yuan, C. (2011) Comparison Theorem for Stochastic Differential Delay Equations with Jumps. Springer, Germany.

[8] Bao, J. and Yuan, C. (2012) Stochastic Population Dynamics Driven by Lévy Noise. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **391**, 365-375. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.02.043

[9] Bass, R. (1997) Diffusions and Elliptic Operators. Springer, New York.

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD
   下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2160-7583，即可查询
2. 打开知网首页 http://cnki.net/
   左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：http://www.hanspub.org/Submission.aspx
期刊邮箱：pm@hanspub.org