Pure Mathematics 理论数学, 2019, 9(7), 843-847
Published Online September 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2019.97110

Hans汉斯

Inverse Problem of the High-Dimensional Cauchy Mean Value Theorem

Linhao Zhu, Hang Yu, Hongliang Li*

Department of Mathematics, Zhejiang International Studies University, Hangzhou Zhejiang
Email: *hongli@126.com

Received: Aug. 29th, 2019; accepted: Sep. 18th, 2019; published: Sep. 25th, 2019

Abstract

In this paper, we give the inverse problem of high-dimensional Cauchy mean value theorem, generalize and improve the existing results through studying high-dimensional Cauchy mean value theorem.

Keywords

Cauchy Mean Value Theorem, Inverse Problem, Multivariate Function

高维Cauchy中值定理的逆问题

朱林浩，余　杭，李宏亮*

浙江外国语学院数学系，浙江　杭州
Email: *hongli@126.com

收稿日期：2019年8月29日；录用日期：2019年9月18日；发布日期：2019年9月25日

摘　要

通过对高维Cauchy中值定理的进一步研究，给出了高维Cauchy中值定理的逆问题，推广和改进了已有文献的结果。

关键词

柯西中值定理，逆问题，多元函数

*通讯作者。

文章引用: 朱林浩, 余杭, 李宏亮. 高维 Cauchy 中值定理的逆问题[J]. 理论数学, 2019, 9(7): 843-847.
DOI: 10.12677/pm.2019.97110

1. 引言

微分中值定理是微分学的核心定理之一，是讨论怎么由导数的已知性质来推断函数性质的有效工具。对于微分中值定理已经有较为深刻的研究，从一元到多元，从一次到高次都有研究。如[1]给出了二维 Cauchy 型中值定理。

定理 1.1 函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在闭凸区域 $\bar{D}$ 上连续，在开区域 D 上具有连偏导数，且 $dg(x,y)\neq 0$，(x,y) 为 D 内任一点，则对 D 内任意两点 $M(x_0,y_0),N(x_0+h,y_0+k)$，至少存在一点 $(\xi,\eta)\in\overline{MN}$ (联结 $\overline{MN}$ 的线段上一点 $(\xi,\eta)\in\overline{MN}\subset D$)，使得

$$\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{g(x_0+h,y_0+k)-g(x_0,y_0)}=\frac{f_x(\xi,\eta)h+f_y(\xi,\eta)k}{g_x(\xi,\eta)h+g_y(\xi,\eta)k}。$$

而对于微分中值定理的逆问题，也有很多文献做了研究。[2]研究了一类单变量 Cauchy 型微分中值定理的逆命题：

定理 1.2 函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$g'(x)\neq 0$，且当 $x_1,x_2\in[a,b]$，$x_1<x_2$ 时，有 $f'(x_1)g'(x_2)-f'(x_2)g'(x_1)<0$ (或 $f'(x_1)g'(x_2)-f'(x_2)g'(x_1)>0$)，则存在点 $x_0\in[a,b]$ 使得

1) 当 $\xi\in[a,x_0]$ 时，存在唯一的 $p\in[a,b]$，使得

$$\frac{f(p)-f(a)}{g(p)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)};$$

2) 当 $\xi\in[x_0,b]$ 时，存在唯一的 $q\in[a,b]$，使得

$$\frac{f(b)-f(q)}{g(b)-g(q)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}。$$

本文旨在研究多元微分中值定理的逆命题。在这一方面[3]证明下述定理。

定理 1.3 设 $D\subset R^2$ 是有界闭凸域，二元函数 $z=f(x,y)$ 在 D 上连续，在 D 的所有内点都有关于 x、y 的连续偏导数，且 $f(x,y)$ 是 D 上的严格凸函数，则 $\forall P(x_0,y_0)\in D$，在任意通过此点的直线段上，总能找到两点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)\in D$，使得

$$f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)=f_x(x_0,y_0)(x_2-x_1)+f_y(x_0,y_0)(y_2-y_1)。$$

2. 主要结果

从定理 1.2 中我们可以提出它的逆命题，即：

函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在闭凸区域 $\bar{D}$ 上连续，在开区域 D 上可微，且 $dg(x,y)\neq 0$，(x,y) 为 D 内任一点，对任意一点 (ξ,η)，则在 D 内任意通过该点的线段 $\overline{MN}$ 上，总存在两点 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)}{g(x_2,y_2)-g(x_1,y_1)}=\frac{f_x(\xi,\eta)(x_2-x_1)+f_y(\xi,\eta)(y_2-y_1)}{g_x(\xi,\eta)(x_2-x_1)+g_y(\xi,\eta)(y_2-y_1)}。$$

这个逆命题是不成立的。如设 $f(x,y)=x^2-x^4/4$，$g(x,y)=x^2$，$(\xi,\eta)=(0,y)$，$D=[-1,1]\times[-1,1]$，

可以验证当 $\overline{MN}$ 是平行于 x 轴的线段且 ξ 靠近 0 时，上面的结果不正确。即这样的柯西中值定理的逆命题并不成立，所以我们需要适当的加强条件来使之成立。下面定理为本文的主要结果。

定理 2.1 设函数 $f(x,y),g(x,y)$ 在闭凸区域 $\bar{D}$ 上可微，且 $dg(x,y)\neq 0$。假定 $\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in\bar{D}$ ($a_1<a_2$)，

$$\begin{aligned}&\left[f_x(a_1,b_1)(a_2-a_1)+f_y(a_1,b_1)(b_2-b_1)\right]\left[g_x(a_2,b_2)(a_2-a_1)+g_y(a_2,b_2)(b_2-b_1)\right]\\&<\left[f_x(a_2,b_2)(a_2-a_1)+f_y(a_2,b_2)(b_2-b_1)\right]\left[g_x(a_1,b_1)(a_2-a_1)+g_y(a_1,b_1)(b_2-b_1)\right]\end{aligned}\tag{2.1}$$

或

$$\begin{aligned}&\left[f_x(a_1,b_1)(a_2-a_1)+f_y(a_1,b_1)(b_2-b_1)\right]\left[g_x(a_2,b_2)(a_2-a_1)+g_y(a_2,b_2)(b_2-b_1)\right]\\&>\left[f_x(a_2,b_2)(a_2-a_1)+f_y(a_2,b_2)(b_2-b_1)\right]\left[g_x(a_1,b_1)(a_2-a_1)+g_y(a_1,b_1)(b_2-b_1)\right]\end{aligned}\tag{2.2}$$

则当 $A_1(x_1,y_1)$， $A_2(x_2,y_2)$ （$x_1<x_2$）在 $\bar{D}$ 上，存在点 $A_0(x_0,y_0)\in A_1A_2$ 使得

1) 当点 $B(\xi,\eta)\in A_1A_0$，存在唯一的 $P(\zeta,\lambda)\in A_1A_2$，使得

$$\frac{f(\zeta,\lambda)-f(x_1,y_1)}{g(\zeta,\lambda)-g(x_1,y_1)}=\frac{f_x(\xi,\eta)(\zeta-x_1)+f_y(\xi,\eta)(\lambda-y_1)}{g_x(\xi,\eta)(\zeta-x_1)+g_y(\xi,\eta)(\lambda-y_1)};\tag{2.3}$$

2) 当点 $B(\xi,\eta)\in A_0A_2$，存在唯一的 $P(\zeta,\lambda)\in A_1A_2$，使得

$$\frac{f(x_2,y_2)-f(\zeta,\lambda)}{g(x_2,y_2)-g(\zeta,\lambda)}=\frac{f_x(\xi,\eta)(x_2-\zeta)+f_y(\xi,\eta)(y_2-\lambda)}{g_x(\xi,\eta)(x_2-\zeta)+g_y(\xi,\eta)(y_2-\lambda)}。\tag{2.4}$$

证明：不妨假定(2.1)成立，因为(2.2)的情况类似可以证明。现在我们将分两种情况对它进行分类讨论。

1) 第一情况：直线段 A_1A_2 与 x 轴或者 y 轴平行，即直线段 MN 上的点横坐标或者纵坐标相等。不失一般性，假定 A_1A_2 与 x 轴平行，也即 $y_1=y_2$。记 $y_1=y_0$。此时我们可以把二元函数转换为一元函数，使得问题变得更加方便。这时我们要证明的是存在唯一的 x_0， $x_1<x_0<x_2$，记 (x_0,y_0) 为 A_0，使得

a) 当 $B(\xi,y_0)\in A_1A_0$，存在唯一的 $P(\zeta,y_0)\in A_1A_2$，使得

$$\frac{f(\zeta,y_0)-f(x_1,y_0)}{g(\zeta,y_0)-g(x_1,y_0)}=\frac{f_x(\xi,y_0)}{g_x(\xi,y_0)};$$

b) 当 $D(\xi,y_0)\in A_0A_2$，存在唯一的 $P(\zeta,y_0)\in A_1A_2$，使得

$$\frac{f(x_2,y_0)-f(\zeta,y_0)}{g(x_2,y_0)-g(\zeta,y_0)}=\frac{f_x(\xi,y_0)}{g_x(\xi,y_0)}。$$

令 $f(x,y_0)=F(x),g(x,y_0)=G(x)$。由条件(2.1)可知如果 $x_1'\le x_2'$，那么

$$F'(x_1')G'(x_2')-F'(x_2')G'(x_1')<0。$$

于是由定理 1.2 可知(2.3)和(2.4)成立。

2) 第二种情况：A_1、A_2 横坐标或纵坐标都不相同的情况。此时我们对坐标轴进行平移，使得原来的坐标轴 xoy 移动到以 (x_1,y_1) 为原点的坐标轴并记为坐标轴 $x'oy'$，使得新的 x 轴与 y 轴与原先的平行且同向。此时新的坐标轴 $x'oy'$ 上的点 (x',y') 在坐标轴 xoy 上就可以表示成 $(x'+x_1,y'+y_1)$。接着我们旋转坐标轴 $x'oy'$ 使得直线段 A_1A_2 可以与横坐标轴重合，记逆时针旋转的角度为 θ （$-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$），记新的坐标轴为 $x''oy''$。此时在 $x''oy''$ 上的点 (x'',y'') 在 $x'oy'$ 上的坐标为 $(x''\cos\theta-y''\sin\theta,x''\sin\theta+y''\cos\theta)$。这样坐

标系 $x''oy''$ 和坐标轴 xoy 上同一点的坐标 (x'',y'') 和 (x,y) 的关系可以表示成

$$x = x''\cos\theta - y''\sin\theta + x_1,$$

$$y = x''\sin\theta + y''\cos\theta + y_1。$$

由于此时直线段 A_1A_2 与 x'' 轴重合，故线段 A_1A_2 的纵坐标 $y''=0$，我们记

$$A(x'') = f(x,y) = f(x''\cos\theta + x_1, x''\sin\theta + y_1), \tag{2.5}$$

$$B(x'') = g(x,y) = g(x''\cos\theta + x_1, x''\sin\theta + y_1)。 \tag{2.6}$$

经过坐标变换，我们将复杂的情况转化成了简便的情形来处理。接下来我们将证明 $A(x''),B(x'')$ 在 $0 \le x'' \le \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 上都可导且当 $x_1''<x_2''$ 时，有

$$A'(x_1'')B'(x_2'') < A'(x_2'')B'(x_1'')。$$

我们先证明 $A(x''),B(x'')$ 在 $0 \le x'' \le \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 上都可导。由于函数 $g(x,y)$ 可微，故对 $A(x''),B(x'')$ 求导可以得到

$$A'(x'') = f_x(x''\cos\theta + x_1, x''\sin\theta + y_1)\cos\theta + f_y(x''\cos\theta + x_1, x''\sin\theta + y_1)\sin\theta; \tag{2.7}$$

$$B'(x'') = g_x(x''\cos\theta + x_1, x''\sin\theta + y_1)\cos\theta + g_y(x''\cos\theta + x_1, x''\sin\theta + y_1)\sin\theta。 \tag{2.8}$$

由题意易知 $B'(x'') \ne 0$。下面我们证明当 $x_1''<x_2''$ 时，

$$A'(x_1'')B'(x_2'') < A'(x_2'')B'(x_1'')。$$

记 $P_1''(x_1''\cos\theta + x_1, x_1''\sin\theta + y_1)$，$P_2''(x_2''\cos\theta + x_1, x_2''\sin\theta + y_1)$，则 $\overrightarrow{P_1''P_2''} = (x_2''-x_1'')(\cos\theta,\sin\theta)$。根据条件(2.1)有

$$\begin{aligned}&\left[\left(f_x(P_1''),f_y(P_1'')\right)\cdot\overrightarrow{P_1''P_2''}\right]\left[\left(g_x(P_1''),g_y(P_1'')\right)\cdot\overrightarrow{P_1''P_2''}\right]\\&<\left[\left(f_x(P_2''),f_y(P_2'')\right)\cdot\overrightarrow{P_1''P_2''}\right]\left[\left(g_x(P_2''),g_y(P_2'')\right)\cdot\overrightarrow{P_1''P_2''}\right]\end{aligned},$$

也即

$$A'(x_1'')B'(x_2'')(x_2''-x_1'')^2 < A'(x_2'')B'(x_1'')(x_2''-x_1'')^2。$$

故

$$A'(x_1'')B'(x_2'') < A'(x_2'')B'(x_1'')。$$

现在由定理 1.2 可知存在唯一的 x_0，$0 \le x_0 \le \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，使得

a) 当 $0<\xi<x_0$ 时，存在唯一的 $0<\zeta<\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，使得

$$\frac{A(\zeta)-A(0)}{B(\zeta)-B(0)} = \frac{A'(\xi)}{B'(\xi)};$$

b) 当 $x_0<\xi<\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，存在唯一的 $0<\zeta<\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$，使得

$$\frac{A\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right)-A(\zeta)}{B\left(\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\right)-B(\zeta)} = \frac{A'(\xi)}{B'(\xi)}。$$

现在将(2.5)、(2.6)及(2.7)、(2.8)代入到上面的(a)、(b)就可得到定理。

注 1 1) 在定理 2.1 中如果设 $f(x,y)=F(x)$，$g(x,y)=G(x)$，$\bar{D}=[a,b]$，则定理 2.1 即为定理 1.2。

2) 在定理 2.1 中如果设 $g(x,y)=x$，那么(2.1)变为

$$\left[f_x(a_1,b_1)(a_2-a_1)+f_y(a_1,b_1)(b_2-b_1)\right]<\left[f_x(a_2,b_2)(a_2-a_1)+f_y(a_2,b_2)(b_2-b_1)\right]; \tag{2.9}$$

(2.2)变成

$$\left[f_x(a_1,b_1)(a_2-a_1)+f_y(a_1,b_1)(b_2-b_1)\right]>\left[f_x(a_2,b_2)(a_2-a_1)+f_y(a_2,b_2)(b_2-b_1)\right]。 \tag{2.10}$$

当 f 是严格凸函数时，(2.9)成立；当 f 是严格凹函数时，(2.10)成立。故定理 2.1 是定理 1.3 的改进。

参考文献

[1] 邢棉，孟新焕. 二元函数微分中值定理的推广[J]. 工科数学, 1992, 8(4): 109-111.

[2] 陈新一，王学海. Cauchy 中值定理的逆问题[J]. 甘肃教育学院学报, 2004, 18(1): 5-9.

[3] 康妙蓉. 多元函数微分中值定理的逆问题[D]: [学士学位论文]. 杭州: 浙江外国语学院, 2017.